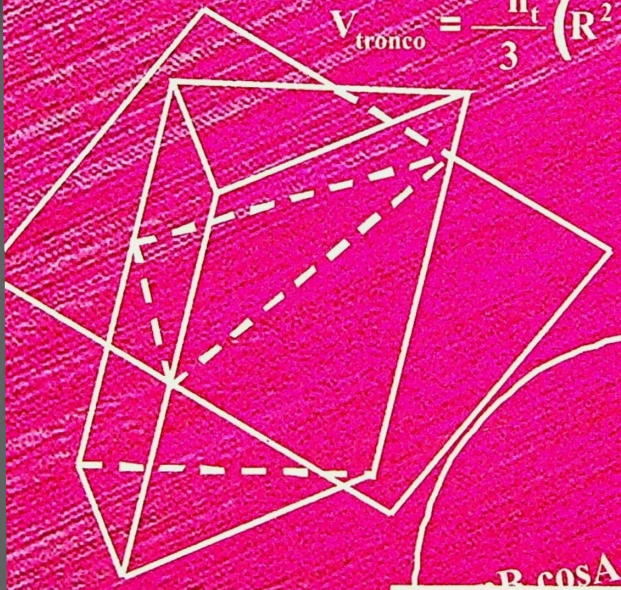
ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

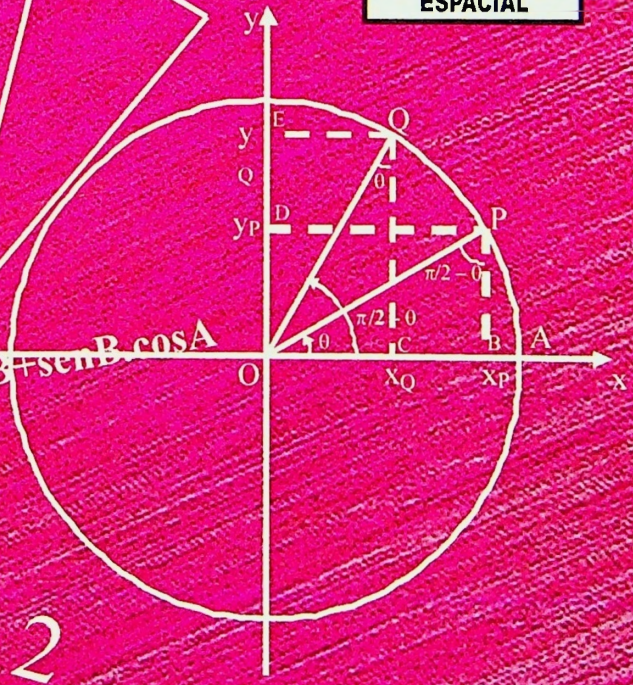
Marcelo Rufino de Oliveira

$$V_{tronco} = \frac{\pi h_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

5

TRIGONOMETRIA
GEOMETRIA
ESPACIAL





$$sen(A+B) = senA.cosB + senB.cosA$$

$$V + F = A + 2$$

Marcelo Rufino de Oliveira
Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
Coordenador das Turmas Militares do Colégio Ideal
Professor de Matemática das Turmas Militares do Colégio Ideal
Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática

TRIGONOMETRIA
GEOMETRIA ESPACIAL

1ª edição

Fortaleza - CE
2018

Editora VestSeller

APRESENTAÇÃO À 1ª EDIÇÃO

Esta é 1ª edição do quinto volume da **Coleção Elementos da Matemática**. O objetivo desta coleção é iniciar o preparo de pessoas, a partir da 9º ano do ensino fundamental, para a aprovação nos processos seletivos mais difíceis do Brasil, de instituições como Colégio Naval, Epcar, ITA, IME, AFA, Escola Naval, EFOMM, USP, Unicamp, dentre outros, nos quais se exige mais do que simples memorização de fórmulas e de resultados. Deseja-se que o estudante adquira um senso crítico de causa e efeito, embasado nos mais sólidos conceitos, o que o ajudará a raciocinar coesa e coerentemente na maioria dos assuntos e das disciplinas exigidas em tais concursos (não somente em matemática!).

O volume 5 aborda os assuntos de Trigonometria e Geometria Espacial. Ambos são exaustivamente cobrados em qualquer concurso militar, sobretudo na prova do ITA, que destina um extenso espaço para questões desses dois assuntos. O objetivo do autor é cobrir tudo que possa ser cobrado de Trigonometria e Geometria Espacial em provas de concursos militares. Evidentemente, os tópicos mais importantes possuem mais espaço reservado, porém foram incluídos neste volume alguns tópicos mais específicos que apresentam historicamente baixa aplicabilidade, como desigualdades trigonométricas, determinação de polinômios cujas raízes são funções trigonométricas, tronco de prisma e tronco de cilindro.

Corroborando com o objetivo do livro, grande parte dos exemplos resolvidos e dos exercícios propostos foram extraídos de provas de concursos militares, sobretudo do ITA e do IME. Não obstante, é possível identificar problemas retirados de provas de olimpíadas de matemática, contudo foi tomado o cuidado de se escolher questões que se encaixem no estilo das provas dos concursos militares. Apesar de um evidente maior nível de aprofundamento, é importante deixar explícito que Elementos da Matemática é uma coleção voltada para concursos militares e não olimpíadas de matemática. Para os que desejam enveredar por esta áreas, o próprio autor deste volume também é autor de uma outra coleção voltada exclusivamente para Olimpíadas de Matemática, denominada "Técnicas em Olimpíadas de Matemática", composta de três volumes, onde são apresentados e resolvidos problemas de olimpíadas de matemática de todo o mundo, um legítimo "problema-solving", estilo de livro bastante comum em olimpíadas de matemática.

Conforme relatado por muitos leitores dos outros volumes desta coleção, é natural sentir alguma dificuldade na resolução dos exercícios propostos, sobretudo no caso de alguém que esteja iniciando seus estudos no ramo dos concursos militares. Neste caso, o leitor pode ficar à vontade

em buscar textos mais acessíveis, de modo a formar melhor sua base sobre determinado assunto contido neste volume.

Ainda em sua 1ª edição, é normal que alguns deslizes possam ter sido cometidos, sobretudo em alguns gabaritos e erros de digitação. De antemão, o autor já agradece aos leitores que puderem indicar tais erros, de modo a serem corrigidos nas futuras edições. Esta prática resultou em edições com menos erros em outros volumes.

Dificuldades há, sem dúvida. No entanto, repudiam-se idéias do tipo que o aluno não consegue aprender dessa ou daquela forma. Não se deve menosprezar a capacidade dos alunos, nem mesmo seu interesse, sob pena de estar cometendo preconceitos ou precariedade na metodologia de ensino, respectivamente. Qualquer indivíduo ao qual se propõe o aprendizado de análise sintática e semântica, por exemplo, tem condições de compreender um estudo mais rigoroso e encadeado de matemática. Ao menos melhor do que o atual. Por experiência própria, já se comprovou que os benefícios superam bastante eventuais prejuízos.

O autor

Índice

Capítulo 1. Triângulo Retângulo

1. Definições 1
2. Arcos Notáveis 2
3. Relação Fundamental 8
4. Soma de Subtração de Arcos 13

Exercícios 23

Capítulo 2. Ciclo Trigonométrico e Identidades

1. Medidas de Arcos 43
2. Ciclo Trigonométrico 47
3. Redução ao 1º Quadrante 59
4. Relação Fundamental da Trigonometria 66
5. Identidades Trigonométricas 67

Exercícios 76

Capítulo 3. Transformações Trigonométricas

1. Adição e Subtração de Arcos 91
2. Arco Duplo 94
3. Arco Triplo 94
4. Arcos Múltiplos 95
5. Arco Metade 97
6. Transformação em Produto 98
7. Identidades com Ângulos de um Triângulo 99

Exercícios 117

Capítulo 4. Equações Trigonométricas

1. Definição 139
2. sen α = sen β 139
3. cos α = cos β 140
4. tg α = tg β 140
5. Sistema de Equações Trigonométricas 141
6. Soluções Dentro de um Intervalo 141
7. Funções Trigonométricas como Raízes de Polinômios 142

Exercícios 160

Capitulo 5. Funções Trigonométricas
1 Introdução ... 181
2. Função Seno ... 181
3. Função Cosseno ... 187
4. Função Tangente ... 189
5. Função Cotangente ... 193
6. Função Secante ... 195
7. Função Cossecante ... 197
8. Periodo da Soma de Duas Funções Periódicas ... 199
Exercícios ... 213

Capitulo 6. Funções Trigonométricas Inversas
1. Função Arco Seno ... 240
2. Função Arco Cosseno ... 242
3. Função Arco Tangente ... 244
4. Função Arco Cotangente ... 246
5. Propriedades das Funções Trigonométricas Inversas ... 246
6. Equações com Funções Trigonométricas Inversas ... 248
Exercícios ... 255

Capitulo 7. Inequações Trigonométricas
1. Introdução ... 266
Exercícios ... 275

Capitulo 8. Desigualdades Trigonométricas
1. Introdução ... 281
2. Manipulação Algébrica ... 281
3 Usando a Desigualdade de Jensen ... 285
4. Usando a Desigualdade das Médias ... 287
5. Substituições Geométricas ... 288
6. Substituições Trigonométricas ... 292
Exercícios ... 295

Capitulo 9. Geometria de Posição e Poliedros
1. Postulados ... 301
2. Determinação dos Elementos ... 303
3. Posições Relativas ... 305
4. Distância Entre Duas Retas Reversas ... 311
5. Ângulo Entre Duas Retas ... 311
6. Ângulo Entre Reta e Plano ... 311
7. Ângulo Entre Dois Planos ... 313
8. Poliedros ... 320
9. Classificação dos Poliedros ... 321
10. Relação de Euler ... 321
Exercícios ... 328

Capítulo 10. Primas
1. Características 339
2. Tipos de Prisma 339
3. Volume 340
4. Princípio de Cavalieri 341
5. Volume de um Prisma 342
6. Paralelepípedo Reto Retangular 343
7. Tronco de Prisma 344
Exercícios 351

Capítulo 11. Pirâmide
1. Definições 369
2. Volume de Uma Pirâmide Triangular 370
3. Tetraedro Regular 372
4. Tronco de Pirâmide 373
Exercícios 386

Capítulo 12. Cilindro
1. Definição 403
2. Elementos de Um Cilindro 403
3. Cilindro Equilátero 404
4. Áreas de Um Cilindro 404
5. Volume de Um Cilindro 405
6. Tronco de Cilindro 406
Exercícios 414

Capítulo 13. Cone
1. Definição 434
2. Elementos de Um Cone 434
3. Cálculo das Áreas de Um Cone Reto 435
4. Volume do Cone 436
5. Tronco de Cone 436
Exercícios 443

Capítulo 14. Esfera
1. Definição 464
2. Volume da Esfera 464
3. Área da Superfície Esférica 465
4. Porções da Superfície Esférica 467
5. Porções de Uma Esfera 468
6. Teorema de Pappus-Guldin 472
Exercícios 484

Capitulo 15. Inscrição de Sólidos 498
Exercicios 514

Gabaritos 531

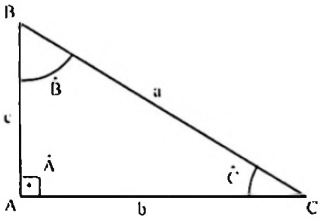
Triângulo Retângulo

1.1. DEFINIÇÕES

1.1.1. Triângulo Retângulo

No volume 2 desta coleção foi apresentada a definição de triângulo retângulo, bem como todas as suas propriedades fundamentais. A seguir será feito um resumo das principais propriedades de um triângulo retângulo. Para mais detalhes, acesse o capítulo sobre **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**, no volume 2 desta mesma coleção.

Um triângulo é classificado como triângulo retângulo quando um de seus ângulos é igual a 90°. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de **hipotenusa**, enquanto que os outros dois lados do triângulo retângulo são chamados de **catetos**.



Suponha um triângulo ABC, como ilustrado na figura ao lado, onde o vértice A é o vértice onde está o ângulo reto. Assim, tem-se que:

$\overline{BC} = a$ é a hipotenusa

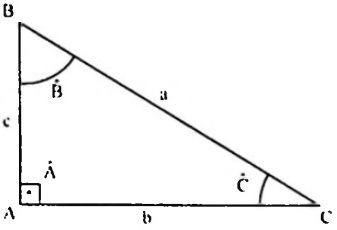
$\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ são os catetos

$\angle B\hat{A}C = \hat{A} = 90°$ é o ângulo reto do triângulo retângulo

$\angle A\hat{B}C = \hat{B}$ e $\angle A\hat{C}B = \hat{C}$ são os ângulos agudos

1.1.2. Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Suponha um triângulo ABC onde $\hat{A} = 90°$. Neste triângulo são definidos os conceitos de cosseno, seno e tangente dos ângulos agudos de ΔABC da seguinte forma, onde $\hat{X}$ é um dos ângulos agudos de ΔABC, ou seja, $\hat{X} = \hat{A}$ ou $\hat{X} = \hat{B}$:



$$\text{cosseno } \hat{X} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{X}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{seno } \hat{X} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{X}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente } \hat{X} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{X}}{\text{cateto adjacente a } \hat{X}}$$

De modo a reduzir o tamanho das escritas destas grandezas, é comum designar cosseno apenas por cos, seno apenas por sen e tangente apenas por tg ou tag.

Deste modo, em um triângulo retângulo onde $\hat{A} = 90^\circ$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}, \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a}, \quad \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}, \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}, \quad \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}, \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$$

Perceba que $\cos \hat{B}$ = sen $\hat{C}$ e que $\cos \hat{C}$ = sen $\hat{B}$. Futuramente, será demonstrado que isto sempre ocorre para ângulos cuja soma seja igual a 90°. Além disso, note que:

$$\frac{\text{sen } \hat{X}}{\cos \hat{X}} = \frac{\dfrac{\text{cateto oposto a } \hat{X}}{\cancel{\text{hipotenusa}}}}{\dfrac{\text{cateto adjacente a } \hat{X}}{\cancel{\text{hipotenusa}}}} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{X}}{\text{cateto adjacente a } \hat{X}} \Rightarrow \text{tg } \hat{X} = \frac{\text{sen } \hat{X}}{\cos \hat{X}}$$

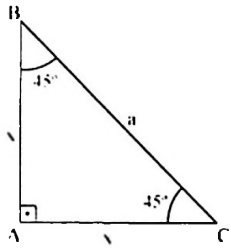
Observações:

(1) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e o ângulo reto vale 90°, a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo vale 90°, fazendo com que cada um deles esteja no intervalo (0°, 90°).

(2) Sabe-se o maior lado de um triângulo retângulo é a hipotenusa. Deste modo, se θ é um ângulo no intervalo $0 < \theta < 90^\circ$, segue que $0 < \text{sen } \theta < 1$ e $0 < \cos \theta < 1$.

1.2. ARCOS NOTÁVEIS

1.2.1. Cosseno, seno e tangente de 45°



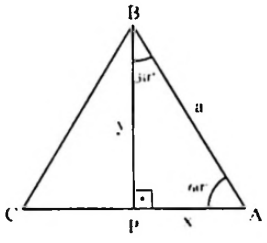
Considere um triângulo retângulo isósceles ABC, de hipotenusa $\overline{BC} = a$ e catetos $\overline{AB} = \overline{AC} = x$. Pelo Teorema de Pitágoras: $x^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}x$

Como os catetos de um triângulo retângulo isósceles possuem mesmo comprimento o seno e o cosseno de 45° são iguais:

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{x}{x} \Rightarrow \text{tg } 45^\circ = 1$$

1.2.2. Cosseno, seno e tangente de 30° e 60°



Considere um triângulo equilátero ABC de lado a. Trace a altura a partir de B, que intersecta AC em P. Suponha que $\overline{AP} = x$ e $\overline{BP} = y$. Desde que ABC é equilátero, tem-se que BP, além de altura, é mediana e bissetriz: $\overline{AP} = x = \frac{a}{2}$ e $\angle A\hat{B}P = 30°$.

Pelo Teorema de Pitágoras em ABP:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, no triângulo ABC:

i) $\cos 30° = \frac{y}{a} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ii) $\cos 60° = \frac{x}{a} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$;

iii) $\text{sen } 30° = \frac{x}{a} \Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$;

iv) $\text{sen } 60° = \frac{y}{a} \Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

iv) $\text{tg } 30° = \frac{x}{y} \Rightarrow \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

v) $\text{tg } 60° = \frac{y}{x} \Rightarrow \text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

A tabela abaixo indica os valores do seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

1) (Udesc-09) Sobre um plano inclinado deverá ser construída uma escadaria.

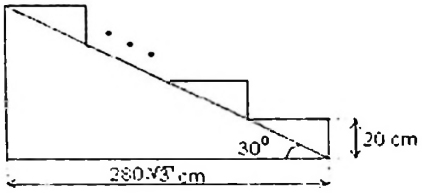


Figura 1

Sabendo que cada degrau da escada deverá ter uma altura de 20 cm e que a base do plano inclinado mede $280\sqrt{3}$ cm, conforme mostra a Figura 1, então a escada deverá ter:

a) 10 degraus. b) 28 degraus. c) 14 degraus.
d) 54 degraus. e) 16 degraus.

Solução: Alternativa C

Se h é a altura do plano inclinado:

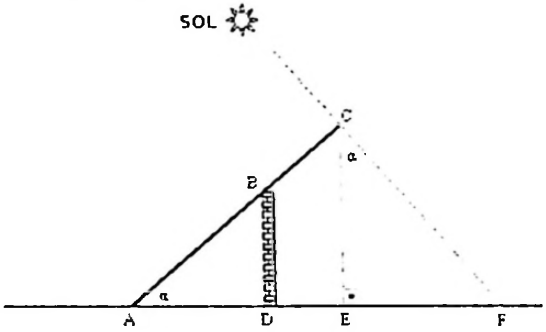
$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{h}{280\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{280\sqrt{3}} \Rightarrow h = 280 \text{ cm}$$

Como cada um dos n degraus possui altura igual a 20 cm:

$20.n = 280 \Rightarrow n = 14$ degraus

2) (EsPCEx-08) Na figura a seguir, está representado um muro (BD) de 6 m de altura em que está apoiada uma escada representada por AC, que faz um ângulo α com a horizontal. Sabe-se que a parte da escada indicada pelo segmento AB corresponde a 2/3 do seu comprimento. Num determinado momento do dia, os raios de sol fazem com a vertical um ângulo também de valor α, projetando no ponto F a sombra da extremidade C da escada.

Dado: sen α = 3/5, cos α = 4/5



Desenho Fora de Escala

Assim, considerando desprezível a espessura do muro, a medida do segmento DF, que corresponde à parte da sombra da escada que está além do muro, nesse instante, é igual a

a) 6,75 m b) 10,75 m c) 14,75 m d) 18,75 m e) 22,75 m

Solução: Alternativa B

Perceba que ABD, ACE e CEF são todos triângulos retângulos. Logo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB = 10 \text{ m}$$

$$AB = \frac{2}{3}AC \Rightarrow 10 = \frac{2}{3}AC \Rightarrow AC = 15 \text{ m}$$

$$\cos\alpha = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AE}{15} \Rightarrow AE = 12 \text{ m}$$

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AD}{10} \Rightarrow AD = 8 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{CE}{15} \Rightarrow CE = 9 \text{ m}$$

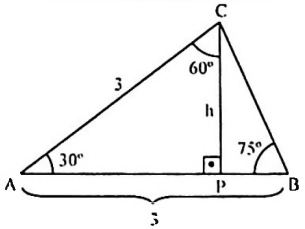
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{EF}{CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{CE}{9} \Rightarrow CE = 6{,}75 \text{ m}$$

$$DF = DE + EF = (AE - AD) + EF = 12 - 8 + 6{,}75 = 10{,}75 \text{ m}$$

3) (Ciaba-13) Dois observadores que estão em posições coincidentes com os pontos A e B, afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75°, respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B, então a altura do balão, a partir do chão, em km, é:

a) 1/3 b) 5/2 c) 2/5 d) 2/3 e) 3/2

Solução: Alternativa E



Se $\hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 75°$ então segue que $\hat{C} = 75°$ e assim ABC é isósceles, fazendo com que AC = AB = 3 km.

Traçando a altura CP = h tem-se no triângulo ACP:

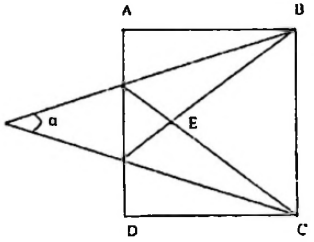
$$\operatorname{sen}30° = \frac{h}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = \frac{3}{2}\text{km}$$

4) (IME-08) Na figura seguinte ABCD é um quadrado de lado 1 e BCE é um triângulo eqüilátero. O valor de $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ é igual a:

a) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2-\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $1-\frac{\sqrt{2}}{5}$

c) $1-\frac{\sqrt{3}}{5}$



Solução: Alternativa C

Sejam P e Q as interseções das retas CE e BE com o lado AD.

Uma vez que $\angle PCD = 30°$ então $PD = \sqrt{3}/3$.

Observando-se que $\angle PBA = \alpha/2$, então $tg(\alpha/2) = \frac{AP}{AB} = \frac{AD-PD}{AB} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) (ITA-09) Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que:

a) $\alpha = 90°$.

b) $\beta = 60°$.

c) $\gamma = 90°$.

d) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45°$.

e) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Solução: Alternativa E

Como a equação dada admite c como raiz dupla:

$x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = (x-c)^2 = x^2 - 2cx + c^2$

Logo, conclui-se que:

I. $c = b.\cos\alpha$; II. $b^2 - a^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$

De I e II conclui-se que ABC um triângulo retângulo com hipotenusa em b.

6) (Escola Naval-00) Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando α o ângulo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $tg\,\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}$ é igual a

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{12+\sqrt{2}}{4}$

Solução: Alternativa C

Suponha que os lados do triângulo retângulo sejam:
3a (hipotenusa), a (cateto) e x (cateto).

Aplicando o teorema de Pitágoras: $(3a)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 8a^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}a$

O menor ângulo é oposto ao menor cateto, ou seja, oposto ao cateto a. Deste modo tem-se que:

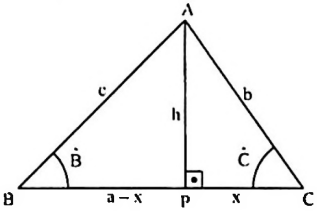
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cancel{a}}{2\sqrt{2}\cancel{a}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}\cancel{a}}{3\cancel{a}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Logo: $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

7) (IME-09) Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos opostos aos lado b e c, o valor de $\dfrac{\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{C}}$ é:

a) $\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2}\dfrac{c}{b}$ b) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$ c) $\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2}$ d) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}\dfrac{c}{b}$ e) $\dfrac{b}{c}$

Solução: Alternativa B



Sejam: P o pé da altura traçada desde A, PC = x e AP = h.

Em ΔACP: $b^2 = h^2 + x^2$

Em ΔABP:

$c^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2 \Rightarrow$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \Rightarrow PC = x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

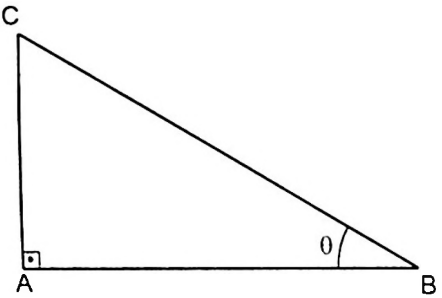
Assim: $BP = a - x = a - \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

$$\frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{C}} = \frac{\dfrac{h}{BP}}{\dfrac{h}{CP}} = \frac{CP}{BP} = \frac{\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}}{\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

1.3. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Teorema: Se θ um ângulo tal que $0 < \theta < 90°$ então $\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$.

Demonstração:



Como $0 < \theta < 90°$, então θ pode ser o ângulo agudo de um triângulo retângulo. Considere um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overline{BC} = a$ e catetos $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Se $\angle A\hat{B}C = \theta$ então segue que $b = a.\text{sen}\,\theta$ e $c = a.\cos\theta$.
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 \;\Rightarrow\; a^2 = a^2.\text{sen}^2\,\theta + a.\cos^2\theta \;\Rightarrow\; \text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Esta relação recebe o nome de **Relação Fundamental da Trigonometria**, permitindo determinar o valor do seno de um ângulo a partir do cosseno e vice versa.

Observações:

(1) No capítulo 3 deste livro será demonstrado que a relação fundamental da trigonometria é válida para qualquer ângulo θ, incluindo ângulos fora do intervalo $(0°, 90°)$

(2) Para ângulos θ tais que $0 < \theta < 90°$ deve-se assumir que tanto sen θ quanto cos θ são positivos. Este resultado é trivial se levarmos em consideração a definição de seno e cosseno dos ângulos agudos de um triângulo retângulo. No capítulo 2 esta propriedade será demonstrada, bem como será analisado o sinal de sen θ e cos θ para ângulos fora do intervalo $0 < \theta < 90°$.

Exercícios Resolvidos

1) Em um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, sabe-se que sen $\hat{A}$ = 0,28. Determine o valor de cos $\hat{A}$.

Solução:

$\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow (0{,}28)^2 + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow 0{,}0784 + \cos^2 \hat{A} = 1 \Rightarrow$
$\cos^2 \hat{A} = 0{,}9216 \Rightarrow \cos \hat{A} = 0{,}96$

2) Em um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, sabe-se que tg $\hat{A}$ = 2. Determine o valor de sen $\hat{A}$.

Solução:

$$\text{tg}\,\hat{A} = 2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\cos \hat{A}} = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = 2.\cos \hat{A} \Rightarrow \text{sen}^2 \hat{A} = 4.\cos^2 \hat{A} \Rightarrow$$
$$\text{sen}^2 \hat{A} = 4(1 - \text{sen}^2 \hat{A}) \Rightarrow \text{sen}^2 \hat{A} = 4 - 4.\text{sen}^2 \hat{A} \Rightarrow 5.\text{sen}^2 \hat{A} = 4 \Rightarrow$$
$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3) (FGV-09) Cada lado congruente de um triângulo isósceles mede 10 cm, e o ângulo agudo definido por esses lados mede α graus. Se sen α = 3cos α, a área desse triângulo, em cm^2, é igual a:

a) $15\sqrt{10}$ b) $12\sqrt{10}$ c) $9\sqrt{10}$ d) $15\sqrt{3}$ e) $12\sqrt{3}$

Solução:

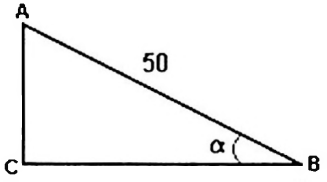
Elevando-se ao quadrado a relação fornecida entre sen α e cos α:

$\text{sen}\,\alpha = 3.\cos \alpha \Rightarrow (\text{sen}\,\alpha)^2 = (3.\cos \alpha)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 9.\cos^2 \alpha \Rightarrow$
$\text{sen}^2 \alpha = 9(1 - \text{sen}^2 \alpha) \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 9 - 9.\text{sen}^2 \alpha \Rightarrow 10.\text{sen}^2 \alpha = 9 \Rightarrow$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Logo: $S = \frac{L.L}{2}\text{sen}\,\alpha = \frac{10.10}{2}\frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow S = 15\sqrt{10}\ cm^2$

4) (Ciaba-94) No triângulo abaixo tg $\alpha = 4/3$ e AB = 50 cm, a soma das medidas de CB e AC vale:



a) 70 cm b) 60 cm c) 100 cm d) 40 cm e) $50\sqrt{3}$ cm

Solução: Alternativa A

(I) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{16}{9} \Rightarrow \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{16}{9} \Rightarrow$

$16.\cos^2\alpha = 9 - 9.\cos^2\alpha \Rightarrow 25.\cos^2\alpha = 9 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{BC}{50} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$BC = 30$ cm

(II) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3} = \dfrac{AC}{30} \Rightarrow AC = 40$ cm

Assim: $BC + AC = 30 + 40 = 70$ cm

5) (PUC/PR) Se $2.\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = 1$, então $\text{sen}\,\alpha$ vale:

a) 1 ou 1/2 b) 0 ou 3/5 c) 0 ou 4/5 d) 1 ou 4/5 e) nda

Solução: Alternativa C

Isolando $\cos\alpha$ obtém-se $\cos\alpha = 1 - 2.\text{sen}\,\alpha$

Assim, pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + (1 - 2.\text{sen}\,\alpha)^2 = 1 \Rightarrow$

$\text{sen}^2\alpha + 1 - 4.\text{sen}\,\alpha + 4\text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow 5.\text{sen}^2\alpha - 4.\text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow$

$\text{sen}\,\alpha(5.\text{sen}\,\alpha - 4) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0$ ou $\text{sen}\,\alpha = 4/5$

6) Sabendo que $9\,\text{sen}\,x + 3\sqrt{5}\cos x = 11$, com $0 < x < 90°$, determine $\text{tg}\,x$.

Solução:

Isolando sen x: $9\,\text{sen}\,x = 11 - 3\sqrt{5}\cos x$

Elevando ao quadrado: $81\,\text{sen}^2 x = 121 - 66\sqrt{5}\cos x + 45\cos^2 x \Rightarrow$

$81(1 - \cos^2 x) = 121 - 66\sqrt{5}\cos x + 45\cos^2 x \Rightarrow$

$81 - 81\cos^2 x = 121 - 66\sqrt{5}\cos x + 45\cos^2 x \Rightarrow$

$126\cos^2 x - 66\sqrt{5}\cos x + 40 = 0 \Rightarrow 63\cos^2 x - 33\sqrt{5}\cos x + 20 = 0 \Rightarrow$

$$\cos x = \frac{33\sqrt{5} \pm \sqrt{(33\sqrt{5})^2 - 4.63.20}}{126} = \frac{33\sqrt{5} \pm \sqrt{5445 - 5040}}{126} = \frac{33\sqrt{5} \pm \sqrt{405}}{126} \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{33\sqrt{5} \pm 9\sqrt{5}}{126} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ ou } \cos x = \frac{4\sqrt{5}}{21}$$

i) Caso $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ tem-se que $9\,\text{sen}\,x = 11 - 3\sqrt{5}\dfrac{\sqrt{5}}{3} = 11 - 5 = 6 \Rightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{2}{3}$

Assim: $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

ii) Caso $\cos x = \frac{4\sqrt{5}}{21}$ tem-se que $9\operatorname{sen} x = 11 - 3\sqrt{5}\frac{4\sqrt{5}}{21} = 11 - \frac{20}{7} = \frac{57}{7} \Rightarrow$

$\operatorname{sen} x = \frac{19}{21}$

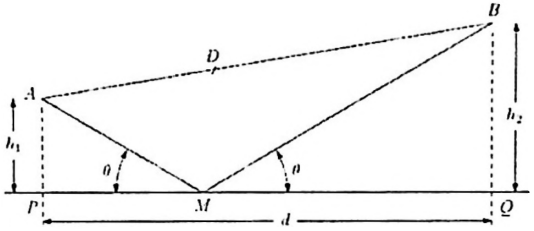
Assim: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{19}{21}}{\frac{4\sqrt{5}}{21}} = \frac{19}{4\sqrt{5}} = \frac{19\sqrt{5}}{20}$

Logo, existem dois valores possíveis para tg x: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $\frac{19\sqrt{5}}{20}$.

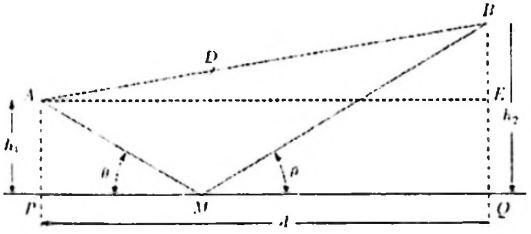
7) (IME-59) Um transmissor e um receptor de rádio estão situados a alturas h_1 e h_2, respectivamente, do solo e distantes entre si de d. A onda direta propaga-se segundo AB e a onde refletida segundo AMB, formando em M ângulos θ iguais com o plano do solo. Pedem-se:

a) Expressar a diferença de percursos AMB – AB, entre a onda refletida e a direta, em função de d, h_1 e h_2.

b) Dados θ = 30°, h_1 = 3,0 m e h_2 = 5,0 m, determinar o comprimento MD. O ponto D divide a reta AB na razão $\overline{AD} / \overline{DB} = 2/3$.



Solução:



a) $d = PM + QM = \frac{h_1}{\operatorname{tg}\theta} + \frac{h_2}{\operatorname{tg}\theta} \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{h_1 + h_2}{d}$

ΔAPM e ΔBQM são semelhantes:

$\frac{AM}{h_1} = \frac{BM}{h_2} = \frac{AM + BM}{h_1 + h_2} \Rightarrow$

$AM + BM = \frac{AM}{h_1}(h_1 + h_2) = \frac{h_1 + h_1}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h_1 + h_2}{d} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \left(\frac{h_1 + h_2}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \left(\frac{d}{h_1 + h_2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} - 1 = \left(\frac{d}{h_1 + h_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{d^2 + (h_1 + h_2)^2}{(h_1 + h_2)^2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}}$$

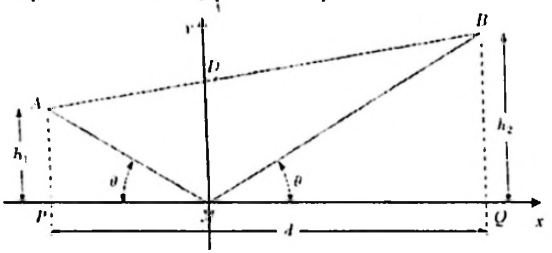
Logo, $AM + BM = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}$

Traçando AE, $E \in BQ$, paralelo a PQ conclui-se que:

$AB^2 = AE^2 + BE^2 = d^2 + (h_2 - h_1)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2}$

Assim: $AMB - AB = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2} - \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2}$

b) Considere um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais de modo que a origem esteja no ponto M, que o eixo x coincida com a reta PQ e que o eixo y seja perpendicular a PQ passando por M:



Neste sistema tem-se M(0, 0)

Em ΔAPM: $\operatorname{tg}30° = \frac{AP}{PM} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{PM} \Rightarrow PM = 3\sqrt{3}$

Em ΔBQM: $\operatorname{tg}30° = \frac{BQ}{QM} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{QM} \Rightarrow QM = 5\sqrt{3}$

Assim, segue que $A(-3\sqrt{3}, 3)$ e $B(5\sqrt{3}, 5)$.

Como o ponto D divide AB na razão de 2 para 3:

$$\frac{2}{3} = \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} \Rightarrow 2x_B - 2x_D = 3x_D - 3x_A \Rightarrow$$

$$x_D = \frac{3x_A + 2x_B}{2+3} = \frac{3(-3\sqrt{3}) + 2(5\sqrt{3})}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

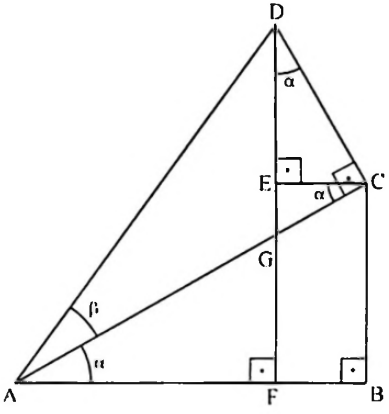
$$y_D = \frac{3y_A + 2y_B}{2+3} = \frac{3.3 + 2.5}{5} = \frac{19}{5}$$

Portanto: $MD = \sqrt{x_D^2 + y_D^2} = \sqrt{\frac{3}{25} + \frac{361}{25}} = \frac{2\sqrt{91}}{5}$

1.4. SOMA E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

1.4.1. Teorema: Se α e β são ângulos tais que $0 < \alpha < 90°$ e $0 < \beta < 90°$ então:
sen $(\alpha + \beta)$ = sen α.cos β + sen β.cos α e **cos $(\alpha + \beta)$ = cos α.cos β – sen α.sen β**
Demonstração:

Considere a construção abaixo.



Dois triângulos retângulos, ABC e ACD, são justapostos de modo que a hipotenusa AC de ΔABC coincida com o cateto AC de ΔACD, conforme a figura ao lado. Suponha que $\angle B\hat{A}C = \alpha$ e $\angle C\hat{A}D = \beta$. Seja F o pé da perpendicular traçada desde D com relação a AB. Seja E o pé da perpendicular traçada desde C com relação à DF. Suponha que G é a interseção de DF e AC.

Como AB // CE segue que $\angle A\hat{C}E = \alpha$. Além disso, tem-se que:

$\angle C\hat{D}E = 90° - \angle C\hat{G}E = \alpha$

Em ΔADF tem-se que:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}+\overline{EF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$$

Em ΔDEC observa-se que $\overline{DE} = \overline{DC}.\cos\alpha$

Em ΔABC segue que $\overline{BC} = \overline{AC}.\text{sen}\alpha$

Deste modo: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}.\cos\alpha + \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.\text{sen}\alpha$

Em ΔACD tem-se que $\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \text{sen}\beta$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \cos\beta$

Logo: sen $(\alpha + \beta)$ = sen α.cos β + sen β.cos α

Analogamente:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}-\overline{BF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.\cos\alpha - \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}.\text{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$$

1.4.2. Teorema: Se x é um ângulo tal que $0 < x < 90°$ tem-se que:

$$\textbf{sen } 2x = 2.\text{sen } x.\cos x \quad \text{e} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Demonstração:

Fazendo $\alpha = \beta = x$ nas expressões para sen $(\alpha + \beta)$ e cos $(\alpha + \beta)$ obtém-se

$$\text{sen } 2x = 2.\text{sen } x.\cos x \text{ e } \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x,$$

que são conhecidas como fórmulas de arco duplo.

Observações:

(1) Futuramente será demonstrado que as fórmulas para sen $(\alpha + \beta)$ e cos $(\alpha + \beta)$ são válidas para quaisquer ângulos α e β, não apenas para ângulos agudos.

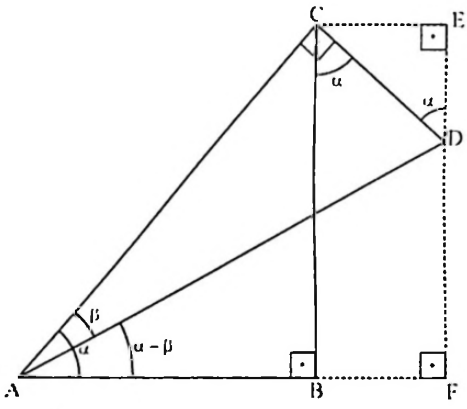
(2) Perceba que se $0 < \alpha < 90°$ e $0 < \beta < 90°$ então $0 < \alpha + \beta < 90°$, o que permite calcular o valor do seno e cosseno de arcos maiores que 90°. Contudo, estes arcos maiores que 90° não podem ser ângulos internos de um triângulo retângulo, que é o foco deste capítulo.

1.4.3. Teorema: Se α e β são ângulos tais que $0 < \beta < \alpha < 90°$ então:

$$\textbf{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha.\cos \beta - \text{sen } \beta.\cos \alpha \quad \text{e} \quad \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha.\cos \beta + \text{sen } \alpha.\text{sen } \beta$$

Demonstração:

Considere a construção abaixo.



Dois triângulos retângulos, ABC e ACD, são justapostos, de modo que a hipotenusa AC de ΔABC coincida com o cateto AC de ΔACD, conforme a figura ao lado. Suponha que $\angle B\hat{A}C = \alpha$ e $\angle C\hat{A}D = \beta$. Seja F o pé da perpendicular traçada desde D com relação ao prolongamento de AB. Seja E o pé da perpendicular traçada desde C com relação ao prolongamento de DF.

Observando apenas ΔABC conclui-se que $\angle A\hat{C}B = 90° - \alpha$.

Como $\angle B\hat{C}D = 90° - \angle A\hat{C}B$, então segue diretamente que $\angle B\hat{C}D = \alpha$.

Como BC // EF tem-se que $\angle C\hat{D}E = \alpha$.

Em ΔADF tem-se que:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF} - \overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Em ΔDEC observa-se que $\overline{DE} = \overline{DC}.\cos\alpha$

Em ΔABC segue que $\overline{BC} = \overline{AC}.\text{sen}\alpha$

Deste modo: $\text{sen}(\alpha-\beta) = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}} - \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.\text{sen}\alpha - \dfrac{\overline{DC}}{\overline{AD}}.\cos\alpha$

Em ΔACD tem-se que $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \text{sen}\beta$ e $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \cos\beta$

Logo: $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta - \text{sen}\,\beta.\cos\alpha$

Analogamente:

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.\cos\alpha + \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}.\text{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta$$

Observações:

(1) Futuramente será demonstrado que as fórmulas para $\text{sen}(\alpha-\beta)$ e $\cos(\alpha-\beta)$ são válidas para quaisquer ângulos α e β, não apenas para ângulos agudos.

(2) A restrição $\beta < \alpha$ foi imposta apenas para que $\alpha - \beta$ pertença ao intervalo $(0°, 90°)$, ou seja, que possa ser ângulo de um triângulo retângulo, que é o foco de estudo deste capítulo. Porém, a fórmula é também válida para arcos α e β tais que $\beta \geq \alpha$.

1.4.4. Teorema: Se α e β são ângulos tais que $0 < \alpha < 90°$ e $0 < \beta < 90°$ então:

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$$

Demonstração:

$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta} = \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha.\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha.\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\text{sen}\beta.\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}.\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha.\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha.\cos\beta}} - \dfrac{\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$$

Observações:

(1) Futuramente será demonstrado que a fórmula para tg $(\alpha - \beta)$ é válida para quaisquer ângulos α e β, não apenas para ângulos agudos.

(2) A restrição $\beta < \alpha$ foi imposta apenas para que $\alpha - \beta$ pertença ao intervalo $(0, 90^\circ)$, ou seja, que possa ser ângulo de um triângulo retângulo, que é o foco de estudo deste capítulo. Porém, a fórmula é também válida para arcos α e β tais que $\beta \geq \alpha$.

1.4.5. Teorema: Se α e β são ângulos tais que $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$ então:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$

Demonstração:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta-\operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta-\operatorname{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha.\cancel{\cos\beta}}-\dfrac{\operatorname{sen}\beta.\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}.\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha.\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha.\cos\beta}}+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$

(1) Futuramente será demonstrado que a fórmula para tg $(\alpha + \beta)$ é válida para quaisquer ângulos α e β, não apenas para ângulos agudos.

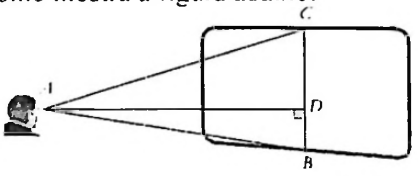
1.4.6. Teorema: Se x é um ângulo tal que $0 < x < 90^\circ$ então $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2.\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Demonstração:

Fazendo $\alpha = \beta = x$ na expressão para tg $(\alpha + \beta)$ segue diretamente que $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2.\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Exercícios Resolvidos

1) (UFPB-06) Em uma sala de cinema cuja tela é plana, o olho de um espectador vê a tela a uma distância de $10\,m$, segundo um ângulo de visão vertical $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$, como mostra a figura abaixo.



Sabendo que os segmentos de reta $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ medem, respectivamente, $2\,m$ e $1\,m$, e que $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, conclui-se que a tangente do ângulo de visão $\widehat{BAC}$ é igual a:

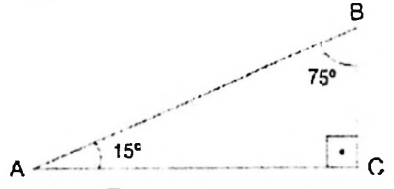
a) 1/10 b) 2/10 c) 3/10 d) 15/49 e) 25/49

Solução: Alternativa D

Sejam $x = D\hat{A}C$ e $y = B\hat{A}D$. Assim: $\operatorname{tg} x = \frac{2}{10}$ e $\operatorname{tg} y = \frac{1}{10}$.

Logo: $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y} = \dfrac{\frac{2}{10} + \frac{1}{10}}{1 - \frac{2}{10}\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{98}{100}} = \dfrac{30}{98} = \dfrac{15}{49}$

2) (UEL-10) Num triângulo retângulo ABC temos os ângulos internos $\hat{A} = 15°$ e $\hat{B} = 75°$. O valor da razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ é:



a) $2+\sqrt{3}$ b) sen 5° c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{2}+3$ e) $\frac{1}{2}$

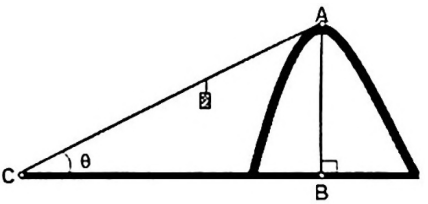
Solução: Alternativa A

A tangente de 75° pode ser calculada no triângulo fazendo o cateto oposto dividido pelo cateto adjacente:

$$\frac{AC}{BC} = tg\,75° = tg(30°+45°) = \frac{tg\,30°+tg\,45°}{1-tg\,30°.tg\,45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-1.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

3) (UEPA-08) O morro do alemão é uma das regiões mais violentas do Rio de Janeiro. Como medida de socialização dessa favela, a Prefeitura da cidade, por meio da Secretaria de Turismo, pretende instalar um Teleférico, ligando um ponto da cidade ao alto desse morro. Considerando a figura representativa abaixo que $\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$ e que $\overline{AB}$ = 720 m, o valor de $\overline{AC}$ é:



a) 1.600 m b) 1.500 m c) 1.440 m d) 1.350 m e) 1.200 m

Solução: Alternativa E

Substituindo na expressão de cos 2θ:

$$\frac{7}{25} = \cos 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta = 1 - sen^2\theta - sen^2\theta = 1 - 2.sen^2\theta \Rightarrow$$

$$2.sen^2\theta = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25} \Rightarrow sen^2\theta = \frac{9}{25} \Rightarrow sen\,\theta = \frac{3}{5}$$

No triângulo ABC: $sen\,\theta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{720}{AC} \Rightarrow AC = 1200$ m

4) (Udesc-11) No dia primeiro de janeiro de 2011, ocorrerá a cerimônia de posse do(a) novo(a) Presidente(a) da República. Um dos atos solenes desta cerimônia é a subida da rampa do Palácio do Planalto, sede do governo brasileiro que pode ser vista na Figura 3.

Figura 3: Palácio do Planalto

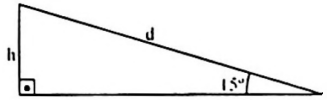
(Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Palacio_do_Planalto.JPG. acesso em 17/08/2010.)

Suponha que essa rampa possua uma elevação de 15° em relação à sua base e uma altura de $3\sqrt{2}$ m. Então o(a) novo(a) Chefe de Estado, ao subir toda a rampa presidencial, percorrerá uma distância de:

a) $6\sqrt{3}-1$ m b) $8\sqrt{3}+8$ m c) $6\sqrt{3}-2$ m

d) $6\sqrt{3}+6$ m e) $4\sqrt{3}-2$ m

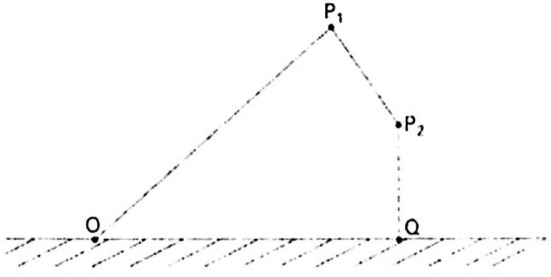
Solução: Alternativa D



$$\text{sen } 15° = \text{sen}(45° - 30°) =$$
$$= \text{sen } 45°.\cos 30° - \cos 45°.\text{sen } 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Logo: $\text{sen}15° = \frac{h}{d} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{h} \Rightarrow h = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow h = 6(\sqrt{3}+1)$ m

5) (Fuvest-13) Um guindaste, instalado em um terreno plano, tem dois braços articulados que se movem em um plano vertical, perpendicular ao plano do chão. Na figura, os pontos O, P_1 e P_2 representam, respectivamente, a articulação de um dos braços com a base, a articulação dos dois braços e a extremidade livre do guindaste. O braço OP_1 tem comprimento 6 e o braço P_1P_2 tem comprimento 2. Num dado momento, a altura de P_2 é 2, P_2 está a uma altura menor do que P_1 e a distância de O a P_2 é $2\sqrt{10}$. Sendo Q o pé da perpendicular de P_2 ao plano do chão, determine

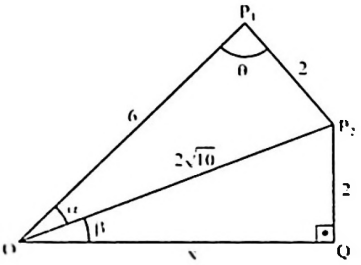


a) o seno e o cosseno do ângulo $P_2\hat{O}Q$ entre a reta OP_2 e o plano do chão;

b) a medida do ângulo $O\hat{P}_1P_2$ entre os braços do guindaste;

c) o seno do ângulo $P_1\hat{O}Q$ entre o braço OP_1 e o plano do chão.

Solução:



a) Em ΔOP_2Q: $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\overline{P_2Q}}{\overline{OP_2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} \Rightarrow$

$\cos\beta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

b) Em ΔOP_1P_2 tem-se que:

$\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2 = 36 + 4 = 40 = \overline{OP_2}^2$

Logo, conclui-se que $\theta = 90°$

c) Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔOP_2Q encontra-se $x = 6$ e assim segue que $\Delta OP_1P_2 \equiv \Delta OP_2Q$.

Deste modo tem-se que $\alpha = \beta$.

Assim: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} 2\alpha = 2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha = 2.\dfrac{\sqrt{10}}{10}.\dfrac{3\sqrt{10}}{10} = \dfrac{3}{5}$

6) (EsPCEx-06) Um triângulo tem o lado maior medindo 1 m e dois de seus ângulos são 27° e 63°. O valor aproximado para o perímetro desse triângulo, dados $\sqrt{2} = 1,4$ e $\cos 18° = 0,95$, é:

a) 1,45 m b) 2,33 m c) 2,47 m d) 3,35 m e) 3,45 m

Solução: Alternativa B

O maior lado de um triângulo retângulo sempre é sua hipotenusa.

Assim, o perímetro do triângulo é igual a:

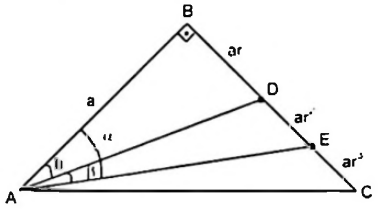
$2p = 1 + \operatorname{sen} 27° + \operatorname{sen} 63° = 1 + \operatorname{sen}(45° - 18°) + \operatorname{sen}(45° + 18°) \Rightarrow$

$2p = 1 + \operatorname{sen} 45°.\cos 18° - \cos 45°.\operatorname{sen} 18° + \operatorname{sen} 45°.\cos 18° + \cos 45°.\operatorname{sen} 18° \Rightarrow$

$2p = 1 + 2.\operatorname{sen} 45°.\cos 18° = 1 + 2.\dfrac{1,4}{2}0,95 = 2,33$ m

7) (ITA-07) Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo $E\hat{A}D$, determine tg β em função da razão r da progressão.

Solução:



Seja a = AB = BC. Como a P.G (BC, BD, DE, EC) = (a, ar, ar^2, ar^3), tem-se a figura acima, em que α e θ são as medidas dos ângulos BÂE e BÂD, respectivamente. Nos triângulos retângulos ABD e ABE, vê-se que $tg\,\theta = \frac{ar}{a} = r$ e $tg\alpha = \frac{ar + ar^2}{a} = r + r^2$.

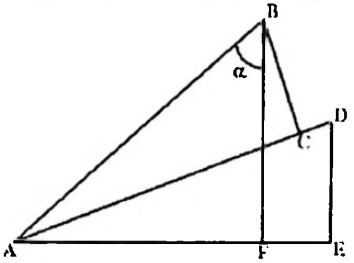
Além disso, com AB = BC, deve-se impor $r + r^2 + r^3 = 1$. Portanto:

$$tg\beta = tg(\alpha - \theta) = \frac{tg\alpha - tg\theta}{1 + tg\alpha.tg\theta} = \frac{r^2}{1 + r^2 + r^3} = \frac{r^2}{2 - r}, \text{ em que } 0 < r < 1.$$

8) (IME-01) Considere a figura abaixo, onde AB = AD = 1, BC = x, AC = y, DE = z e AE = w. Os ângulos ∠DEA, ∠BCA e ∠BFA são retos.

a) Determine o comprimento de AF e de BF em função de x, y, z e w.

b) Determine a tangente do ângulo α em função de x, y, z e w.



Solução:

a) Sejam $\theta = \angle BAC$ e $\beta = \angle DAE$. Assim, tem-se que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{BC}{AB} = x,\ \cos\theta = \frac{AC}{AB} = y,\ \text{sen}\,\beta = \frac{DE}{AD} = z \text{ e } \cos\beta = \frac{AE}{AD} = w$$

$AF = AB.\cos(\theta + \beta) = \cos\theta.\cos\beta - \text{sen}\,\theta.\text{sen}\,\beta = y.w - x.z$

$BF = AB.\text{sen}(\theta + \beta) = \text{sen}\,\theta.\cos\beta + \text{sen}\,\beta.\cos\theta = x.w + z.y$

b) $tg\,\alpha = \frac{AF}{BF} = \frac{y.w - x.z}{x.w + z.y}$

9) (ITA-01) Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então sen α é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ e) zero

Solução: Alternativa C

$\text{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0 \Rightarrow 1 - \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0 \Rightarrow$

$\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2\beta = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Como $-1 \le \cos 2\beta \le 1$, segue que $\cos 2\beta = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \beta - 1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow$

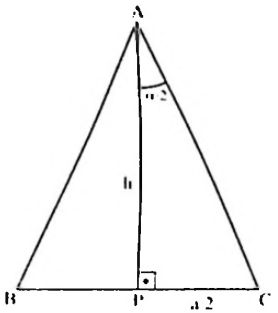
$\cos^2 \beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \overset{\cos\beta > 0}{\Rightarrow} \cos\beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$

Como α e β são os ângulos agudos de um triângulo retângulo, sen α = cos $\beta = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

10) (ITA-84) Num triângulo isósceles, a razão entre a altura referente à base e esta é $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo α oposto à base, podemos afirmar que:

a) $\alpha = \pi/4$ b) $\alpha = \pi/2$ c) $\alpha = \pi/3$ d) $\alpha = \pi/6$
e) não temos dados suficientes para determiná-lo.

Solução: Alternativa A



Seja ABC o triângulo isósceles, com A sendo o vértice oposto à base. P é o pé da altura relativa à base. Deste modo, AP é altura, bissetriz e mediana, ou seja, $\angle PAC = \alpha/2$, CP = a/2 e $\angle APC = 90^\circ$. Pelo enunciado, tem-se $\dfrac{h}{a} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. No triângulo retângulo ΔAPC:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{h} = \frac{a}{2h} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Pela expressão da tangente do arco duplo:

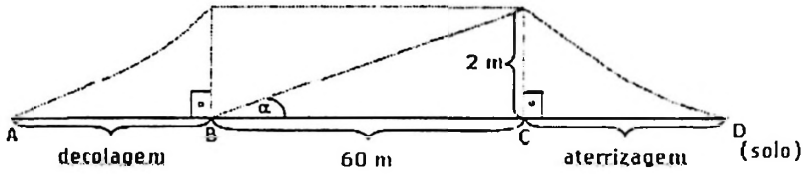
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2} = 1$$

Assim, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

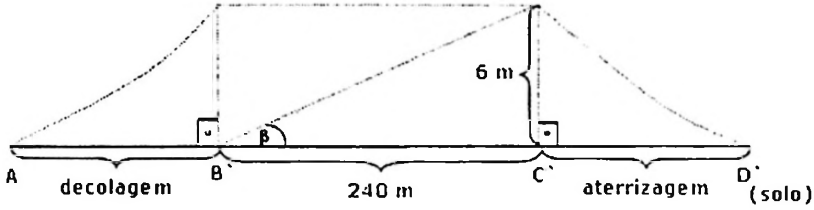
1) (UEPA-10) Santos Dumont, interessado por aparelhos mais pesados que o ar, construiu um biplano e prendeu ao dirigível Santos Dumont nº 14, batizando essa nova estrutura com nome de 14-Bis. Mesmo com as limitações tecnológicas da época, Santos Dumont voou 60 metros a uma altura de dois metros. Após grandes modificações estruturais, repete sua proeza em 23 de outubro de 1906 no campo de Bagatelle (Paris) e, sob os aplausos de todos, voou 240 metros a uma altura de 6 metros. Considerando que partiu sempre do mesmo ponto A conforme ilustram as figuras abaixo, então afirma-se que uma relação trigonométrica válida para os ângulos α e β nessas condições é:

Fonte: História da Física, Moacir Costa Ferreira – São Paulo, EDICON, 1998. (p 110); Texto adaptado.

***primeira experiência*:**



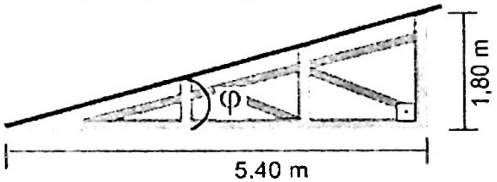
***segunda experiência*:**



a) $tg\alpha = \frac{1}{3}tg\beta$ b) $tg\alpha = \frac{2}{3}tg\beta$ c) $tg\alpha = tg\beta$

d) $tg\alpha = \frac{4}{3}tg\beta$ e) $tg\alpha = \frac{5}{3}tg\beta$

2) (UEPA-12) As construções de telhados em geral são feitas com um grau mínimo de inclinação em função do custo. Para as medidas do modelo de telhado representado a seguir, o valor do seno do ângulo agudo φ é dado por:



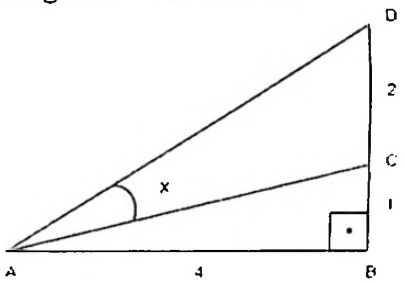
(Fonte: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/933-2.pdf. Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto adaptado)

a) $\frac{4\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{2\sqrt{2}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

3) (UEPB-10) Dado sen x = 0,6, onde x é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, o valor de cotg x.cossec x é igual a:

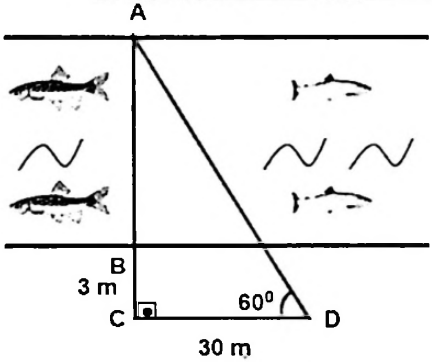
a) 3/5 b) 5/3 c) 1 d) 20/9 e) 10/9

4) (FEI-13) Na figura seguinte, AB = 4, BC = 1 e CD = 2. Calculando tg x (tangente de x), sendo x o ângulo CÂD , obtém-se:



a) tg x = 1/2 b) tg x = 8/19 c) tg x = 3/4
d) tg x = 3/7 e) tg x = 1/4

5) (PUC/PR-11) Para determinar a largura de um rio, um observador no ponto C visa um ponto fixo A na margem oposta. A partir do ponto C, ele se desloca perpendicularmente ao segmento AC percorrendo 30 m em linha reta e marca um ponto D. No ponto D, ele mede o ângulo $C\hat{D}A = 60°$, conforme figura a seguir. Sabendo que a distância BC corresponde a 3 m e considerando tg 60° = 1,7, a largura do rio mede:



A) 52 m B) 64 m C) 72 m D) 48 m E) 88 m

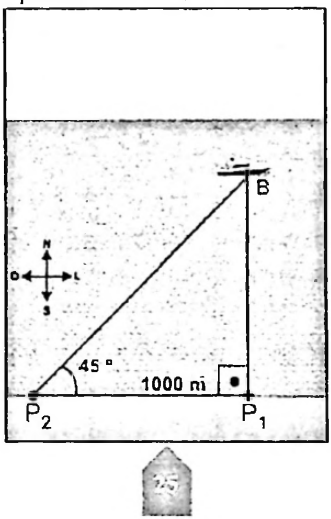
6) (UEFS-13) Uma tábua de 2,5 m é usada como rampa para subir em um palco de 1,5 m de altura. Para se reduzir em 30° o ângulo de inclinação dessa rampa, pode-se afirmar, usando $\sqrt{3} \approx 1,7$ se preciso, que será necessária uma tábua de comprimento cerca de

A) 3,3m B) 5,5m C) 8,2m D) 10,8m E) 13,6m

7) (UEFS-13) Uma casa tem um quintal em formato de triângulo retângulo, com 20 m de hipotenusa e um ângulo de 30°. Usando $\sqrt{3} \approx 1,7$ se preciso, pode-se concluir que, para colocar uma piscina quadrada nesse quintal, deixando um deck de 0,5 m em torno dela, seu lado deve ter, no máximo, cerca de

A) 3,6m B) 4,2m C) 4,7m D) 5,3m E) 5,8m

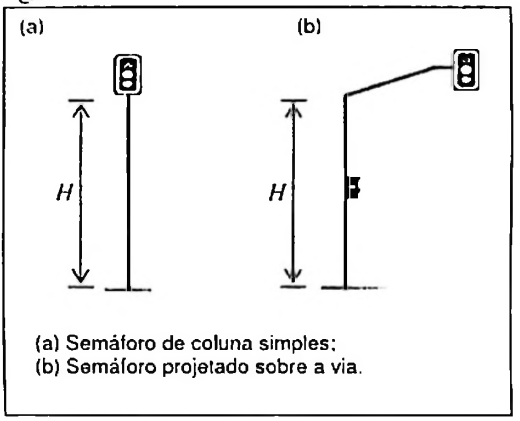
8) (UEL-11) Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1, um barco ancorado no horizonte norte na posição B. Nesta posição P_1, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90°, como mostrado na figura ao lado.



Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição P_2. Neste novo ponto de observação P_2, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45°. Qual a distância P_2B aproximadamente?

a) 1000 metros b) 1014 metros c) 1414 metros
d) 1714 metros e) 2414 metros

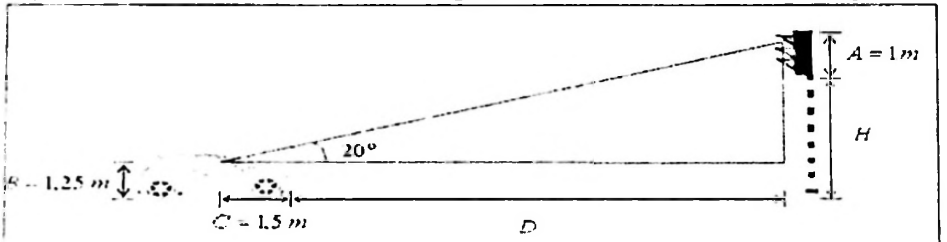
9) (Udesc-13) No site
http://www.denatran.gov.br/publicacoes/download/minuta_contran/Arquivo%206.pdf (acesso em: 23/06/2012) encontra-se o posicionamento adequado da sinalização semafórica, tanto para semáforos de coluna simples como para semáforos projetados sobre a via, conforme mostra a Figura 1.



(a) Semáforo de coluna simples;
(b) Semáforo projetado sobre a via.

Figura 1

Para que o motorista de um veículo, ao parar, possa visualizar as luzes do semáforo, o grupo focal deve ser visto sob um ângulo de 20°, conforme mostra a Figura 2.



LEGENDA:

A dimensão média da altura do grupo focal;
B altura adotada dos olhos do condutor sentado no veículo;
C distância adotada entre os olhos do condutor e a frente do veículo;
D distância mínima da linha de retenção até a projeção do grupo focal sobre o solo.

Figura 2

Considerando tg (20°) = 0,36, determine os valores que faltam para completar a Tabela 1.

Tipo de Semáforo	*D*	*H*
Coluna simples	?	2,4
Projetado sobre a via	13,1	?

Tabela 1

Analise as proposições em relação às informações obtidas na Tabela 1, e assinale (V) para
verdadeira e (F) para falsa.

( ) Para o semáforo de coluna simples, D é aproximadamente 4,5 m.

( ) Para o semáforo projetado sobre a via, H é aproximadamente 4,2 m.

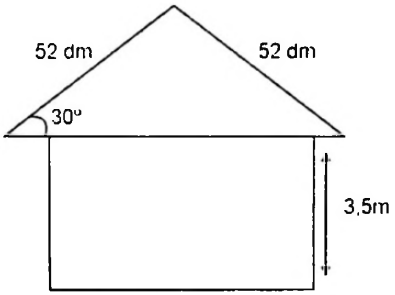
( ) A altura H do semáforo projetado sobre a via é aproximadamente 3,1 m maior que a altura H do semáforo de coluna simples.

Assinale a alternativa correta, de cima para baixo.

A. ( ) F – V – V B. ( ) V – F – V C. ( ) F – V – F

D. ( ) V – V – F E. ( ) F – F – V

10) (UEMG-12)



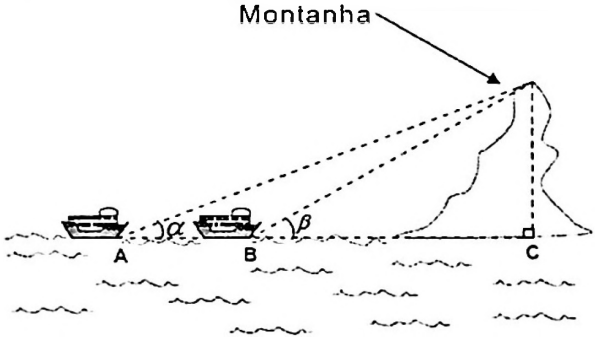
Conforme figura acima, na construção de um telhado, com inclinação de 30° em relação ao solo, foram usadas telhas ecológicas. Em cada lado da casa,foram construídos 52 dm de telhado e a altura da parede lateral da casa é de 3,5m. Considerando esses dados, conclui-se CORRETAMENTE que o ponto mais alto do telhado em relação ao solo encontra-se a uma altura de

A) 4,7 m. B) 5,4 m. C) 6,1 m. D) 6,8 m.

11) (UECE-09) No triângulo EYZ, o ângulo $\alpha = Y\hat{E}Z$ é tal que sen $\alpha = 0{,}6$. Se I é um ponto do lado EZ (entre E e Z), tal que o ângulo $Y\hat{I}Z$ é igual a 2α e se a medida do segmento EI é 50 m, então a medida, em metros, da altura do triângulo EYZ relativa ao lado EZ é

A) 42. B) 44. C) 46. D) 48.

12) (UFAM-13) De um pequeno barco (situado no ponto A), um observador enxerga o topo de uma montanha segundo um ângulo α.



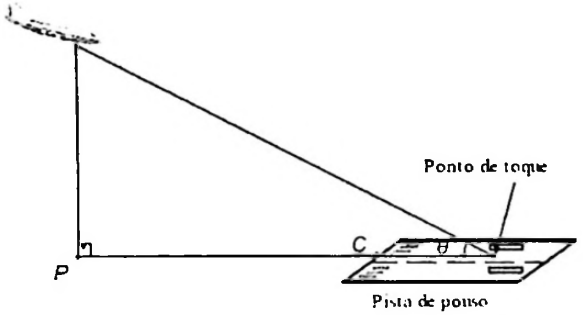
Ao aproximar-se 420 m em linha reta em direção à montanha (ponto B), passa a vê-lo segundo um ângulo β . Considerando que as dimensões do pequeno barco são desprezíveis podemos afirmar que a altura da montanha é:

Dados:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \text{sen}\,\beta = \frac{2}{\sqrt{13}};\ \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}\ \text{e}\ \text{tg}\,\beta = \frac{2}{3}.$$

a) 420m b) 640m c) 820m d) 840m e) 940m

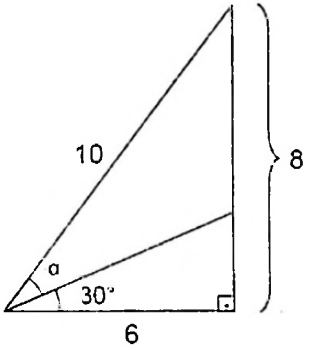
13) (UFG-09) Um avião, em procedimento de pouso, encontrava-se a 700 m de altitude, no momento em que a linha que liga o trem de pouso ao ponto de toque formava um ângulo θ com a pista de pouso, conforme a ilustração abaixo.



Para a aterrissagem, o piloto programou o ponto de toque do trem de pouso com o solo para 300 m após a cabeceira da pista, indicada por C na figura. Sabendo que sen θ = 0,28 e que o ponto P é a projeção vertical do trem de pouso no solo, a distância, em metros, do ponto P ao ponto C corresponde a

(A) 1700 (B) 2100 (C) 2200 (D) 2500 (E) 2700

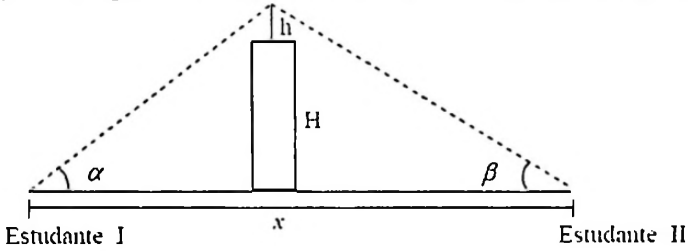
14) (UFG-12) Observe a figura a seguir, em que estão indicadas as medidas dos lados do triângulo maior e alguns dos ângulos.



O seno do ângulo indicado por α na figura vale:

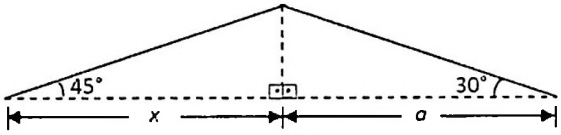
a) $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ b) $\frac{4-\sqrt{3}}{10}$ c) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ d) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

15) (UFJF-12) Dois estudantes I e II desejam medir a altura, H, de um prédio, utilizando-se de conhecimentos matemáticos. Distanciados um do outro de x metros, os estudantes fazem visadas atingindo a ponta da antena de altura h situada no topo do prédio, segundo os ângulos a e b , representados no esboço abaixo.



Obtenha a altura H da torre, em função de a , b , h e x .

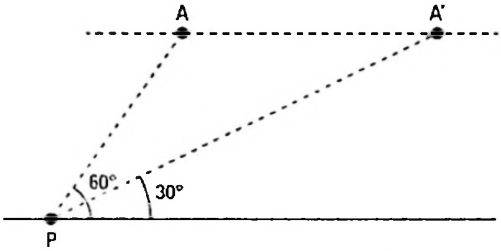
16) (UFLA-12) A expressão de x em função de a é dada por:



a) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ b) $x = \sqrt{3}a$ c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ d) $x = \sqrt{2}a$

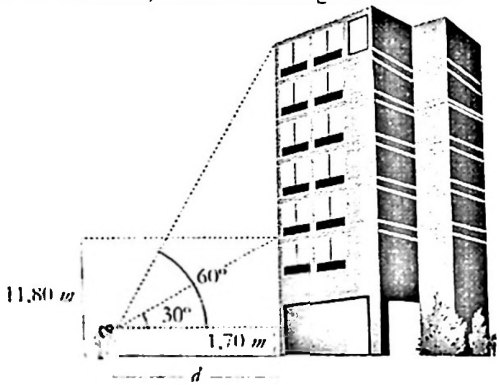
17) (ESPM-14) Um avião voava a uma altitude e velocidade constantes. Num certo instante, quando estava a 8 km de distância de um ponto P, no solo, ele podia ser

visto sob um ângulo de elevação de 60° e, dois minutos mais tarde, esse ângulo passou a valer 30°, conforme mostra a figura abaixo. A velocidade desse avião era de:



a) 180 km/h b) 240 km/h c) 120 km/h d) 150 km/h e) 200 km/h

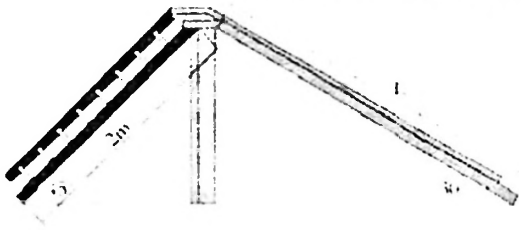
18) (UFPB-08) Em um determinado edifício, os primeiros andares são destinados às garagens e ao salão de festas e os demais andares, aos apartamentos. Interessado nas dimensões desse prédio, um topógrafo coloca um teodolito (instrumento óptico para medir ângulos horizontais e ângulos verticais) a uma distância d do prédio. Com um ângulo vertical de 30°, esse topógrafo observou que o primeiro piso de apartamentos está a uma altura de $11{,}80\,m$ do solo; e com um ângulo vertical de 60°, visualizou o topo do edifício, conforme a figura abaixo.



De acordo com esses dados e sabendo-se que a luneta do teodolito está a $1{,}70\,m$ do solo, a altura do edifício é:

a) 31 m b) 23,60 m c) 30,30 m d) 21,90 m e) 32 m

19) (UFPB-10) Em parques infantis, é comum encontrar um brinquedo, chamado escorrego, constituído de uma superfície plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças deslizam, e de uma escada que dá acesso à rampa. No parque de certa praça, há um escorrego, apoiado em um piso plano e horizontal, cuja escada tem 2m de comprimento e forma um ângulo de 45° com o piso; e a rampa forma um ângulo de 30° com o piso, conforme ilustrado na figura abaixo.



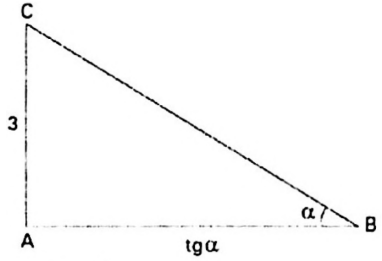
De acordo com essas informações, é correto afirmar que o comprimento (L) da rampa é de:

a) $\sqrt{2}$ m b) $2\sqrt{2}$ m c) $3\sqrt{2}$ m d) $4\sqrt{2}$ m e) $5\sqrt{2}$ m

20) (Mackenzie-77) Os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo não isósceles são raízes da equação (em x) $3.\text{tg } x + k^2.\text{cotg } x = 4k$. Então:

a) k = 1 b) $k = \sqrt{3}/3$ c) $k = \sqrt{3}$ d) k = 1/3 e) não sei

21) (Insper -06) No triângulo ABC da figura, retângulo em A, $A\hat{B}C = \alpha$, AC = 3 e AB = tg α.



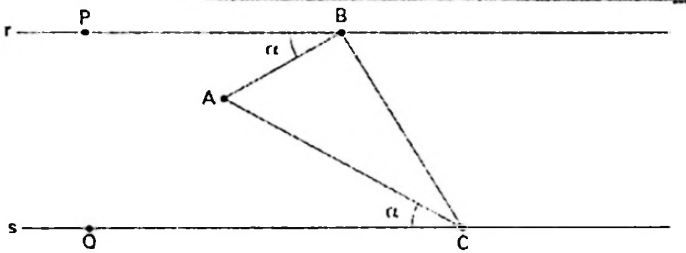
Então, o perímetro do triângulo vale

a) $\sqrt{3}+4$ b) $2\sqrt{3}+4$ c) $3\sqrt{3}+3$ d) $2\sqrt{2}+3$ e) $3\sqrt{2}+4$

22) (Insper-09) Considere dois ângulos agudos cujas medidas a e b, em graus, são tais que a + b = 90° e 4.sen a − 10.sen b = 0. Nessas condições, é correto concluir que

a) tg a = 1 e tg b = 1.
b) tg a = 4 e tg b = 1/4.
c) tg a = 1/4 e tg b = 4.
d) tg a = 2/5 e tg b = 5/2.
e) tg a = 5/2 e tg b = 2/5.

23) (Insper-11) Na figura, em que as retas r e s são paralelas, A é um ponto que dista 1 de r e 2 de s. Dada uma medida α, em graus, tal que $0 < \alpha < 90$, tomam-se os pontos B e P sobre r e C e Q sobre s tais que $m(A\hat{B}P) = m(A\hat{C}Q) = \alpha$.

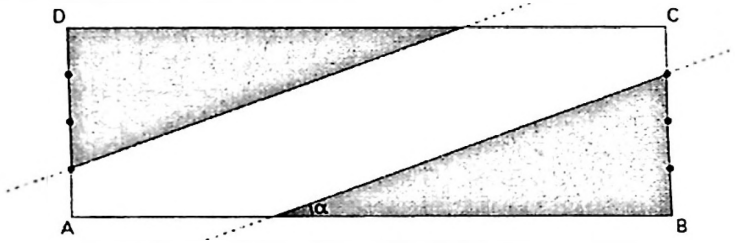


Nessas condições, a área do triângulo ABC é igual a

a) tg α. b) 2tg α. c) tg α . cotg α.

d) cotg α. e) 2cotg α.

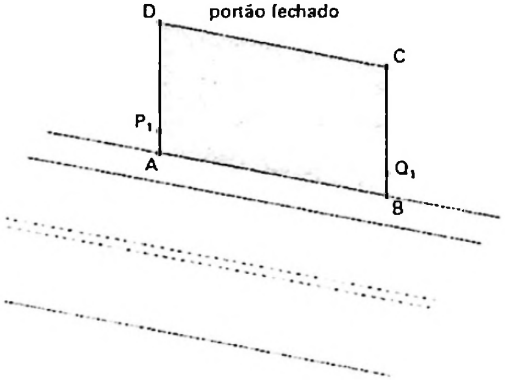
24) (Insper-12) O retângulo da figura, cuja base AB mede o triplo da altura BC, foi dividido em três regiões por meio de duas retas paralelas.



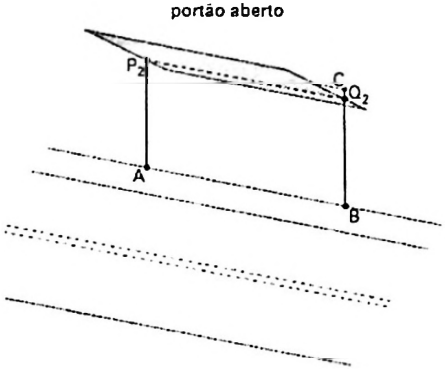
Os pontos marcados sobre os lados AD e BC dividem esses lados em quatro partes de medidas iguais. Se a área da faixa central é igual à soma das áreas dos triângulos sombreados, então o ângulo α é tal que

a) tg α = 1/4 b) tg α = 3/10 c) tg α = 1/3 d) tg α = 3/8 e) tg α = 3/5

25) (Insper-13) O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme figuras a seguir.



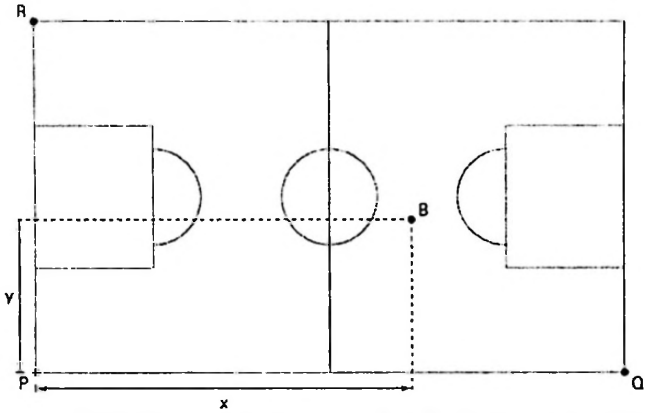
Distantes 0,5m do nível da calçada (pontos A e B), os pontos P_1 e Q_1 indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.



O portão, que tem 3m de altura, sobe e simultaneamente gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por P_2 e Q_2. Se o portão, quando totalmente aberto, deve deixar uma passagem livre de pelo menos 2m de altura, a menor distância dos pontos P_2 e Q_2 em relação ao nível da calçada, indicado pelos pontos A e B, deve ser de

a) 2,05m. b) 2,15m. c) 2,25m. d) 2,35m. e) 2,45m.

26) (Insper-13) Um empreendedor está desenvolvendo um sistema para auxiliar o julgamento de lances duvidosos em partidas de futebol. Seu projeto consiste de um chip instalado na bola e um sensor posicionado em um dos cantos do campo (ponto P).



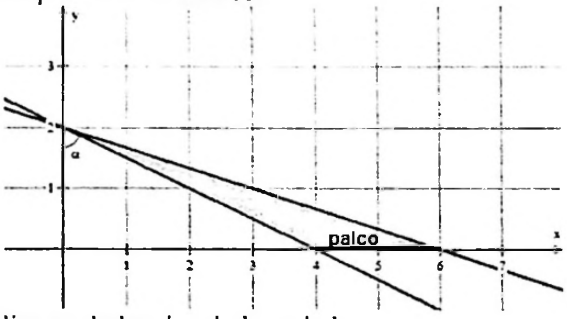
O sensor detecta a distância r entre os pontos P e B (bola) e a medida α do ângulo $B\hat{P}Q$. Em seguida, transforma essas informações nas distâncias x e y indicadas na figura. Isso pode ser feito por meio das expressões

a) $x = \frac{1}{r}\operatorname{sen}\alpha$ e $y = \frac{1}{r}\cos\alpha$ b) $x = r^2\cos\alpha$ e $y = r^2\operatorname{sen}\alpha$

c) $x = r\operatorname{sen} 2\alpha$ e $y = r\cos 2\alpha$ d) $x = r\cos\alpha$ e $y = r\operatorname{sen}\alpha$

e) $x = \frac{1}{r}\operatorname{sen} 2\alpha$ e $y = \frac{1}{r}\cos 2\alpha$

27) (Insper-16) A equipe que está preparando os efeitos de iluminação de um show a ser feito em um estádio precisa instalar um canhão de luz num ponto a 20 metros de altura em relação ao chão, no qual está posicionado um palco de 20 metros de comprimento onde o cantor irá se apresentar. Para definir o ângulo de movimentação do canhão de luz de modo que ele possa acompanhar o cantor por todo o palco, a equipe modelou o problema utilizando o plano cartesiano abaixo, no qual cada unidade equivale a 10 metros.



Se necessário, utilize os dados da tabela ao lado.

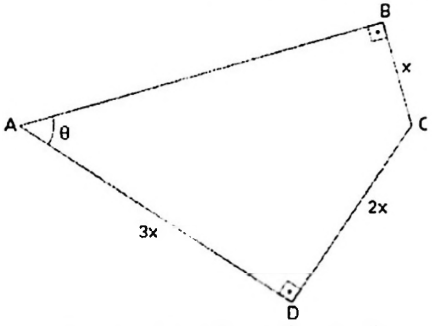
α	tg α (valores aproximados)
126°	−1,4
135°	−1,0
144°	−0,7
153°	−0,5
162°	−0,3
171°	−0,2
180°	0,0

Para que o canhão de luz possa ser posicionado apontado para o cantor em sua movimentação ao longo de toda a plataforma, o valor aproximado do ângulo α, formado pelo canhão e pelo eixo y, deve estar sempre entre

(a) 18° e 27°. (b) 27° e 36°. (c) 36° e 54°.

(d) 54° e 63°. (e) 63° e 72°.

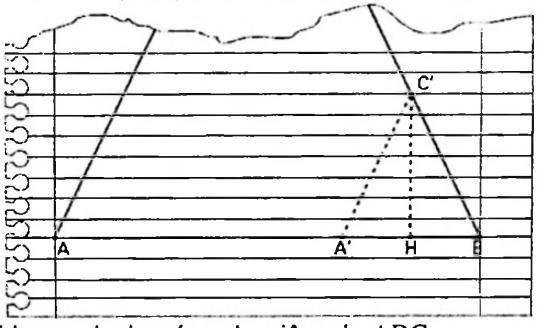
28) (FGV-09) No quadrilátero ABCD mostrado na figura ao lado, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos, BC = x, CD = 2x, AD = 3x e $\hat{A} = \theta$. Determine:



A) o comprimento dos segmentos AC e AB em função de x.
B) o valor de sen θ.

29) (FGV-09) Um estudante tinha de calcular a área do triângulo ABC, mas um pedaço da folha do caderno rasgou-se. Ele, então, traçou o segmento A'C' paralelo a AC, a altura C'H do triângulo A'BC' e, com uma régua, obteve estas medidas:

C'H = 1,2cm, A'B = 1,4cm e AB = 4,2cm.



A) Use essas medidas e calcule a área do triângulo ABC.
B) Com a régua, ele mediu também o lado A'C' e obteve A'C' = 1,5cm.
Se as medidas em graus dos ângulos agudos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são respectivamente a e b, calcule o valor de sen(a – b).

30) (FGV-10) Seja ABC um triângulo retângulo em B tal que $AC = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ e BP = 3, onde BP é a altura do triângulo ABC pelo vértice B. A menor medida possível do ângulo $A\hat{C}B$ tem aproximação inteira igual a

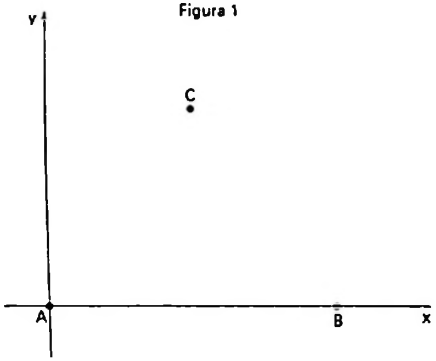
Dado:

$tg\alpha$	*valor aproximado de α em graus*
$\frac{\sqrt{2}}{3}$	*25,2°*
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	*35,3°*
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*40,9°*
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	*43,3°*
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	*49,1°*

A) 25°. B) 35°. C) 41°. D) 43°. E) 49°.

31) (FGV-12) Um funcionário do setor de planejamento de uma distribuidora de materiais escolares verifica que as lojas dos seus três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A(0, 0), B(6, 0) e C(3, 4). Todas as unidades são dadas em quilômetros.

Figura 1



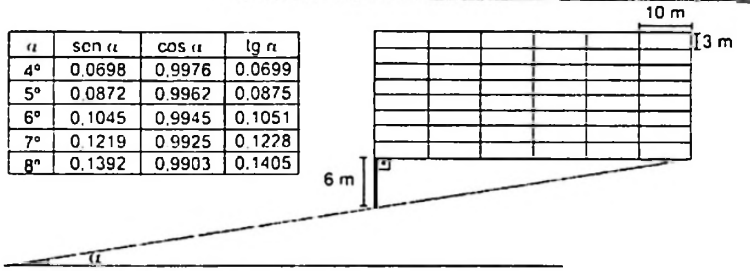
Sejam a, b e c as medidas dos ângulos internos de vértices A, B e C, respectivamente, do triângulo ABC.

a) Calcule o valor de tg (2a).

b) Qual é o valor da soma cos (a – b) + cos 2c?

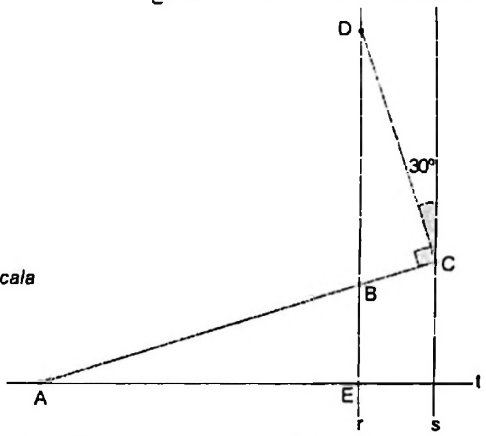
32) (FGV-15) Um edifício comercial tem 48 salas, distribuídas em 8 andares, conforme indica a figura. O edifício foi feito em um terreno cuja inclinação em relação à horizontal mede α graus. A altura de cada sala é 3 m, a extensão 10 m, e a altura da pilastra de sustentação, que mantém o edifício na horizontal, é 6 m.

α	sen α	cos α	tg α
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405



Usando os dados da tabela, a melhor aproximação inteira para α é
(A) 4° (B) 5° (C) 6° (D) 7° (E) 8°

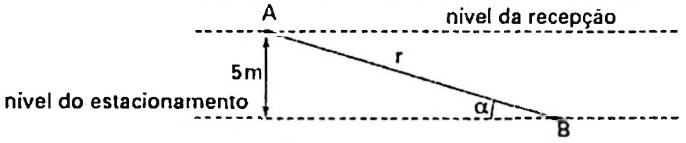
33) (FGV-16) Na figura seguinte, as retas r e s são paralelas entre si, e perpendiculares à reta t. Sabe-se, ainda, que AB = 6 cm, CD = 3 cm, AC é perpendicular a CD, e a medida do ângulo entre CD e a reta s é 30°.



Fora de escala

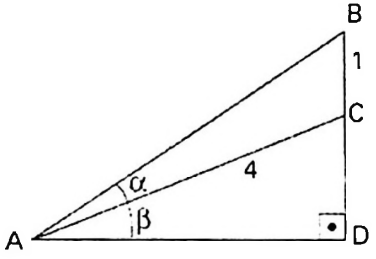
Nas condições descritas, a medida de DE, em cm, é igual a
a) $12+3\sqrt{3}$ b) $12+2\sqrt{3}$ c) $6+4\sqrt{3}$
d) $6+2\sqrt{3}$ e) $3+2\sqrt{3}$

34) (Unesp-12) Um prédio hospitalar está sendo construído em um terreno declivoso. Para otimizar a construção, o arquiteto responsável idealizou o estacionamento no subsolo do prédio, com entrada pela rua dos fundos do terreno. A recepção do hospital está 5 metros acima do nível do estacionamento, sendo necessária a construção de uma rampa retilínea de acesso para os pacientes com dificuldades de locomoção. A figura representa esquematicamente esta rampa (r), ligando o ponto A, no piso da recepção, ao ponto B, no piso do estacionamento, a qual deve ter uma inclinação α mínima de 30° e máxima de 45°.



Nestas condições e considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, quais deverão ser os valores máximo e mínimo, em metros, do comprimento desta rampa de acesso?

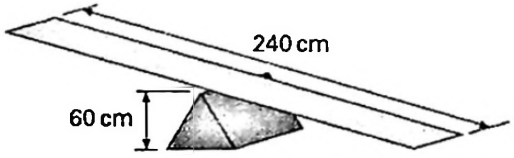
35) (UFSCar-04) Na figura, ADB é reto, $B\hat{A}C = \alpha$, $C\hat{A}D = \beta$, AC = 4dm e BC = 1dm.



Sabendo que $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, o valor de sen α é

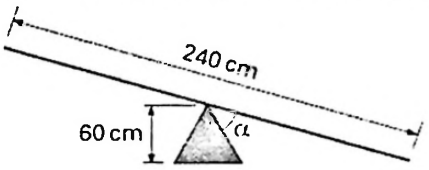
a) 2/3 b) 3/5 c) 2/5 d) 1/5 e) 1/6

36) (Unicamp-11) Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.

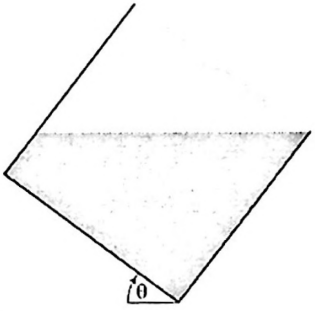


a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra está a 20cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.

b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo α formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida abaixo.



37) (Unicamp-13) Um recipiente cúbico de aresta α e sem tampa, apoiado em um plano horizontal, contém água até a altura $3a/4$. Inclina-se lentamente o cubo, girando-o em um ângulo θ em torno de uma das arestas da base, como está representado na figura abaixo.



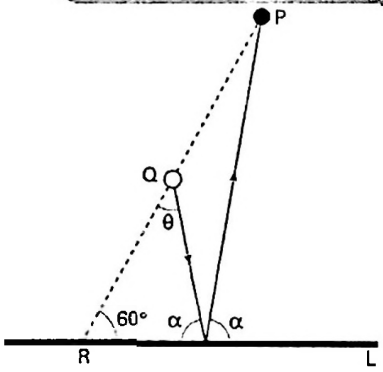
a) Supondo que o giro é interrompido exatamente antes de a água começar a derramar, determine a tangente do ângulo θ.
b) Considerando, agora, a inclinação tal que $\tan(\theta) = 1/4$, com $0 < \theta < \pi/2$, calcule o valor numérico da expressão $\cos(2\theta) - \text{sen}(2\theta)$.

38) (Fuvest-13) Um caminhão sobe uma ladeira com inclinação de 15°. A diferença entre a altura final e a altura inicial de um ponto determinado do caminhão, depois de percorridos 100 m da ladeira, será de, aproximadamente,

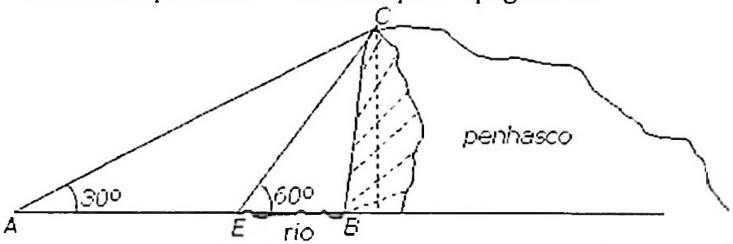
Dados: $\sqrt{3} \cong 1,73$ e $\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$

a) 7m b) 26m c) 40m d) 52m e) 67m

39) (Fuvest-14) Uma bola branca está posicionada no ponto Q de uma mesa de bilhar retangular, e uma bola preta, no ponto P, conforme a figura ao lado. A reta determinada por P e Q intersecta o lado L da mesa no ponto R. Além disso, Q é o ponto médio do segmento PR, e o ângulo agudo formado por PR e L mede 60°. A bola branca atinge a preta, após ser refletida pelo lado L. Sua trajetória, ao partir de Q, forma um ângulo agudo θ com o segmento PR e o mesmo ângulo agudo α com o lado L antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.

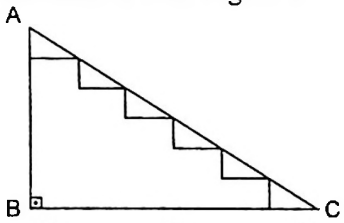


40) (EsPCEx-05) Um topógrafo, querendo conhecer a altura de um penhasco, mediu a distância do ponto A até a beira do rio (ponto E), obtendo 20 metros. A largura do rio (EB) é desconhecida. A figura abaixo mostra os ângulos $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{E}C = 60°$. A altura do penhasco encontrada pelo topógrafo foi



a) $15\sqrt{3}$ m b) $12\sqrt{3}$ m c) $10\sqrt{3}$ m d) $20\sqrt{3}$ m e) $40\sqrt{3}$ m

41) (Ciaba-03) Uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão, além da mesma altura, está representada na figura acima, vista de perfil. Se AB = 2m e $B\hat{C}A = 30°$, a medida da extensão de cada degrau é:



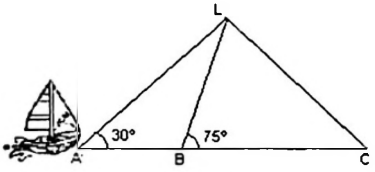
a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

42) (Ciaba-00) Um navio que navega em linha reta em relação a um farol, o avista sob um ângulo de 60° com o horizonte. Afastando-se do farol mais $30\,m$, passa a vê-lo sob um ângulo de 45°. Então, a altura provável do farol é:

(A) $30\left(\sqrt{3}+1\right)$ m (B) $10\left(15+\sqrt{3}\right)$ m (C) $15\left(3+\sqrt{3}\right)$ m

(D) $15\left(\sqrt{3}+1\right)$ m (E) $15\left(10+\sqrt{3}\right)$ m

43) (Ciaba-08) Um navio, ao navegar em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B, C. O Comandante, quando o navio está em A, observa o farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. De acordo com a representação abaixo, a distância do farol ao ponto B é



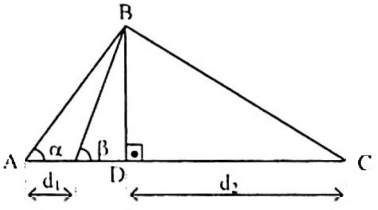
a) $8\sqrt{11}$ milhas b) $2\sqrt{2}$ milhas c) $3\sqrt{3}$ milhas

d) $6\sqrt{5}$ milhas e) $7\sqrt{3}$ milhas

44) (Ciaba-09) Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como P_1P_2 sendo 63 metros, o ângulo $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\hat{P}_2P_1 = \beta$, tg $\alpha = 2$ e tg $\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

(A) 83 (B) 84 (C) 85 (D) 86 (E) 87

45) (Escola Naval-06) Considere a figura abaixo:



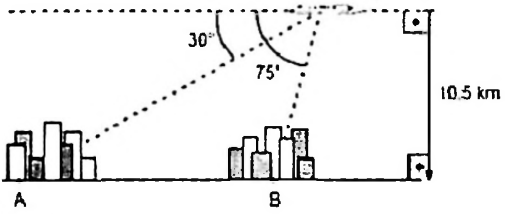
A área do triângulo BDC é:

a) $\dfrac{d_1 + d_2}{\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta}$ b) $\dfrac{d_1.d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)}$ c) $\dfrac{d_1 + d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta)}$

d) $\dfrac{d_1.d_2}{2\,\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta}$ e) $\dfrac{d_1.d_2}{2(\text{cotg}\,\alpha - \text{cotg}\,\beta)}$

46) (AFA-04) Um passageiro em um avião voando a 10,5 km de altura avista duas cidades à esquerda da aeronave. Os ângulos de depressão em relação às cidades são

30° e 75° conforme a figura abaixo. A distância, em km, entre os prédios A e B situados nessas cidades é igual a



a) $21(\sqrt{3}-1)$ b) $\frac{21}{2}(\sqrt{3}-1)$ c) $\frac{21}{2}\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}-1$

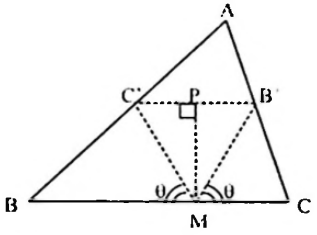
47) (ITA-95) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura H. Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ, a atinge a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:

a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$ b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$ c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$

d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$ e) $H = hd^2/(d^2 + h^2)$

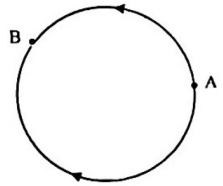
48) (IME-51) Dois dos catetos de um triângulo retângulo são: $a = 4\sqrt{3}$ m e $b = 4$ m. Determinar os valores das linhas trigonométricas naturais referentes ao ângulo oposto ao lado a.

49) (IME-95) Seja ABC um triângulo qualquer. Por B' e C' pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, traçam-se duas retas que se cortam em um ponto M, situado sobre o lado BC, e que fazem com esse lado ângulos iguais θ conforme a figura abaixo. Demonstre que: $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\hat{B}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{C}}\right)$



Ciclo Trigonométrico e Identidades

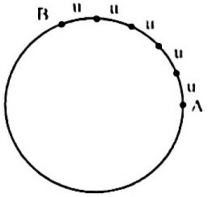
2.1. MEDIDAS DE ARCOS



Considere uma circunferência. Sobre esta circunferência tome dois pontos A e B, conforme indicado na figura. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma denominada de arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$.

Perceba que a simples simbologia $\overset{\frown}{AB}$ não determina o arco, sendo necessário designar um sentido de medida, horário ou anti-horário, de modo a especificar qual dos dois arcos em que a circunferência ficou dividida é realmente o arco $\overset{\frown}{AB}$ desejado.

Observação: Se os pontos A e B coincidirem a circunferência fica dividida em dois arcos, um de comprimento nulo (denominado de arco nulo) e outro coincidindo com a circunferência original (denominado de arco completo ou arco de uma volta).

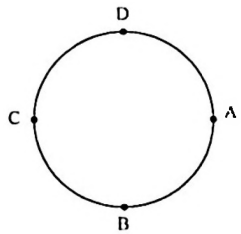


De modo a calcular a medida do arco de circunferência, deve-se determinar sobre a circunferência uma unidade fundamental de medida e calcular a quantidade destas unidades de medidas que estão contidas no arco. Por exemplo, na figura ao lado definiu-se a unidade de medida u. Perceba que no arco $\overset{\frown}{AB}$ destacado na figura existem exatamente 5 unidades u, fazendo com que $\overset{\frown}{AB} = 5$ u.

2.1.1. Unidades

2.1.1.1. Grau

Tome uma circunferência e a divida em 360 partes iguais. Um grau (simbolizado por °) é igual a medida de cada um destes arcos menores em que a circunferência fica dividida. Em outros termos, 1° (um grau) é igual a medida de $\frac{1}{360}$ de um arco completo. Deste modo, um arco completo possui 360°.



Por exemplo, considere que os pontos A, B, C e D dividem uma circunferência em 4 partes iguais. Assim, cada um dos menores arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DA}$ vale $\frac{360°}{4} = 90°$.

As subunidades de grau são minutos (') e segundos (''), de modo que 60 minutos é igual a um grau e que 60 segundos é igual a 1 minuto:

$$1^\circ = 60' \quad e \quad 1' = 60''$$

Por exemplo:

$6{,}625^\circ = 6^\circ + 0{,}625^\circ = 6^\circ + 60.0{,}625' = 6^\circ\ 37{,}5' = 6^\circ\ 37' + 0{,}5' =$
$= 6^\circ\ 37' + 60.0{,}5'' = 6^\circ\ 37'\ 30''$

No volume 0 desta coleção existe um capítulo sobre **Sistema de Medidas**, onde está detalhado o cálculo e as devidas conversões de um ângulo em graus, minutos e segundos.

2.1.1.2. Radiano

Um **radiano** (1 rad) é o ângulo definido em uma circunferência por um arco com o mesmo comprimento que o raio da referida circunferência. É possível demonstrar que em uma circunferência existe 2π (aproximadamente 6,28318531) radianos em um arco completo. No volume 2 desta coleção, no capítulo sobre **Introdução aos Círculos**, existe um texto explicando melhor o cálculo do comprimento de uma circunferência.

Não existem subunidades de radianos, devendo ser usado o sistema decimal para designar frações das medidas de arcos medidas em radianos. Por exemplo, $\frac{59}{16}$ rad = 3,6875 rad.

2.1.2. Conversão entre unidades

Das definições de grau e radianos é possível identificar uma relação linear entre ambas. Assim, para fazer a conversão basta resolver uma regra de 3 simples. Para converter um ângulo conhecido θ, com medida dada em graus, para radianos deve-se proceder da seguinte maneira:

Graus	Radianos	
180°	π	
θ	x	$x = \frac{\theta}{180^\circ}\pi$ rad (θ em graus)

Para converter de radianos para graus:

Graus	Radianos	
180°	π	
x	θ	$x = \frac{\theta}{\pi}180^\circ$ (θ em radianos)

Observação: No caso da conversão de graus para radianos, se o ângulo fornecido não for um número inteiro em graus, inicialmente será necessário convertê-lo para minutos. Se o referido ângulo não for um número inteiro em minutos, será necessário convertê-lo para segundos. Neste caso, a 1ª coluna da regra de 3 será dos ângulos em minutos ou segundos, onde também será necessário converter 180° em minutos ou segundos, dependendo do caso.

Exercícios Resolvidos

1) Converter em radianos os seguintes ângulos:
a) 60°
b) 115°
c) 11° 15'
d) 2° 48' 45"

Solução:

a) $x = \frac{\theta}{180^\circ}\pi = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

b) $x = \frac{\theta}{180^\circ}\pi = \frac{115^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{23\pi}{36}$ rad

c) 11° 15' = 11.60' + 15' = 660' + 15' = 675'
Sabe-se também que 180° = 180.60' = 10800'

Minutos	Radianos	
10800	π	
675	x	$x = \frac{675}{10800}\pi = \frac{\pi}{16}$ rad

d) 2° 48' 45" = 2.60' + 48.60" + 45" = 120' + 2880" + 45" = 120.60" + 2925" =
= 7200" + 2925"= 10125"
Sabe-se também que 180° = 180.60' = 10800' = 10800.60" = 648000"

Segundos	Radianos	
648000	π	
10125	x	$x = \frac{10125}{648000}\pi = \frac{\pi}{64}$ rad

2) Converter em graus os seguintes ângulos:

a) $\frac{3\pi}{2}$ rad

b) $0{,}9375\pi$ rad

c) $\frac{11\pi}{96}$ rad

d) $\frac{3\pi}{7}$ rad (aproximadamente)

Solução:

a) $x = \frac{180}{\pi}\theta = \frac{180}{\pi}\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

b) $x = \frac{180}{\pi}\theta = \frac{180}{\pi}0{,}9375\pi = 168{,}75^\circ = 168^\circ + 0{,}75.60' = 168^\circ\ 45'$

c) $x = \frac{180}{\pi}\theta = \frac{180}{\pi}\frac{11\pi}{96} = 20{,}625^\circ = 20^\circ + 0{,}625.60' = 20^\circ\ 37{,}5' = 20^\circ\ 37' + 0{,}5.60'' =$
$= 20^\circ\ 37'\ 30''$

d) $x = \frac{180}{\pi}\theta = \frac{180}{\pi}\frac{3\pi}{7} = 77{,}142857...^\circ = 77^\circ + (0{,}142857...).60' =$
$= 77^\circ + 8{,}571428...' = 77^\circ\ 8'\ (0{,}571428).60'' = 77^\circ\ 8'\ 34{,}2857...'' \cong 77^\circ\ 8'\ 34''$

3) Converter, em valor aproximado, 1 rad em graus.

Solução:

$x = \frac{180}{\pi}0 \cong \frac{180}{3{,}14159265}.1 \cong 57{,}29578^\circ = 57^\circ + 0{,}29578.60' = 57^\circ\ 17{,}7468' =$
$57^\circ\ 17' + 0{,}7468.60'' = 57^\circ\ 17'\ 44{,}808'' \cong 57^\circ\ 17'\ 45''$

2.2. CICLO TRIGONOMÉTRICO

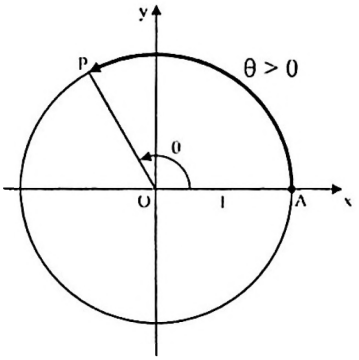
Considere um sistema de eixos cartesianos xOy. Suponha que λ é uma circunferência de raio igual a 1 centrada na origem O. Perceba que o comprimento desta circunferência é 2π. A é o ponto onde λ intercepta o eixo x. A partir deste ponto A todos os arcos são medidos ao longo de λ.

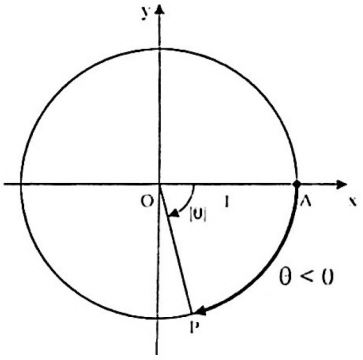
Seja $f(\theta)$ uma função que associa para cada θ um ponto P na circunferência de modo que:

(1) Se $\theta = 0$ o ponto P coincide com o ponto A.

(2) Se $\theta > 0$, a partir do ponto A e no sentido anti horário, é contado um arco de comprimento θ. O ponto P é o outro extremo deste arco.

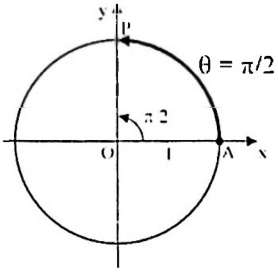
(3) Se $\theta < 0$, a partir do ponto A e no sentido horário, é contado um arco de comprimento $|\theta|$. O ponto P é o outro extremo deste arco.

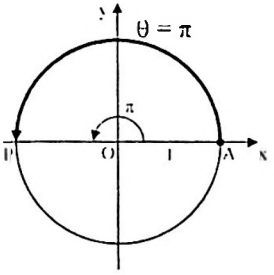


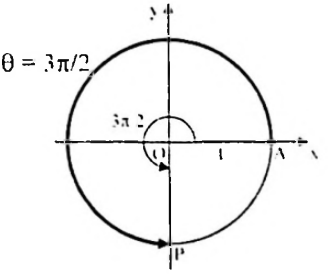


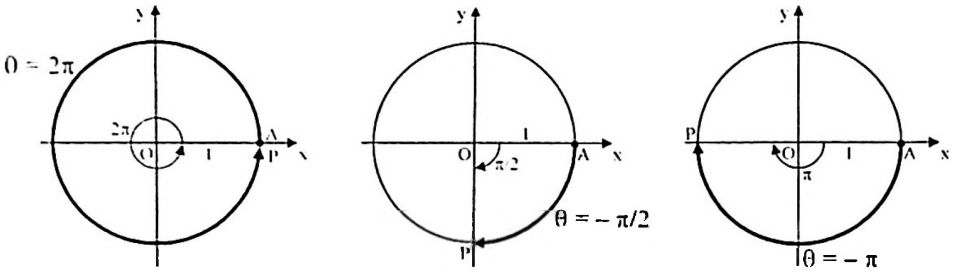
Afirma-se que o ponto P é a imagem de θ pela função f. Quando a função f é associada a uma circunferência λ de raio unitário, afirma-se que λ é o **ciclo trigonométrico.**

Como o raio da circunferência é igual a 1, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$, em unidades de comprimento, é igual ao valor do ângulo central θ, em radianos. Assim, é possível identificar a posição de P para determinados valores de θ.





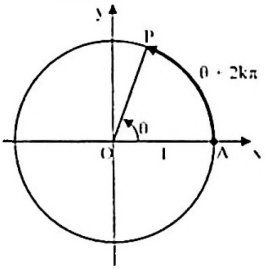




Perceba que a função f é uma função periódica, uma vez que

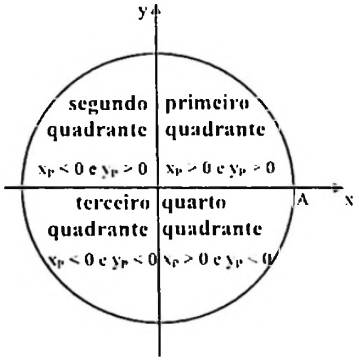
$$f(\theta) = f(\theta \pm 2\pi) = f(\theta \pm 4\pi) = f(\theta \pm 6\pi) = \ldots = f(\theta \pm 2k\pi),\ k \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, caso dois arcos θ_1 e θ_2 sejam tais que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, segue que θ_1 e θ_2 possuem a mesma imagem pela função f. Neste caso, θ_1 e θ_2 são denominados de **arcos côngruos**. Assim, qualquer ponto P no ciclo trigonométrico é a imagem de infinitos arcos, todos côngruos entre si.



Todos os arcos da forma $\theta \pm 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, θ positivo ou negativo, são associados ao mesmo ponto P no ciclo trigonométrico.

Os eixos x e y dividem o ciclo trigonométrico em quatro setores, denominados de quadrantes, conforme ilustrado na figura. Em cada quadrante é possível identificar o sinal das coordenadas do ponto P.



Assim, pode-se afirmar que:

(1) x está no primeiro quadrante se e somente se $0 + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

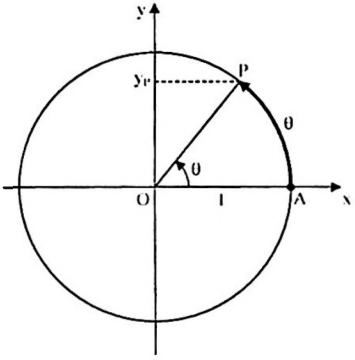
(2) x está no segundo quadrante se e somente se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi$

(3) x está no terceiro quadrante se e somente se $\pi + 2k\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

(4) x está no quarto quadrante se e somente se $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2\pi + 2k\pi$

onde k é um número inteiro.

2.2.1. Seno de um arco



Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função seno (simbolicamente designada por *sen*) de um arco θ como f: IR→IR que associa a cada θ a ordenada do ponto P:

$$f(\theta) = \text{sen } \theta = y_P$$

Em relação a esta definição algumas observações importantes podem ser destacadas:

(1) A imagem da função seno é o intervalo [– 1, 1], ou seja, $-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1$ para todo arco θ.

(2) $\text{sen } \theta > 0$ para θ pertencente ao primeiro ou segundo quadrantes e $\text{sen } \theta < 0$ para θ pertencente ao terceiro ou quarto quadrantes.

(3) $\text{sen } \theta = 0$ para $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

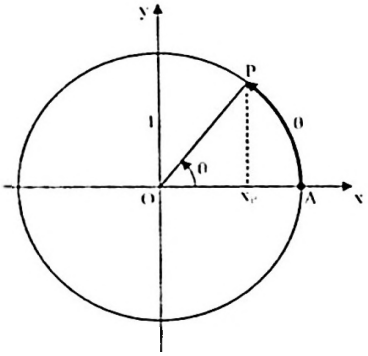
(4) $\text{sen } \theta = 1$ para $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(5) $\text{sen } \theta = -1$ para $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(6) A função $f(\theta) = \text{sen } \theta$ é periódica de período 2π:

$$\text{sen } \theta = \text{sen } (\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

2.2.2. Cosseno de um arco



Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento θ. Define-se a função cosseno (simbolicamente designada por *cos*) de um arco θ como f: IR→IR que associa a cada θ a abscissa do ponto P:

$$f(\theta) = \cos\theta = x_P$$

Em relação a este definição algumas observações importantes podem ser destacadas:

(1) A imagem da função cosseno é o intervalo [– 1, 1], ou seja, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ para todo arco θ.

(2) $\cos\theta > 0$ para θ pertencente ao primeiro ou quarto quadrantes e $\cos\theta < 0$ para θ pertencente ao segundo ou terceiro quadrantes.

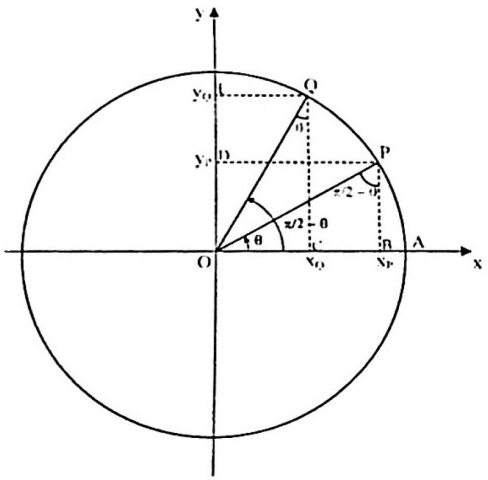
(3) $\cos\theta = 0$ para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) $\cos\theta = 1$ para $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(5) $\cos\theta = -1$ para $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(6) A função $f(\theta) = \cos\theta$ é periódica de período 2π:

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$



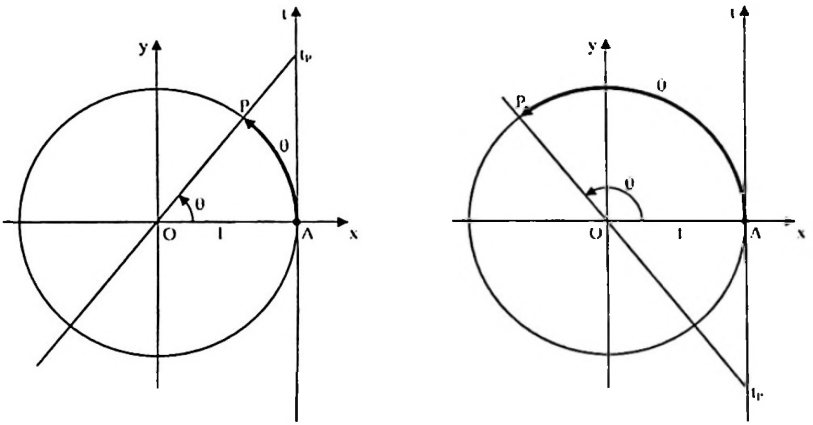
Em um ciclo trigonométrico sejam os pontos P e Q, imagens de θ e $\pi/2 - \theta$, respectivamente. Os pontos B, C, D e E são as projeções de P e Q sobre os eixos x e y, conforme a figura. Perceba que os triângulos OPB e OQC são congruentes. Logo:

$$\overline{OC} = \overline{PB} \Rightarrow x_Q = y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\overline{QC} = \overline{OB} \Rightarrow y_Q = x_P \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

2.2.3. Tangente de um arco

Considere um eixo t, com origem em A e paralelo ao eixo y. Esse eixo é conhecido como **eixo das tangentes**. O ponto P é a imagem do arco θ sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo t em um ponto de posição t_P.



A função tangente é definida como $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ que associa a cada θ a posição t_P sobre o eixo das tangentes. Simbolicamente adota-se *tg* ou *tan* ou *tag*. Assim, pode-se afirmar que:

$$f(\theta) = \text{tg}\ \theta = t_P$$

Note que para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a reta OP é paralela ao eixo das tangentes, não interceptando-a. Por esse motivo a função tangente não é definida para $0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Propriedades

(1) A imagem da função tangente é IR.

(2) tg θ > 0 para θ pertencente ao primeiro ou terceiro quadrantes.

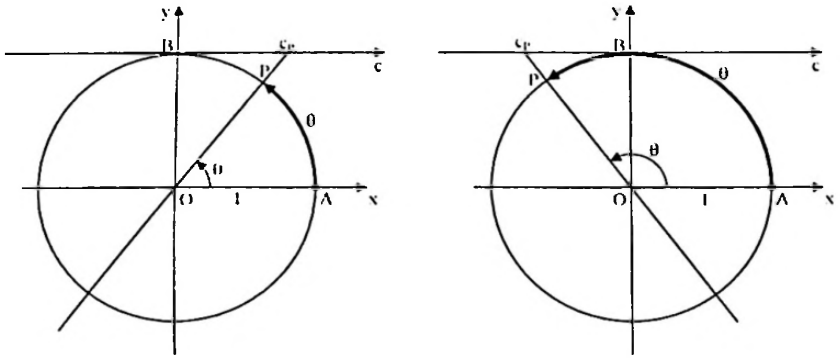
(3) tg θ < 0 para θ pertencente ao segundo ou quarto quadrantes.

(4) A função tangente é periódica de período π. De fato, determina-se a mesma reta OT para os arcos θ e θ + kπ:

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ (\theta + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

2.2.4. Cotangente de um arco

Considere um eixo c, com origem no ponto B, paralelo ao eixo x e tangente ao ciclo trigonométrico. Esse eixo é conhecido como **eixo das cotangentes**. O ponto P é a imagem do arco θ sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo c em um ponto de posição c_p.



A função cotangente é definida como $f: \mathbb{R} - k\pi \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada θ a posição c_p sobre o eixo das cotangentes. Simbolicamente adota-se *cot* ou *cotg* ou *cotan*. Assim, pode-se afirmar que:

$$f(\theta) = \text{cotg } \theta = c_p$$

Note que para $\theta = k\pi$ a reta OP é paralela ao eixo das cotangentes, não interceptando-a. Por esse motivo a função cotangente não é definida para $\theta = k\pi$.

Propriedades

(1) A imagem da função cotangente é IR.

(2) $\text{cotg } \theta > 0$ para θ pertencente ao primeiro ou terceiro quadrantes.

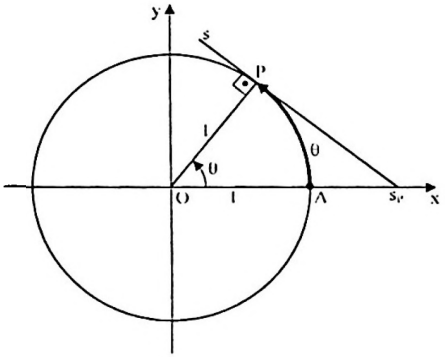
(3) $\text{cotg } \theta < 0$ para θ pertencente ao segundo ou quarto quadrantes.

(4) A função cotangente é periódica de período π. De fato, determina-se a mesma reta OT para os arcos θ e $\theta + k\pi$:

$$\textbf{cotg } \theta = \textbf{cotg } (\theta + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

2.2.5. Secante de um arco

Suponha que o ponto P é a imagem de um arco θ sobre a circunferência trigonométrica. A reta s é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja s_P a posição do ponto que é interseção da reta s com o eixo x.



A função secante é definida como $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ que associa a cada θ a posição s_P sobre o eixo x. Simbolicamente adota-se *sec*. Assim, pode-se afirmar que:

$$f(\theta) = \sec \theta = s_P$$

Note que para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ a reta tangente ao ciclo trigonométrico em P é paralela ao eixo x, não interceptando-a. Por esse motivo a função secante não é definida para $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Propriedades

(1) A imagem da função secante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$.

(2) $\sec \theta > 0$ para θ pertencente ao primeiro ou quarto quadrantes.

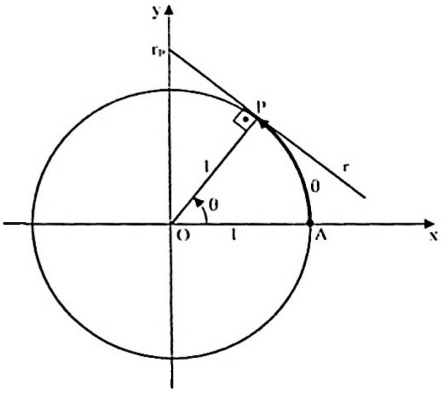
(3) $\sec \theta < 0$ para θ pertencente ao segundo ou terceiro quadrantes.

(4) A função secante é periódica de período 2π. De fato, determina-se a mesma reta tangente ao ciclo trigonométrico em P para os arcos θ e $\theta + 2k\pi$:

$$\sec \theta = \sec (\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

2.2.6. Cossecante de um arco

Suponha que o ponto P é a imagem de um arco θ sobre a circunferência trigonométrica. A reta r é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja r_P a posição do ponto que é interseção da reta s com o eixo y.



A função cossecante é definida como $f:\mathbb{R} - k\pi \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, que associa a cada θ a posição r_P sobre o eixo y. Simbolicamente adota-se *cossec*. Assim, pode-se afirmar que:

$$f(\theta) = \text{cossec } \theta = r_P$$

Note que para $\theta = k\pi$ a reta tangente ao ciclo trigonométrico em P é paralela ao eixo y, não interceptando-a. Por esse motivo a função cossecante não é definida para $\theta = k\pi$.

Propriedades

(1) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$.

(2) $\text{cossec } \theta > 0$ para θ pertencente ao primeiro ou segundo quadrantes.

(3) $\text{cossec } \theta < 0$ para θ pertencente ao terceiro ou quarto quadrantes.

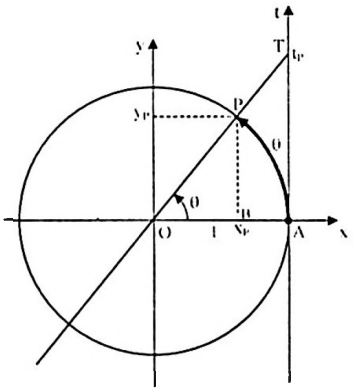
(4) A função cossecante é periódica de período 2π. De fato, determina-se a mesma reta tangente ao ciclo trigonométrico em P para os arcos θ e $\theta + 2k\pi$:

$$\text{cossec } \theta = \text{cossec } (\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

2.2.7. Relações Entre As Funções Trigonométricas

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tem-se $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

Demonstração:



Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. B é a projeção de P sobre o eixo x. T é a interseção de OP com o eixo t das tangentes. Perceba que ΔOAT e ΔOBP possuem os mesmos ângulos. Assim $\Delta OAT \sim \Delta OBP$:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Rightarrow \frac{|t_P|}{|y_P|} = \frac{1}{|x_P|} \Rightarrow$$

$$\frac{|\operatorname{tg}\theta|}{|\operatorname{sen}\theta|} = \frac{1}{|\cos\theta|} \Rightarrow |\operatorname{tg}\theta| = \frac{|\operatorname{sen}\theta|}{|\cos\theta|}$$

A tabela abaixo mostra como variam os sinais de tg θ, sen θ e cos θ de acordo com os quadrantes do ciclo trigonométrico.

Quadrante	Sinal de tg θ	Sinal de sen θ	Sinal de cos θ	Sinal de $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
1º	+	+	+	+
2º	−	+	−	−
3º	+	−	−	+
4º	−	−	+	−

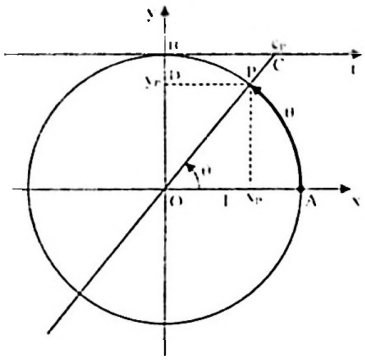
Como o sinal de tg θ coincide, em cada quadrante, com o sinal de $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, então pode-se afirmar que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta},$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq k\pi$, tem-se $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$.

Demonstração:



Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. D é a projeção de P sobre o eixo y. C é a interseção de OP com o eixo e das cotangentes, cuja origem é B. Perceba que ΔOCB e ΔOPD possuem os mesmos ângulos. Assim $\Delta OCB \sim \Delta OPD$:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \Rightarrow \frac{|c_p|}{|x_p|} = \frac{1}{|y_p|} \Rightarrow$$

$$\frac{|\text{cotg}\,\theta|}{|\cos\theta|} = \frac{1}{|\text{sen}\,\theta|} \Rightarrow |\text{cotg}\,\theta| = \frac{|\cos\theta|}{|\text{sen}\,\theta|}$$

A tabela abaixo mostra como variam os sinais de cotg θ, sen θ e cos θ de acordo com os quadrantes do ciclo trigonométrico.

Quadrante	Sinal de cotg θ	Sinal de sen θ	Sinal de cos θ	Sinal de $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$
1º	+	+	+	+
2º	−	+	−	−
3º	+	−	−	+
4º	−	−	+	−

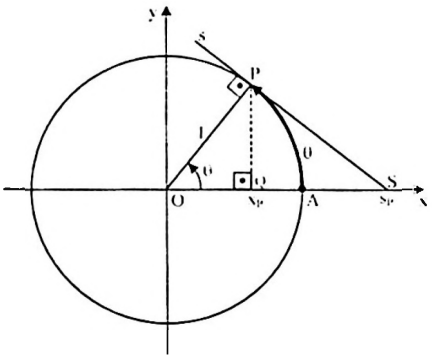
Como o sinal de cotg θ coincide, em cada quadrante, com o sinal de $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$, então pode-se afirmar que:

$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta},$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tem-se $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

Demonstração:



Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. Q é a projeção de P sobre o eixo x. S é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico em P com o eixo x. Perceba que ΔOPS e ΔOQP possuem os mesmos ângulos. Assim $\Delta OPS \sim \Delta OQP$:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{|s_p|}{1} = \frac{1}{|x_p|} \Rightarrow$$

$$|\sec\theta| = \frac{1}{|\cos\theta|}$$

A tabela abaixo mostra como variam os sinais de sec θ e cos θ de acordo com os quadrantes do ciclo trigonométrico.

Quadrante	Sinal de sec θ	Sinal de cos θ
1°	+	+
2°	−	−
3°	−	−
4°	+	+

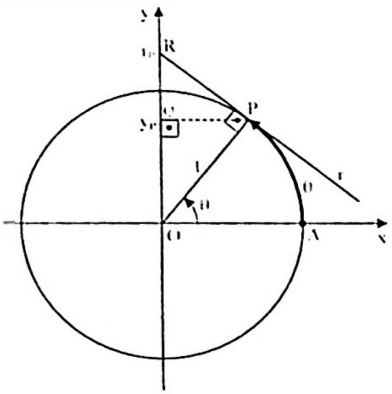
Como o sinal de sec θ coincide, em cada quadrante, com o sinal de cos θ, então pode-se afirmar que:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq k\pi$, tem-se $\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

Demonstração:



Suponha que P é a imagem do arco θ sobre o ciclo trigonométrico. Q é a projeção de P sobre o eixo y. R é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico em P com o eixo y. Perceba que ΔOPR e ΔOQP possuem os mesmos ângulos. Assim $\Delta OPR \sim \Delta OQP$:

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Rightarrow \frac{|r_p|}{1} = \frac{1}{|y_p|} \Rightarrow$$

$$|\operatorname{cossec}\theta| = \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|}$$

A tabela abaixo mostra como variam os sinais de cossec θ e sen θ de acordo com os quadrantes do ciclo trigonométrico.

Quadrante	Sinal de cossec θ	Sinal de sen θ
1º	+	+
2º	+	+
3º	−	−
4º	−	−

Como o sinal de cossec θ coincide, em cada quadrante, com o sinal de sen θ, então pode-se afirmar que:

$$\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

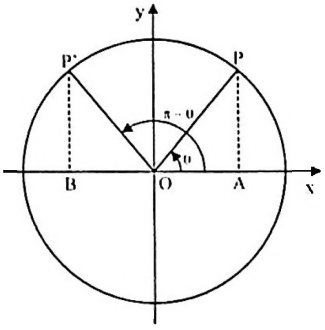
2.3. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

No capítulo 1 deste livro foram calculados os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{3}$ rad, todos ângulos do primeiro quadrante. A tabela do capítulo 1 está reproduzida abaixo, agora com os ângulos em radianos.

	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cossseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

É possível relacionar ângulos de outros quadrantes com os arcos notáveis que constam na tabela acima. Esta relação se chama de redução ao primeiro quadrante, que será analisada caso a caso.

2.3.1. Redução do 2º ao 1º Quadrante



Considere no ciclo trigonométrico um arco θ no primeiro quadrante, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Repare que $\frac{\pi}{2} < \pi - \theta < \pi$, ou seja, se θ é um arco do primeiro quadrante, $\pi - \theta$ é um arco do segundo quadrante.

P é a imagem de θ no ciclo. P' é a imagem do arco $\pi - \theta$ no ciclo. A é a projeção de P no eixo x. B é a projeção de P' no eixo x. Perceba que $\angle POA = \angle P'OB = \theta$ e como $\overline{PO} = \overline{P'O}$, segue que $\Delta POA \equiv \Delta P'OB$. Deste modo, conclui-se que:

i) $\overline{PA} = \overline{P'B} \Rightarrow$ **sen** θ = **sen** $(\pi - \theta)$

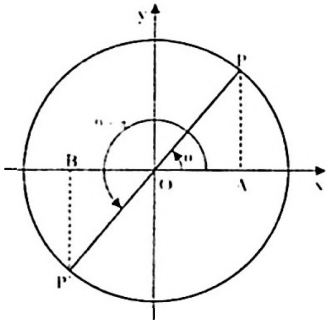
ii) $\overline{OB} = \overline{OA} \Rightarrow$ **cos** $\theta = -$ **cos** $(\pi - \theta)$

Sobre a tangente: $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\theta)}{-\cos(\pi-\theta)} \Rightarrow$ **tg** $\theta = -$ **tg**$(\pi - \theta)$

Estas três relações permitem fazer uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente de arcos notáveis do segundo quadrante do ciclo trigonométrico:

	$\frac{2\pi}{3}$ rad	$\frac{3\pi}{4}$ rad	$\frac{5\pi}{6}$ rad
Seno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Cossseno	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3.2. Redução do 3º ao 1º Quadrante



Se o arco θ é do 1º quadrante, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, segue que $\pi < \theta + \pi < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $\theta + \pi$ é um arco do 3º quadrante.

P é a imagem de θ no ciclo. P' é a imagem do arco $\theta + \pi$ no ciclo. A é a projeção de P no eixo x, B é a projeção de P' no eixo x. Perceba que $\angle POA = \angle P'OB = \theta$ e como $\overline{PO} = \overline{P'O}$, segue que $\Delta POA \equiv \Delta P'OB$. Deste modo, conclui-se que:

i) $\overline{PA} = \overline{P'B} \Rightarrow$ **sen** $\theta = -$ **sen** $(\theta + \pi)$

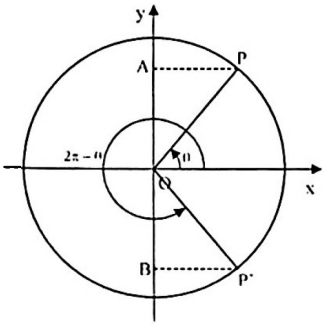
ii) $\overline{OB} = \overline{OA} \Rightarrow$ **cos** $\theta = -$ **cos** $(\theta + \pi)$

Sobre a tangente: $\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{-\text{sen}(\theta+\pi)}{-\cos(\theta+\pi)} \Rightarrow$ **tg** $\theta =$ **tg**$(\theta + \pi)$

Assim, seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis do 3º quadrante valem:

	$\frac{7\pi}{6}$ rad	$\frac{5\pi}{4}$ rad	$\frac{4\pi}{3}$ rad
Seno	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cossseno	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.3.3. Redução do 4° ao 1° Quadrante



Se θ é um arco do 1° quadrante, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, segue que $\frac{3\pi}{2} < 2\pi - \theta < 2\pi$, ou seja, $2\pi - \theta$ é um arco do 4° quadrante.

P é a imagem de θ no ciclo. P' é a imagem do arco $2\pi - \theta$ no ciclo. A é a projeção de P no eixo y, B é a projeção de P' no eixo y. Perceba que $\angle POA = \angle P'OB = \frac{\pi}{2} - \theta$ e como $\overline{PO} = \overline{P'O}$, segue que $\Delta POA \equiv \Delta P'OB$. Deste modo, conclui-se que:

i) $\overline{OB} = \overline{OA} \Rightarrow$ **sen θ = – sen (2π – θ)**

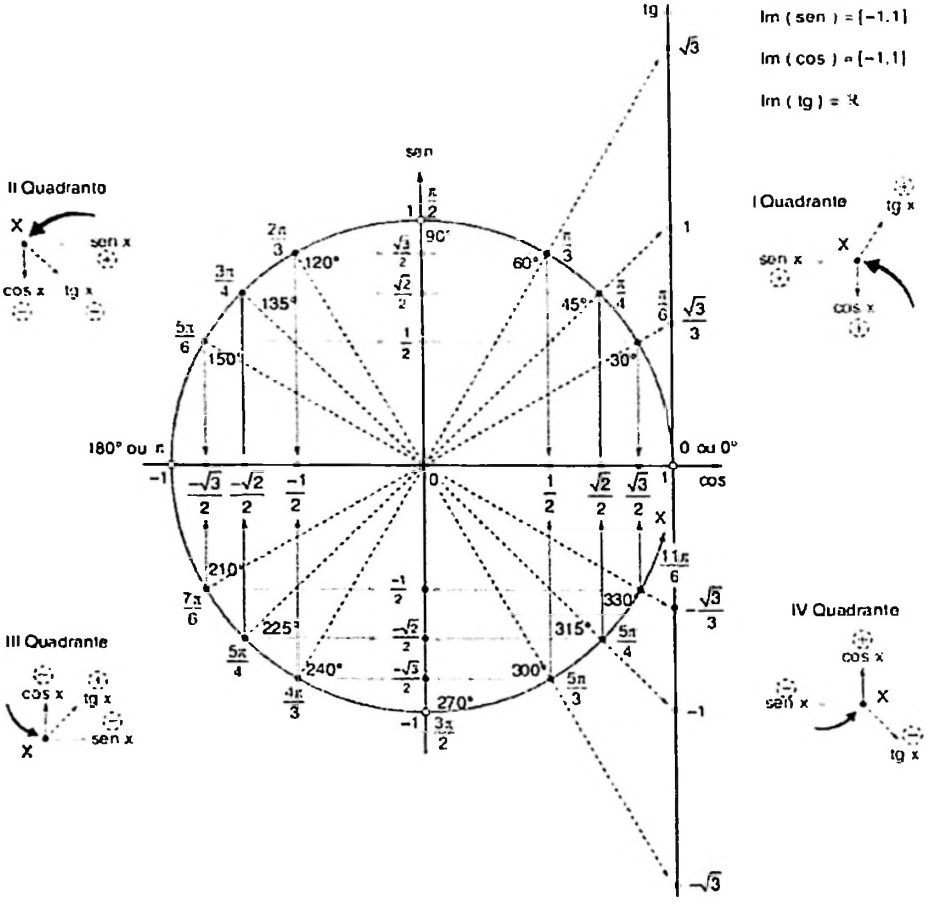
ii) $\overline{PA} = \overline{P'B} \Rightarrow$ **cos θ = cos (2π – θ)**

Sobre a tangente: $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - \theta)}{\cos(2\pi - \theta)} \Rightarrow$ **tg θ = – tg(2π – θ)**

Assim, seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis do 4° quadrante valem:

	$\frac{5\pi}{3}$ rad	$\frac{7\pi}{4}$ rad	$\frac{11\pi}{6}$ rad
Seno	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Cossseno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tangente	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

A imagem abaixo mostra todos os resultados da redução ao primeiro quadrante dos arcos notáveis, resultados esses demonstrados anteriormente neste capítulo. Todos os arcos são dados em radianos e graus, para facilitar o entendimento.



2.3.4. Primeira Determinação Positiva

Caso algum arco seja maior que 2π ou menor que 0 é necessário reduzi-lo ao intervalo $[0, 2\pi[$ para calcular o valor de suas funções trigonométricas. Desta forma, a primeira determinação positiva de um arco α ($\alpha > 2\pi$ ou $\alpha < 0$) é o arco β, côngruo com α, tal que $0 \leq \beta < 2\pi$ e que satisfaz:

$$\alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, deseja-se calcular o valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{43\pi}{6}\right)$. Deve-se dividir $\frac{43\pi}{6}$ por 2π para encontrar o arco côngruo de $\frac{43\pi}{6}$ na primeira volta do ciclo trigonométrico:

$$\frac{43\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 3(2\pi)$$

Assim, $\frac{43\pi}{6}$ é côngruo de $\frac{7\pi}{6}$. Logo, $\operatorname{sen}\left(\frac{43\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Caso o arco seja negativo, o procedimento é análogo. Por exemplo, para calcular o valor de $\cos\left(-\frac{81\pi}{4}\right)$, inicialmente deve-se dividir $-\frac{81\pi}{4}$ por 2π:

$$-\frac{81\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 11(-2\pi)$$

Assim, $-\frac{81\pi}{4}$ é côngruo de $\frac{7\pi}{4}$. Logo, $\cos\left(-\frac{81\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A utilidade da redução à primeira volta, para o cálculo de alguma função trigonométrica, está restrita ao fato de encontrar um arco côngruo que seja um arco notável. Por exemplo, como $\frac{143\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 10(2\pi)$, segue que $\frac{143\pi}{7}$ é côngruo de $\frac{3\pi}{7}$, porém os valores de seno, cosseno e tangente de $\frac{3\pi}{7}$ não são conhecidos.

Exercícios Resolvidos

1) Qual o sinal de f(x) = sen x.(– sec x) no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$?

Solução:

Sabe-se que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Logo: $f(x) = \text{sen } x.(-\sec x) = -\text{sen } x.\frac{1}{\cos x} = -\text{tg } x$

O intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ compreende todos os arcos do 4º quadrante, onde a tangente possui sinal negativo, fazendo com que – tg x possua sinal positivo.

2) Se $\text{sen}\frac{5\pi}{18} = a$, qual o sinal de a? Qual o valor de $\text{sen}\frac{13\pi}{18}$ em função de a?

Solução:

Perceba que $0 < \frac{5\pi}{18} < \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\frac{5\pi}{18}$ é um arco do primeiro quadrante, onde todos os cossenos são positivos: a é positivo. Perceba que se $0 = \frac{5\pi}{18}$ então $\frac{13\pi}{18} = \pi - 0$

Como $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(\pi - \theta)$ então $\text{sen}\frac{13\pi}{18} = \text{sen}\frac{5\pi}{18} = a$.

3) Calcule o valor de sen (11π – x) + cos (7π + x), para $x = \frac{\pi}{3}$.

Solução:

Note que:

i) $11\pi - x = 11\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{32\pi}{3} = \frac{2\pi + 30\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 5(2\pi) \Rightarrow 11\pi - x$ é côngruo de $\frac{2\pi}{3}$

ii) $7\pi + x = 7\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi + 18\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3(2\pi) \Rightarrow 7\pi + x$ é côngruo de $\frac{4\pi}{3}$

Assim:

$$\text{sen}\,(11\pi - x) + \cos\,(7\pi + x) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

4) Determine o valor de $A = \text{sen}(\pi - x).\cos(\pi + x) + \text{tg}(\pi - x).\text{tg}(\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução:

Reduzindo ao 1º quadrante:

$A = \text{sen}(\pi - x).\cos(\pi + x) + \text{tg}(\pi - x).\text{tg}(\pi + x) = \text{sen}\,x.(-\cos x) + (-\text{tg}\,x)(\text{tg}\,x) =$

$= -(\text{sen}\,x.\cos x + \text{tg}^2 x) = -\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4} + \text{tg}^2\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + 1^2\right) = -\frac{3}{2}$

5) (Ciaba-07) O valor de $\cos\frac{29\pi}{4} + \text{tg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$ é:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ e) $-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solução: Não há alternativa Correta

Reduzindo à primeira volta do ciclo trigonométrico:

i) $\frac{29\pi}{4} = \frac{5\pi+24\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 3(2\pi) \Rightarrow \frac{29\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ são arcos côngruos

ii) $-\frac{16\pi}{3} = \frac{2\pi-18\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 3(2\pi) \Rightarrow -\frac{16\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ são arcos côngruos

Assim: $\cos\frac{29\pi}{4} + \text{tg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \text{tg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

6) (ITA-12) A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0,2\pi]$, vale

A ( ) $-\cos(\alpha)$ quando n é par. B ( ) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

C ( ) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar. D ( ) $\text{sen}(\alpha)$ quando n é par.

E ( ) zero quando n é par.

Solução: Alternativa E

Quando k é par tem-se $\cos(\alpha + k\pi) = \cos\alpha$

Quando k é ímpar tem-se $\cos(\alpha + k\pi) = -\cos\alpha$

Assim: $S = \cos\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha + \ldots \Rightarrow$

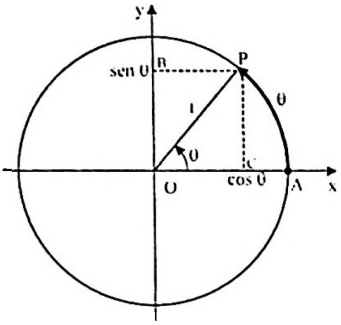
$S = 0$ se existe um número par de termos

$S = \cos\alpha$ se existe um número ímpar de termos

Como o número de termos é $n + 1$, então:

$S = 0$ se n ímpar ou $S = \cos\alpha$ se n par

2.4. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA



O ponto P é a imagem do arco θ no ciclo trigonométrico. B é a projeção de P sobre o eixo y e C é a projeção de P sobre o eixo x. Note que, independentemente do quadrante de P, é possível identificar o triângulo retângulo OPC, onde:

$$\overline{PC} = |y_P| = |\operatorname{sen}\theta| \text{ e } \overline{OC} = \overline{PB} = |x_P| = |\cos\theta|.$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{PC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OP}^2 \Rightarrow \mathbf{sen^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1}$$

Esta relação permite calcular o seno de um arco sendo conhecido o cosseno e vice versa. Isolando cada uma das funções trigonométricas encontram-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

Deve-se ressaltar que é necessário conhecer o quadrante do arco para que o sinal seja definido. Por exemplo, existem dois arcos θ no ciclo trigonométrico em que $\cos\theta = \frac{1}{2}$, a saber, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (no 1° quadrante) e $\theta = \frac{5\pi}{3}$ (no 4° quadrante), fazendo com que existam dois possíveis valores de sen θ, que são $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (se $\theta = \frac{\pi}{3}$) ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (se $\theta = \frac{5\pi}{3}$).

Suponha que deseja-se calcular o cosseno de um arco θ do 3° quadrante em que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}$.

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

Como o cosseno de qualquer arco pertencente ao 3° quadrante é negativo, a única possibilidade é que $\cos\theta = -\frac{5}{13}$.

2.4.1. Outras Relações

Teorema: Para todo arco $\theta \neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{cotg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta}}$.

Demonstração:

Sabe-se que $tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$ e $cotg\,\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$, logo $cotg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta}$.

Teorema: Para todo arco $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{sec^2\,\theta = 1 + tg^2\,\theta}$.

Demonstração:

Pela relação fundamental da trigonometria: $1 = \cos^2\theta + sen^2\,\theta$

Dividindo esta expressão por $\cos^2\theta$: $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{sen^2\,\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow sec^2\,\theta = 1 + tg^2\,\theta$

Teorema: Para todo arco $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{cossec^2\,\theta = 1 + cotg^2\,\theta}$.

Demonstração:

Pela relação fundamental da trigonometria: $1 = sen^2\,\theta + \cos^2\theta$

Dividindo esta expressão por $sen^2\,\theta$: $\frac{1}{sen^2\,\theta} = 1 + \frac{\cos^2\theta}{sen^2\,\theta} \Rightarrow cossec^2\,\theta = 1 + cotg^2\,\theta$

2.5. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam $F(\theta)$ e $G(\theta)$ duas expressões, na variável θ, compostas apenas de operações envolvendo constantes e as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante. Afirma-se que as expressões $F(\theta)$ e $G(\theta)$ são idênticas se e somente se $F(\theta) = G(\theta)$ para todo θ pertencente simultaneamente aos domínios de F e G. Neste caso, a expressão $F(\theta) = G(\theta)$ é denominada de identidade trigonométrica.

Existem quatro técnicas mais utilizadas para demonstrar uma identidade do tipo $F(\theta) = G(\theta)$:

(1) manipular algebricamente um dos membros (geralmente o que envolve um maior de operações entre as funções trigonométricas) até torná-lo igual ao outro membro;

(2) demonstrar, desenvolvendo algebricamente F e G, que ambos os membros são iguais a uma terceira expressão algébrica H: $F = H$ e $G = H \Rightarrow F = G$;

(3) demonstrar que $F - G = 0$;

(4) demonstrar que $\frac{F}{G} = 1$.

Observação: Até este momento, neste livro, foram apresentadas apenas oito relações envolvendo as funções trigonométricas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta \qquad \operatorname{cossec}^2\theta = 1 + \operatorname{cotg}^2\theta$$

Deste modo, todas as identidades trigonométricas que serão apresentadas neste capítulo poderão ser demonstradas utilizando as expressões acima listadas. Nos próximos capítulos serão apresentadas outras relações trigonométricas, como as fórmulas de transformação de soma em produto, fórmulas de soma de arcos e expressões de arco metade, que serão usadas, no respectivo capítulo, para demonstrar outros tipos de identidades trigonométricas.

Exercícios Resolvidos

1) (EsPCEx-01) Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$$

obtém-se o valor:

a) 1/2 b) 1 c) 3/2 d) 1 e) 0

Solução: Alternativa D

Todos os termos serão escritos na forma de sen x e cos x:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cossec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = 1 + 1 = 2$$

2) Dado que $\operatorname{sen} x.\cos x = \frac{1}{3}$, demonstre que $\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x} = \frac{7}{6}$

Solução:

Elevando ao quadrado a relação fundamental da trigonometria:

$1^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = \operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x + \cos^4 x \Rightarrow$

$1 = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + \frac{2}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{9}$

Elevando ao cubo a relação fundamental da trigonometria:

$1^3 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^3 = \operatorname{sen}^6 x + 3\operatorname{sen}^4 x.\cos^2 x + 3\operatorname{sen}^2 x.\cos^4 x + \cos^6 x \Rightarrow$

$1 = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow$

$1 = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x + 3.\frac{1}{9}.1 \Rightarrow \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{3}$

Logo: $\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{6}$

3) (ITA-98) O valor de:

$\operatorname{tg}^{10}x - 5\operatorname{tg}^8 x \sec^2 x + 10\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x - 10\operatorname{tg}^4 x \sec^6 x + 5\operatorname{tg}^2 x \sec^8 x - \sec^{10} x$,

para todo $x \in [0, \pi/2[$, é:

a) 1 b) $\frac{-\sec^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$ c) $-\sec x + \operatorname{tg} x$ d) -1 e) zero

Solução: Alternativa D

Sabe-se que a expansão em binômio de Newton de $(a^2 - b^2)^5$ vale:

$(a^2 - b^2)^5 = a^{10} - 5a^8b^2 + 10a^6b^4 - 10a^4b^6 + 5a^2b^8 - b^{10}$

Deste modo, a expressão do enunciado é igual à:

$\operatorname{tg}^{10}x - 5\operatorname{tg}^8 x \sec^2 x + 10\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x - 10\operatorname{tg}^4 x \sec^6 x + 5\operatorname{tg}^2 x \sec^8 x - \sec^{10} x = (\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x)^5$

Como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$:

$\operatorname{tg}^{10}x - 5\operatorname{tg}^8 x \sec^2 x + 10\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x - 10\operatorname{tg}^4 x \sec^6 x + 5\operatorname{tg}^2 x \sec^8 x - \sec^{10} x = (-1)^5 = -1$

4) (UFPA-98) Se $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor numérico da expressão

$$\frac{\sec^2 y - \operatorname{tg}^2(\pi + y)}{2\operatorname{sen}(\pi - y) \cdot \operatorname{cotg} y}.$$

Solução:

Se $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ então $y = \frac{4\pi}{3}$. Calculando individualmente cada termo:

i) $\sec y = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$; ii) $\operatorname{tg}(\pi + y) = \operatorname{tg} y = \sqrt{3}$

iii) $\operatorname{sen}(\pi - y) = \operatorname{sen} y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; iv) $\operatorname{cotg} y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sec^2 y - \operatorname{tg}^2(\pi + y)}{2\operatorname{sen}(\pi - y)\,.\,\operatorname{cotg} y} = \frac{4-3}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{-1} = -1$$

5) (ITA-04) Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A = \left\{x_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\} \text{ e } B = \left\{y_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1,2\right\}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)/3$ e) $\left(2 + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)/3$

Solução: Alternativa C

Note que $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{11\pi}{24} = \dfrac{\pi}{24}$, ou seja, $\cos\dfrac{11\pi}{24} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24}$.

Assim: $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{24} + \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{sen}^2\dfrac{11\pi}{24} = \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} + \cos^2\dfrac{\pi}{24} = 1 + 1 = 2$

6) (Ciaba-13) Se $\operatorname{tg} x + \sec x = 3/2$, o valor de $\operatorname{sen} x + \cos x$ vale:

a) – 7/13 b) 5/13 c) 12/13 d) 15/13 e) 17/13

1ª Solução: Alternativa E

Como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ então $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = (\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x) = 1$

Desde que $\operatorname{tg} x + \sec x = \dfrac{3}{2}$ então $\sec x - \operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3}$.

Somando: $\operatorname{tg} x + \sec x + \sec x - \operatorname{tg} x = 2\sec x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{13}{6} \Rightarrow \sec x = \dfrac{13}{12} \Rightarrow$

$\cos x = \dfrac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \pm\dfrac{5}{13}$

Note que se $\operatorname{sen} x = -\dfrac{5}{13}$ então $\operatorname{tg} x = = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\dfrac{5}{12}$, fazendo com que $\operatorname{tg} x + \sec x = -\dfrac{5}{12} + \dfrac{13}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, que é uma contradição. Assim, a única possibilidade é $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$. Deste modo: $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13} = \dfrac{17}{13}$

2ª Solução: Alternativa E

$$\frac{3}{2} = \text{tg}\,x + \sec x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow 2(1+\text{sen}\,x) = 3.\cos x \Rightarrow$$

$$2(1+\text{sen}\,x) = \pm 3\sqrt{1-\text{sen}^2 x} \Rightarrow 4(1+2.\text{sen}\,x+\text{sen}^2) = 9(1-\text{sen}^2 x) \Rightarrow$$

$$4 + 8.\text{sen}\,x + 4.\text{sen}^2 x = 9 - 9.\text{sen}^2 x \Rightarrow 13.\text{sen}^2 x + 8.\text{sen}\,x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$(13.\text{sen}\,x - 5)(\text{sen}\,x + 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \frac{5}{13} \text{ ou sen } x = -1 \text{ (não convém)}$$

Assim: $\text{sen}\,x + \cos x = \text{sen}\,x + \frac{2}{3} + \frac{2\text{sen}\,x}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5\text{sen}\,x}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}.\frac{5}{13} =$

$$\frac{2}{3} + \frac{25}{39} = \frac{26+25}{39} = \frac{51}{39} = \frac{17}{13}$$

7) Demonstre as seguintes identidades:

a) $\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = \sec^2 x.\text{cossec}^2 x - 2$

b) $2[(1+\text{sen}^2 x)^3 + (1+\cos^2 x)^3] + 9(1+\cos^2 x)^2 = 27[1+\cos^4 x]$

c) $(2-\cos^2 x)(2+\text{tg}^2 x) = (1+2.\text{tg}^2 x)(2-\text{sen}^2 x)$

Solução:

a) $\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x.\text{sen}^2 x} =$

$$= \frac{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x.\text{sen}^2 x}{\cos^2 x.\text{sen}^2 x} = \frac{1 - 2\cos^2 x.\text{sen}^2 x}{\cos^2 x.\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x.\text{sen}^2 x} - 2 = \sec^2 x.\text{cossec}^2 x - 2$$

b) $2[(1+\text{sen}^2 x)^3 + (1+\cos^2 x)^3] + 9(1+\cos^2 x)^2 =$

$= 2[1 + 3\text{sen}^2 x + 3\text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + 1 + 3\cos^2 x + 3\cos^4 x + \cos^6 x] + 9 + 18\cos^2 x + 9\cos^4 x =$

$= 13 + 6(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + 6(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) + 2(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) + 18\cos^2 x + 9\cos^4 x =$

$= 19 + 6(\text{sen}^4 x + \cos^4 x) + 2(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) + 18\cos^2 x + 9\cos^4 x$

Analisando cada parcela:

i) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = (\text{sen}^2 + \cos^2 x)^2 - 2\text{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - 2(1-\cos^2 x)\cos^2 x =$

$= 1 - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x$

ii) Utilizando a fatoração $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$:

$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x\cos^2 x) =$

$= (\text{sen}^2 + \cos^2 x)^2 - 3\text{sen}^2 x\cos^2 x = 1 - 3(1-\cos^2 x)\cos^2 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x$

Assim: $2[(1+\text{sen}^2 x)^3 + (1+\cos^2 x)^3] + 9(1+\cos^2 x)^2 =$

$= 19 + 6 - 12\cos^2 x + 12\cos^4 x + 2 - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 18\cos^2 x + 9\cos^4 x =$

$= 27 + 27\cos^4 x = 27(1+\cos^4 x)$

c) $A = (2-\cos^2 x)(2+\text{tg}^2 x) = (2-\cos^2 x)\left(2 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) =$

$$= (2-\cos^2 x)\left(\frac{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) = (2-\cos^2 x)\left(\frac{2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{(2-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$B = (1 + 2.\operatorname{tg}^2 x)(2 - \operatorname{sen}^2 x) = \left(1 + \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)[2 - (1 - \cos^2 x)] =$$

$$\frac{[\cos^2 x + 2(1-\cos^2 x)]}{\cos^2 x}(1+\cos^2 x) = \frac{(2-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

Deste modo, segue que A = B.

8) (ITA-90) Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \operatorname{tg} t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \le t \le \pi/2$. Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2$, $x \ge a$ b) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2$, $x \ge 1$ c) $y = \frac{b}{a^2}(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

d) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1)$, $x \ge 1$ e) $y = \frac{a^2}{b^2}(x-1)$, $x \le 1$

Solução: Alternativa D

Isolando tg t e $\sec^2 t$ nas expressões fornecidas:

i) $\operatorname{tg} t = (x-1)/a^2$ ii) $\sec^2 t = (y^2 + b^2)/b^2$

Como $\sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow (y^2 + b^2)/b^2 = 1 + (x-1)^2/a^4 \Rightarrow$

$y^2/b^2 + 1 = 1 + (x-1)^2/a^4 \Rightarrow y^2/b^2 = (x-1)^2/a^4$

Como a e b são positivos, então $|y|/b = |(x-1)|/a^2$

Se $x \ge 1 \Rightarrow x - 1 \ge 0 \Rightarrow |y| = b(x-1)/a^2$

Se $y < 0 \Rightarrow y = -b(x-1)/a^2$

9) (ITA-12) Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}(x).\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg}(x)$ são, respectivamente

a) 1 e 0. b) 1 e $\frac{2}{5}$. c) -1 e 0. d) 1 e 5. e) -1 e $-\frac{5}{2}$.

Solução: Alternativa B

Dividindo os dois membros por $\cos^2 x$:

$$\operatorname{sen} x.\cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{5}.\sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x = \frac{5}{2}\operatorname{tg} x$$

Substituindo na relação $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$:

$tg^2x - \frac{5}{2}tgx + 1 = 0$, em que a soma e o produto dos possíveis valores de x valem, respectivamente: $S = \frac{5}{2}$ e $P = 1$

10) (IME-74) Para que valores de m a expressão

$$y = sen^6 x + cos^6 x + m(sen^4x + cos^4 x)$$

é independente de x? Qual o valor de y correspondente?

Solução:

Observe que:

$sen^4x + cos^4x = (sen^2 + cos^2x)^2 - 2sen^2xcos^2x = 1 - 2(1 - cos^2x)cos^2x =$

$= 1 - 2cos^2x + 2cos^4x$

Utilizando a fatoração $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$:

$sen^6x + cos^6x = (sen^2x + cos^2x)(sen^4x + cos^4x - sen^2xcos^2x) =$

$= (sen^2 + cos^2x)^2 - 3sen^2xcos^2x = 1 - 3(1 - cos^2x)cos^2x = 1 - 3cos^2x + 3cos^4x$

Assim: $y = 1 - 3cos^2x + 3cos^4x + m - 2mcos^2x + 2mcos^4x =$

$= 1 + m - (3 + 2m)cos^4x + (3 + 2m)cos^4x = 1 + m + (3 + 2m)(cos^2x - cos^4x)$

Logo, se $m = -2/3$, segue que y é independente de x.

11) (IME-68) Sendo y um arco compreendido entre 2π e $5\pi/2$, determine seu valor, sabendo que: $tg\,y = \frac{1}{(\cos^2 x - sen^2 x)^2} - \frac{4.tg^2 x}{(1 - tg^2 x)^2}$

Solução:

$$tg\,y = \frac{1}{(\cos^2 x - sen^2 x)^2} - \frac{4.tg^2 x}{(1 - tg^2 x)^2} = \frac{1}{(\cos^2 x - sen^2 x)^2} - \frac{4.tg^2 x}{\left(1 - \frac{sen^2 x}{\cos^2 x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{(\cos^2 x - sen^2 x)^2} - \frac{4.\frac{sen^2 x}{\cos^2 x}\cos^4 x}{\left(\cos^2 x - sen^2 x\right)^2} = \frac{1 - 4sen^2 x\cos^2 x}{(\cos^2 x - sen^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1 - 4(1 - \cos^2 x)\cos^2 x}{(2\cos^2 x - 1)^2} = \frac{1 - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x}{4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1} = 1$$

Como tg y = 1 então y é côngruo a $\pi/4$ ou $5\pi/4$. Desde que $y \in [2\pi, 5\pi/2]$ tem-se que y pertence ao 1° quadrante, ou seja: $y = 2\pi + \pi/4 = 9\pi/4$.

12) Determine uma expressão mais simples para

$$\sqrt{sen^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4sen^2 x}\,.$$

Solução:

$\sqrt{\text{sen}^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\text{sen}^2 x} =$

$= \sqrt{\text{sen}^4 x + 4(1 - \text{sen}^2 x)} - \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} =$

$= \sqrt{\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 4} - \sqrt{\cos^4 x - 4\cos^2 x + 4} =$

$= \sqrt{(\text{sen}^2 x - 2)^2} - \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} = |\text{sen}^2 x - 2| - |\cos^2 x - 2|$

Como $0 \le \text{sen}^2 x \le 1$ segue que $-2 \le \text{sen}^2 x - 2 \le -1$ e como todo módulo gera apenas valores não negativos: $|\text{sen}^2 x - 2| = 2 - \text{sen}^2 x$

O mesmo valor para o segunda termo, onde $|\cos^2 x - 2| = 2 - \cos^2 x$

Logo: $\sqrt{\text{sen}^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\text{sen}^2 x} = 2 - \text{sen}^2 x - 2 + \cos^2 x =$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

13) Sabendo-se que $\dfrac{\text{sen}^4 \alpha}{a} + \dfrac{\cos^4 \alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$, calcule o valor de $\dfrac{\text{sen}^8 \alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8 \alpha}{b^3}$.

1ª Solução:

$\dfrac{\text{sen}^4 \alpha}{a} + \dfrac{\cos^4 \alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b} \Rightarrow b(a+b)\text{sen}^4 \alpha + a(a+b)\cos^4 \alpha = ab \Rightarrow$

$ab\text{sen}^4 \alpha + b^2\text{sen}^4 \alpha + a^2\cos^4 \alpha + ab\cos^4 \alpha - ab = 0 \Rightarrow$

$b^2\text{sen}^4 \alpha + a^2\cos^4 \alpha + ab(\text{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow$

$b^2\text{sen}^4 \alpha + a^2\cos^4 \alpha + ab[(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\text{sen}^2 \alpha\cos^2 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow$

$b^2\text{sen}^4 \alpha + a^2\cos^4 \alpha - 2ab\text{sen}^2 \alpha\cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow (b\text{sen}^2 \alpha - a\cos^2 \alpha)^2 = 0 \Rightarrow$

$b\text{sen}^2 \alpha - a\cos^2 \alpha = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \dfrac{a\cos^2 \alpha}{b} \Rightarrow \text{sen}^4 \alpha = \dfrac{a^2\cos^4 \alpha}{b^2}$

Logo: $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{\text{sen}^4 \alpha}{a} + \dfrac{\cos^4 \alpha}{b} = \dfrac{a\cos^4 \alpha}{b^2} + \dfrac{\cos^4 \alpha}{b} = \cos^4 \alpha\left(\dfrac{a+b}{b^2}\right) \Rightarrow$

$\cos^4 \alpha = \dfrac{b^2}{(a+b)^2} \Rightarrow \text{sen}^4 \alpha = \dfrac{a^2}{(a+b)^2}$

Assim: $\dfrac{\text{sen}^8 \alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \dfrac{a}{(a+b)^4} + \dfrac{b}{(a+b)^4} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

2ª Solução:

$\dfrac{\text{sen}^4 \alpha}{a} + \dfrac{\cos^4 \alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b} \Rightarrow b(a+b)\text{sen}^4 \alpha + a(a+b)\cos^4 \alpha - ab = 0 \Rightarrow$

$b(a+b)\text{sen}^4 \alpha + a(a+b)(1 - \text{sen}^2 \alpha)^2 - ab = 0 \Rightarrow$

$b(a+b)\text{sen}^4 \alpha + a(a+b)(1 - 2\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^4 \alpha) - ab = 0 \Rightarrow$

$(a+b)^2\text{sen}^4 \alpha - 2a(a+b)\text{sen}^2 \alpha + a^2 = 0 \Rightarrow [(a+b)\text{sen}^2 \alpha - a]^2 = 0 \Rightarrow$

$\text{sen}^2 \alpha = \dfrac{a}{a+b} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha = \dfrac{b}{a+b}$

Logo: $\frac{\text{sen}^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$

14) (IME) Prove que quando os arcos x e y verificam a relação a.sen x.sen y + b.cos x.cos y = 0, a expressão

$$P=\frac{1}{a.\text{sen}^2 x+b.\cos^2 x}+\frac{1}{a.\text{sen}^2 y+b.\cos^2 y}$$

é independente de x e y.

Solução:

Inicialmente o arco y será isolado:

a.sen x.sen y + b.cos x.cos y = 0 $\Rightarrow$ a.sen x.sen y = – b.cos x.cos y $\Rightarrow$

$$\frac{\text{sen y}}{\cos y}=-\frac{b}{a}\frac{\cos x}{\text{sen x}} \Rightarrow \text{cotg y}=-\frac{a.\text{tg x}}{b} \quad (1)$$

A expressão de P pode ser desenvolvida de modo que fique em função apenas de tangentes e cotangentes:

$$P=\frac{1}{a.\text{sen}^2 x+b.\cos^2 x}+\frac{1}{a.\text{sen}^2 y+b.\cos^2 y}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a.\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}+b}+\frac{\frac{1}{\text{sen}^2 y}}{a+b.\frac{\cos^2 y}{\text{sen}^2 y}}=$$

$$=\frac{\sec^2 x}{a\,\text{tg}^2 x+b}+\frac{\text{cossec}^2 y}{a+b\,\text{cotg}^2 y}=\frac{1+\text{tg}^2 x}{a\,\text{tg}^2 x+b}+\frac{1+\text{cotg}^2 y}{a+b\,\text{cotg}^2 y}$$

Substituindo o resultado (1) na expressão de P obtém-se uma relação que envolve apenas funções trigonométricas do arco x:

$$P=\frac{1+\text{tg}^2 x}{a\,\text{tg}^2 x+b}+\frac{1+\frac{a^2}{b^2}\text{tg}^2 x}{a+b\frac{a^2}{b^2}\text{tg}^2 x}=\frac{1+\text{tg}^2 x}{a\,\text{tg}^2 x+b}+\frac{1}{ab}\frac{b^2+a^2\,\text{tg}^2 x}{a\,\text{tg}^2 x+b}=$$

$$=\frac{ab+ab\,\text{tg}^2 x+b^2+a^2\,\text{tg}^2 x}{ab(a\,\text{tg}^2 x+b)}=\frac{b(a+b)+a(a+b)\text{tg}^2 x}{ab(a\,\text{tg}^2 x+b)}=\frac{(a+b)(a\,\text{tg}^2 x+b)}{ab(a\,\text{tg}^2 x+b)}=\frac{a+b}{ab}$$

Exercícios de Vestibular

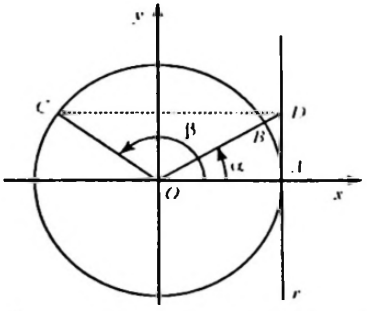
1) (ENEM-04) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

A) Uma volta completa.
B) Uma volta e meia.
C) Duas voltas completas.
D) Duas voltas e meia.
E) Cinco voltas completas.

2) (UEPA-08) Em protesto ao Plano de Reforma Agrária, não realizada pelo governo Federal, um grupo de trabalhadores pertencentes ao MST, partiu em direção a uma fazenda, situada numa região próxima, na intenção de invadi-la. Após percorrerem certa distância pararam em um cruzamento porque alguns dos trabalhadores se manifestaram em dúvida quanto ao caminho a ser seguido. Após longa discussão, cinco afirmações foram feitas, sendo que apenas uma delas é a correta, pois, o caminho a ser seguido tinha a mesma direção e sentido do anterior. A afirmação correta foi:

a) Girando 8πrd, seguiremos na mesma direção e sentido.
b) Girando 7πrd/2, seguiremos na mesma direção e sentido contrário.
c) Girando 3πrd/4, seguiremos na mesma direção e sentido.
d) Girando 5πrd/2, seguiremos na mesma direção e sentido contrário.
e) Girando 5πrd, seguiremos na mesma direção e sentido.

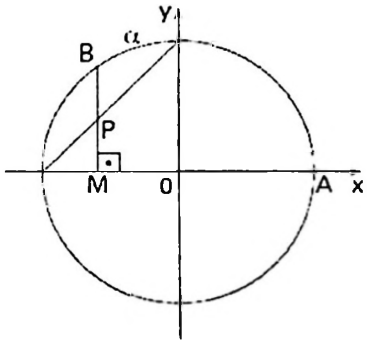
3) (UFPB-04) Na figura abaixo, α e β são as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, respectivamente, e r é a reta tangente à circunferência de centro O e raio unitário, no ponto A.



Se CD é paralelo a OA e $0 < \alpha < \pi/4$, então sen β é igual a:

a) sen α b) tg β c) cos α d) cos β e) tg α

4) (FGV-13) No círculo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede α. Assim, PM é igual



A) $-1 - \text{tg}\alpha$ B) $1 - \cos\alpha$ C) $1 + \cos\alpha$ D) $1 + \text{sen}\alpha$ E) $-1 + \text{cotg}\alpha$

5) (UEPB-11) O valor da expressão $\text{tg}\frac{5\pi}{3} - 3.\text{tg}(-210^\circ)$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) 0 d) $-\sqrt{3}$ e) 3

6) (UEPB-13) Sendo $f(x) = -4.\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2.\cos x$, o valor de $f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ d) -1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) (UEFS-09) Sendo x um arco do 2º quadrante, tal que sen x = 1/3, pode-se afirmar que o valor de $A = \sqrt{2}.\text{tg}\,x$ é igual ao valor de

A) sen $2\pi/3$ B) cos $2\pi/3$ C) sen $5\pi/6$
D) cos $5\pi/6$ E) sen $4\pi/3$

8) (Udesc-08) Se $\text{tg}\,20^\circ = a$, o valor de $\frac{\text{tg}\,160^\circ + \text{tg}\,340^\circ}{\text{tg}\,200^\circ}$ é:

a) 2 b) $-a$ c) 0 d) a e) -2

9) (Udesc-08) Sendo x um arco do segundo quadrante tal que sen x = 3/7, o valor de tg x é:

a) $\frac{10\sqrt{10}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$ c) $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ d) $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$ e) $-\frac{10\sqrt{10}}{3}$

10) (UEG-13) O valor da expressão $4.\text{sen}\frac{31\pi}{3} + 6.\cos 2655^{\circ}$ é igual a:

a) $2 - 3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2} - 2$ d) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

11) (UFPel-08) Considerando a circunferência trigonométrica, identifique as sentenças abaixo como verdadeiras ou falsas.

I. No quadrante onde se localiza o arco de (– 4330°), a função seno é crescente.

II. No quadrante onde se localiza o arco de 34π/5 rad, a função cosseno é decrescente.

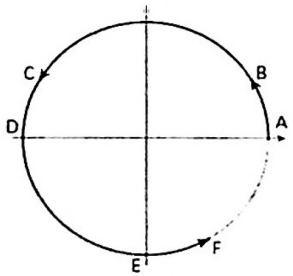
III. O valor da tangente do arco de 1000° é positivo.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

(a) I e II tão-somente. (b) II e III tão-somente. (c) I, II, e III.

(d) III tão-somente. (e) II tão-somente.

12) (Insper-10) A figura abaixo representa a circunferência trigonométrica (cujo raio mede 1). As medidas dos arcos menores AB, CD e EF são todas iguais a π/6. Se x, y e z são números positivos e representam, respectivamente, as medidas dos arcos trigonométricos AB, AC e AF, então sen(x) + sen(y) + sen(z) + cos(x) + cos(y) · cos(z) é igual a:



a) $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

13) (Insper-14) Considere o produto abaixo, cujos fatores são os cossenos de todos os arcos trigonométricos cujas medidas, em graus, são números inteiros pertencentes ao intervalo [91, 269].

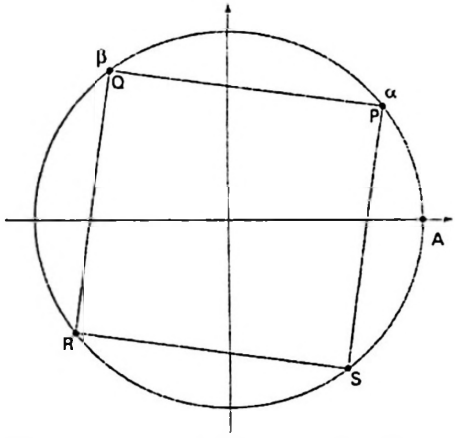
$$P = \cos 91^{\circ} \cdot \cos 92^{\circ} \cdot \cos 93^{\circ} \cdot \ldots \cdot \cos 268^{\circ} \cdot \cos 269^{\circ}$$

Nessas condições, é correto afirmar que

a) $-1 < P < -1/4$ b) $-1/4 < P < 0$ c) $P = 0$

d) $0 < P < 1/4$ e) $1/4 < P < 1$

14) (Insper-14) Na figura abaixo, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, os arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ têm medidas iguais a α e β, respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos \alpha = 0{,}8$, pode-se concluir que o valor de $\cos \beta$ é
a) –0,8. b) 0,8. c) – 0,6. d) 0,6. e) – 0,2.

15) (FGV-05) Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3\cos^4 x}{4}$. Os valores máximo e mínimo de f(x) são, respectivamente:
a) 1 e –1 b) 1 e 0 c) 2 e – 3/4 d) 2 e 0 e) 2 e 5/4

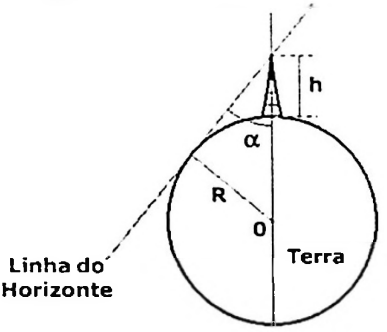
16) (UFC-02) Sabendo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que $\text{sen}\theta = -1/2$, podemos afirmar corretamente que $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \text{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})$ é igual a:

a) 0 b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

17) (EsPCEx-09) O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a 1/2 é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

18) (EsPCEx-02) O produto cotg x.cos x é positivo, portanto x pertence ao
a) 1° ou 2° quadrantes. b) 1° ou 4° quadrantes. c) 2° ou 3° quadrantes.
d) 2° ou 4° quadrantes. e) 3° ou 4° quadrantes.

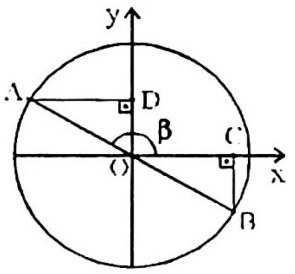
19) (EsPCEx-12) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura. Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:



a) $R = \dfrac{\text{sen}(\alpha h)}{1-\text{sen}\,\alpha}$ b) $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{1-\text{sen}\,\alpha}$ c) $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha - 1}$

d) $R = \dfrac{1-\text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$ e) $R = \dfrac{1+\text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$

20) (EsPCEx-01) No círculo trigonométrico (raio = 1), representado na figura, a medida de β é 150° e AB representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos OC e OD é:



a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

21) (EsPCEx-14) O valor de (cos 165° + sen 155° + cos 145° - sen 25° + cos 35° + cos 15°) é

|A| $\sqrt{2}$ |B| -1. |C| 0. |D| 1. |E| 1/2

22) (Ciaba-10) O valor numérico da expressão $\frac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400^\circ + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cossec}^2(-780^\circ)}$ é igual a:

a) 1 b) – 3/4 c) 4/3 d) 1/2 e) 3/8

23) (EsPCEx-11) O valor numérico da expressão

$$\frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2.\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220^\circ)^2$$

é:

a) – 1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

24) (EsPCEx-98) Sendo k e Z, o número de valores distintos assumidos por $\operatorname{sen}\frac{k\pi}{9}$ é igual a:

a) 5 b) 8 c) 9 d) 10 e) 18

25) (AFA-05) Sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}\alpha$

( ) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sec x = \operatorname{cossec}\alpha$

( ) Sendo $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

( ) A função $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

Tem-se a seqüência

a) V, V, V, V. b) V, F, F, F. c) F, V, F, F. d) V, V, F, V.

26) (Udesc-08) Se as relações $\cos x = m$ e $\operatorname{tg} x = m\sqrt{6}$ são válidas simultaneamente, com $m \in \mathbb{R}$, m^2 é igual a:

a) 1/3b) 1/2 c) 1/4 d) 1/6 e) 1/8

27) (UEFS-13) Se x é um ângulo do segundo quadrante satisfazendo a equação

$$6\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4 + 2\cos(-x),$$

então cos x é igual a

a) – 2/3 b) – 3/5 c) – 1/2 d) 1/2 e) 3/4

28) (UEFS-13) Se $\tan\theta = \frac{6}{5}\cos\theta$, então sen θ é igual a:

a) – 3/2 b) – 3/4 c) – 2/3 d) 2/3 e) 3/4

29) (UECE-11) Se x é um arco localizado no segundo quadrante e cosx = - 3/5. então o valor de cos x + sen x + tg x + cotg x + sec x + cosec x é

A) -2,3. B) -3,4. C) -4,5. D) -5,6.

30) (UECE-12) Se, para $0 < x < \pi$ e $x \neq \pi/2$, o valor da soma com infinitas parcelas $1 + \text{sen } x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x + ...$ é igual a 2, então o valor do cos x é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

31) (EsPCEx-03) Considere as expressões:

(I) $\frac{\text{sen}30°.\cos 150°}{\text{tg}\,210°}$ (II) $\frac{\text{cotg}\,50°.\text{sen}\,93°}{\text{tg}\,181°}$

(III) $\frac{\cos x.\text{cossec}\,x}{\sec x.\text{cotg}\,x}, x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ (IV) $\frac{\text{sen}\,x.\text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x}, x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Têm valor sempre negativo:

A) I e II. B) I e IV. C) II e III. D) I e III. E) III e IV.

32) (UEPB-11) Suponha que sec α = x e tg α = x – 1, então x tem valor:

a) 0 b) – 1 c) 2 d) 1 e) 1/2

33) (FEI-11) Se x é um arco do segundo quadrante e $\text{sen}\,x = \frac{4}{5}$, então pode-se afirmar que:

a) sen x + cos x = 1 b) 2.sen x + 3.cos x = $-\frac{1}{5}$

c) sec x = $\frac{4}{5}$ d) tan x – cos x = $\frac{4}{3}$

e) cotg x – tg x = $\frac{25}{12}$

34) (FEI-14) Sendo α um arco com extremidade no terceiro quadrante e sabendo que $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, então 3.sen α + 4.tg α é igual a:

a) – 4/5 b) 44/15 c) 28/15 d) – 5/3 e) 4/15

35) (UFPI-09) Seja α um número satisfazendo $0 < \alpha < \pi/2$ e $\frac{\tan\alpha}{2} = \sqrt{2}$. É correto afirmar que:

a) $\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha = \frac{1-2\sqrt{2}}{3}$ b) sec α = 3

c) cossec α é um número racional d) sen α = 1

e) sen α.cos α = 1

36) (Insper-05) Se $\theta = \pi/3$, então $\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{tg}^2\theta+1} - \frac{1-\cos^2\theta}{\text{cotg}^2\theta+1}$ é igual a:

$\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

a) 0 b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

37) (Fuvest-99) Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \pi/2$ e sen $\alpha = a$, então tg $(\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$ b) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ c) $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

d) $\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}$ e) $-\frac{1+a^2}{a}$

38) (Unicamp-14) Seja x real tal que cos x = tan x. O valor de sen x é

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ d) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

39) (Ciaba-14) Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que sen x.cos x = $\frac{1}{5}$. Então, o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de tg x são, aproximadamente,

(a) P = 1 e S = 0. (b) P = 1 e S = 5. (c) P = -1 e S = 0.

(d) P = -1 e S = 5. (e) P = 1 e S = - 5.

40) (EsPCEx-01) Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então o valor de tg α é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{12}{13}$ d) $\frac{12}{5}$ e) $-\frac{12}{13}$

41) (Escola Naval-86) Seja x um ângulo que possui tangente e tal que sen x + 2.cos x = 1. O valor que tg x é:

a) 3/4 b) 4/3 c) -3/4 d) -4/3 e) 0

42) (Escola Naval-01) Se $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ e $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{5}$, o valor de

$$\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x \cos x$$

é

(A) $13 + \sqrt{21}$ (B) $\frac{17+3\sqrt{21}}{10}$ (C) $\frac{19+5\sqrt{21}}{10}$ (D) $\frac{21+2\sqrt{21}}{3}$

43) (Escola Naval-13) Sabendo que $b = \sec^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+...\right)$ então, o valor de $\log_2 |b|$ é

a) 8 b) 4 c) 3 d) 1 e) 0

44) (FEI-12) O valor de $\frac{3-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - 2.\operatorname{cotg}^2 x$, com $x \neq k.\pi$ ($k \in Z$) é:

a) 3 b) 2 c) -3 d) -2 e) 1

45) (UCPel-12) Simplificando a expressão $\frac{1}{1+\sec x}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ obtém-se:

a) tg x b) sen x c) cos x d) cotg x e) sec x

46) (UCPel-12) A expressão $\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ é equivalente a:

a) $-\cos^2 x$ b) $\cos^2 x$ c) $\operatorname{sen}^2 x$ d) $-\operatorname{sen} x$ e) cos x

47) (UCPel-13) A expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \frac{2.\cos x}{\sec x} - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$ é igual a:

a) $\operatorname{sen}^2 x - 1$ b) -1 c) $\operatorname{sen} x + 1$
d) 1 e) $\cos^2 x + 1$

48) (Udesc-07) Assinale a identidade trigonométrica verdadeira.

a) $tg^2 x + sen^2 x = sec^2 x - \cos x$ b) $tg^2 x + sen^2 x = sec^2 x + \cos^2 x$

c) $tg^2 x + sen^2 x = -sec^2 x + \cos^2 x$ d) $tg^2 x + sen^2 x = sec\, x - \cos^2 x$

e) $tg^2 x + sen^2 x = sec^2 x - \cos^2 x$

49) (UFC-99) Considere a igualdade $tgx = \cot gx + \frac{P.(2 - sec^2 x)}{2tgx}$. Assinale a opção que apresenta o valor de P, para o qual a igualdade acima seja válida para todo $x \in R$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, k inteiro.

a) 2. b) 1. c) 0. d) – 1. e) – 2.

50) (UFJF-11) Sejam x e y tais que $y - x = \pi$ e que $sen\, x = 2\cos y$. O valor de tg y é:

a) -2. b) 2. c) -1. d) 1. e) 4.

51) (UFPel-07) Toda igualdade envolvendo funções trigonométricas que se verifica para todos os domínios de tais funções é uma Identidade Trigonométrica.

A expressão idêntica a $y = sen\, x \cdot tan\, x$ é

(a) $y = \cos x - sec\, x$. (b) $y = sec\, x - \cos x$.

(c) $y = sec\, x$. (d) $y = 1 - \cos x$.

(e) $y = sen\, x + \cos x$.

52) (UFSJ-13) Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\frac{sen\,\theta}{cossec\,\theta} + \frac{\cos\theta}{sec\,\theta}$ é definida, é correto afirmar que ela sempre será igual a:

a) 1 b) 2 c) sen θ d) cos θ

53) (Ciaba-03) Para todo x real, o valor da expressão $\frac{1}{1 + tg^2 x} + \frac{1}{1 + cotg^2 x}$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) $2 + tg^2 x + cotg^2 x$

d) $sec^2 x + cossec^2 x$ e) $1/(sec^2 x + cossec^2 x)$

54) (ITA-81) Se R denota o conjunto dos números reais e (a, b) o intervalo aberto $\{x \in R; a < x < b\}$, seja $f: (0, \pi/2) \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{sec^2 x + cossec^2 x}$. Se $\alpha \in (0, \pi/2)$ é tal que $tg\,\alpha = a/b$, então $f(\alpha)$ é igual a:

a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ c) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$ d) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ e) nda

55) (ITA-02) Sejam f e g duas funções definidas por $f(x) = (\sqrt{2})^{3\operatorname{sen} x - 1}$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\operatorname{sen}^2 x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$. A soma do valor mínimo de f com o valor mínimo de g é igual a:

a) 0 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

56) (IME-15) Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \ldots)\ln 2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\sqrt{3}-1$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ e) $\sqrt{3}+1$

57) (IME-17) Calcule o valor de $\frac{\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha}$, sabendo-se que $\operatorname{sen} \alpha . \cos \alpha = \frac{1}{5}$.

a) $\frac{22}{21}$ b) $\frac{23}{21}$ c) $\frac{25}{23}$ d) $\frac{13}{12}$ e) $\frac{26}{25}$

Exercícios Gerais

58) Demonstre as seguintes identidades:

a) $\frac{\operatorname{cossec} x + \sec x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{cossec} x$

b) $\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x . \cos^2 x$

c) $\frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{sen} x . \cos x} = 2 . \operatorname{tg}^2 x$

d) $\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} | \operatorname{cotg} x + \operatorname{cossec} x + 1 |$

e) $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x . \cos x} + \operatorname{sen} x = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x$

f) $(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cot} x)$

g) $1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{1 + \operatorname{cotg} \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta} = \operatorname{sen} \theta . \cos \theta$

h) $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = (\sec x + \operatorname{tg} x)^2$

i) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \cos x.\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\cos x}{\sec x}$

j) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} y} = -\dfrac{\operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x}$

k) $(1 + \sec x - \operatorname{tg} x)^2 = 2(1 + \sec x)(\sec x - \operatorname{tg} x)$

l) $\operatorname{tg} x \sqrt{\dfrac{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x}} + \operatorname{cotg} x \sqrt{\dfrac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x - \operatorname{tg} x}} = \sec x - \operatorname{cossec} x$

m) $(\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) = (\sec x + \operatorname{cossec} x)$

n) $(2 - \cos^2 x)(2 + \operatorname{tg}^2 x) = (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)(2 - \operatorname{sen}^2 x)$

o) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x.\sec^2 x - 2$

59) Se $\sec x + \operatorname{cossec} x = \sqrt{2}$ demonstre que $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

60) Se x é um arco do 2º quadrante, demonstre que $\sqrt{\dfrac{2 + 2.\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 1$

61) Se x é um arco tal que $0 < x < \pi/4$, demonstre que :

$$\sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}\left(1 + \sqrt{1 - 4.\operatorname{sen}^2 x.\cos^2 x}\right) = 2.\operatorname{cotg} x$$

62) Determine os valores de A, B e C de modo que a identidade

$$\frac{3}{1+\cos x} + \frac{3}{\sec x - 1} = A + B(\operatorname{tg} x)^C$$

seja válida para todo $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$.

63) Se $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$ demonstre que $\sec^4 x - \operatorname{cot}^2 x = 1$

64) Se $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = \sec x$, demonstre que $\sec^3 x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x$

65) Calcule o valor de $\sec^4 x - \sec^2 x$ sabendo que $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 1$.

66) Dado que $\operatorname{sen}^3 x - \cos^5 x = 0$, demonstre que $\operatorname{tg}^{10} x + 2.\operatorname{tg}^8 x + \operatorname{tg}^6 x = 1$

67) Calcule o valor de $\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x$ sabendo que

$$\sec^4 x + \operatorname{cossec}^4 x - 2.\sec^2 x - 2.\operatorname{cossec}^2 x = 2.$$

68) Se $\text{sen}^3 x + \text{sen } x = 1$, prove que $\text{cossec}^5 x - \text{cotg}^2 x - \text{cossec}^4 x = 1$.

69) Dado que $\begin{cases} a.\text{sen } x + b.\cos x = c \\ (a+b+c)(a+b-c) = 2ab \end{cases}$, demonstre que $\dfrac{a^3}{\text{sen } x} + \dfrac{b^3}{\cos c} = c^3$.

70) Dado que x é um arco do 3º quadrante e que $11.\text{sen } x + 60.\cos x = -61$, demonstre que $\text{cossec } x + \text{cotg } x = -\dfrac{1}{11}$.

71) Determine o valor de a de modo que a expressão seguinte seja uma identidade:

$$\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x} = (2a-3)(\sec x + \text{tg } x)^2$$

72) Determine o valor de k de modo que a expressão seguinte não dependa de x:

$$(\text{sen}^4 x - \cos^4 x)^2 - k\left(\frac{1+\text{tg}^6 x}{\sec^6 x}\right)$$

73) Se $\sqrt{7}\cos x + 1 = \text{tg}^2 x$ demonstre que $\text{tg}^6 x - \text{tg}^4 x - \text{tg}^2 x = 6$

74) Sabe-se que $\sqrt[3]{\text{sen } x} + \sqrt[3]{\text{cotg } x} = \sqrt[3]{\text{tg } x}$ e $\text{sen } x + \text{cotg } x - \text{tg } x = m$. Calcule o valor de sen x em função de m.

75) Dado que $(1 + \text{sen } a)(1 + \text{sen } b)(1 + \text{sen } c) = \cos a.\cos b.\cos c$, simplifique o valor de $(1 - \text{sen } a)(1 - \text{sen } b)(1 - \text{sen } c)$

76) Dado que $(1 + \cos a)(1 + \cos b)(1 + \cos c) = (1 - \cos a)(1 - \cos b)(1 - \cos c)$, prove que cada um destes membros é igual a $\text{sen } a.\text{sen } b.\text{sen } c$.

77) Elimine x das expressões seguintes, obtendo uma relação entre as constantes envolvidas nas identidades.

a) $\begin{cases} \sec^4 x + \text{tg}^4 x = m \\ \text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x = n \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{cossec } x - \text{sen } x = m \\ \sec x - \cos x = p \\ \text{tg } x - \text{cotg } x = p \end{cases}$

c) $\begin{cases} a.\text{tg}^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \\ b.\sec^2 x - \text{cossec}^2 x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{\text{tg}\,x} - \sqrt{\text{cotg}\,x} = m \\ \text{sen}\,x.\cos x = n \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sec x + \text{tg}\,x = a \\ \sqrt{\sec x} + \sqrt{\text{tg}\,x} = b \end{cases}$

f) $\begin{cases} m^3.\text{sen}\,x - n^3.\cos x = 1 \\ m^3.\text{cossec}\,x - n^3.\sec x = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a.\cos x + b.\text{sen}\,y + c = 0 \\ a'.\cos x + b'.\text{sen}\,y + c' = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a.\cos^2 x + b.\text{sen}^2 x = c \\ (b-c)\,\text{tg}^2 x + (c-a)\,\text{cotg}^2 x = d \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3.\text{sen}\,x + 2.\cos x = a \\ 2.\text{sen}\,x + 3.\cos x = b \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3.\cos x + \text{cotg}\,x = a \\ 4.\cos x - \text{cotg}\,x = b \end{cases}$

k) $\begin{cases} a.\text{sen}\,x(4.\cos^2 x - 1) = c \\ b.\cos x(4.\text{sen}^2 x - 1) = d \end{cases}$

l) $\begin{cases} 1 + \text{sen}^2 x = a.\text{sen}\,x \\ 1 + \cos^2 x = b.\cos x \end{cases}$

m) $\begin{cases} m.\cos x + n.\text{sen}\,x = a.\text{cossec}\,x \\ m.\text{sen}\,x - n.\cos x = a.\text{cossec}\,x.\text{cotg}\,x \end{cases}$

n) $\begin{cases} a.\sec x - b.\text{cossec}\,x = c^2 \\ a.\sec x.\text{tg}\,x + b.\text{cossec}\,x.\text{cotg}\,x = 0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} \dfrac{m}{a}\cos x + \dfrac{n}{b}\text{sen}\,x = 1 \\ m.\text{sen}\,x - n.\cos x = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2 x + b^2\cos^2 x} \end{cases}$

p) $\begin{cases} a.\text{sen}\,x + b.\cos x = c \\ a.\text{cossec}\,x + b.\sec x = d \end{cases}$

78) Elimine α e β nas expressões seguintes obtendo uma relação entre a, b e c:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = a \\ \cos\alpha + \cos\beta = b \\ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = c.\sec\alpha.\sec\beta \end{cases}$$

79) Elimine α e β nas expressões seguintes, obtendo uma relação entre s, t e k:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = s \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = t \\ \sec\alpha + \sec\beta = k \end{cases}$$

80) Elimine α e β nas expressões seguintes, obtendo uma relação entre x, y e a:

$$\begin{cases} y.\operatorname{tg}\alpha = a + x.\operatorname{tg}^2\alpha \\ y.\operatorname{tg}\beta = a + x.\operatorname{tg}^2\beta \\ \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta = -1 \end{cases}$$

81) Elimine α e β nas expressões seguintes, obtendo uma relação entre a, b e c:

$$\frac{a.\operatorname{sen}^2\alpha + b.\operatorname{sen}^2\beta}{b.\cos^2\alpha + c.\cos^2\beta} = \frac{b.\operatorname{sen}^2\alpha + c.\operatorname{sen}^2\beta}{c.\cos^2\alpha + a.\cos^2\beta} = \frac{c.\operatorname{sen}^2\alpha + a.\operatorname{sen}^2\beta}{a.\cos^2\alpha + b.\cos^2\beta}$$

82) Elimine α e β nas expressões seguintes, obtendo uma relação entre x, y, a e b:

$$\begin{cases} \frac{x}{a}\cos\beta + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\beta = 1 \\ \frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\operatorname{sen}\alpha = 1 \\ b^2\cos\alpha.\cos\beta + a^2\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases}$$

83) Se $\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = -1$, prove que $\frac{\cos^3 y}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x} = 1$.

Transformações Trigonométricas

3.1. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

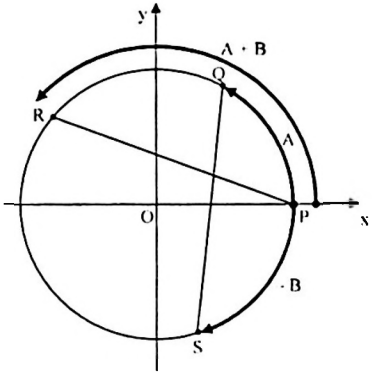
No capítulo 1 deste livro, sobre triângulos retângulos, foram demonstradas fórmulas para o seno e cossenos da soma e da subtração de ângulos de um triângulo menores que 90°. Entretanto, as fórmulas demonstradas no capítulo 1 são válidas para arcos que pertençam a quaisquer quadrantes do ciclo trigonométrico. Verifique as demonstrações das expressões a seguir:

3.1.1. Cosseno da Soma de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, segue que

$$\cos (A + B) = \cos A.\cos B - \text{sen } A.\text{sen } B.$$

Demonstração:



Considere os arcos A, A + B e – B no ciclo trigonométrico, todos com origem em P e extremos em Q, R e S, respectivamente, conforme ilustrado na figura ao lado. As coordenadas dos pontos P, Q, R e S são:

P(1, 0), Q(cos A, sen A),
R(cos (A + B), sen (A + B)), S(cos B, – sen B)

Perceba que os ângulos centrais ∠ROP e ∠QOS são iguais a A + B, fazendo com que as cordas $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ são congruentes:

$$\overline{PR}^2 \equiv \overline{QS}^2 \Rightarrow (x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2 = (x_S - x_Q)^2 + (y_S - y_Q)^2 \Rightarrow$$

$$[(\cos (A + B) - 1]^2 + [\text{sen } (A + B) - 0]^2 = (\cos B - \cos A)^2 + (-\text{sen } B - \text{sen } A)^2 \Rightarrow$$

$$\cos^2 (A + B) - 2.\cos (A + B) + 1 + \text{sen}^2 (A + B) =$$

$$= \cos^2 B - 2.\cos B.\cos A + \cos^2 A + \text{sen}^2 A + 2.\text{sen } A.\text{sen } B + \text{sen}^2 B \Rightarrow$$

$$2 - 2.\cos (A + B) = 2 - \cos B.\cos A + 2.\text{sen } A.\text{sen } B \Rightarrow$$

$$\cos (A + B) = \cos A.\cos B - \text{sen } A.\text{sen } B$$

3.1.2. Cosseno da Diferença de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, segue que

$$\cos (A - B) = \cos A.\cos B + \text{sen } A.\text{sen } B.$$

Demonstração:

cos (A – B) = cos [A + (– B)] = cos A.cos (– B) – sen A.sen (– B)

Sabe-se que cos (– B) = cos B e sen (– B) = – sen B

Assim: cos (A – B) = cos A.cos B + sen A.sen B.

3.1.3. Seno da Soma de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, segue que

$$\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,A.\cos B + \text{sen}\,B.\cos A.$$

Demonstração:

$\text{sen}\,(A + B) = \cos(\pi/2 - A - B) = \cos|(\pi/2 - A) - B| =$

$= \cos(\pi/2 - A)\cos B + \text{sen}\,(\pi/2 - A).\text{sen}\,B = \text{sen}\,A.\cos B + \text{sen}\,B.\cos A.$

3.1.4. Seno da Diferença de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, segue que

$$\text{sen}\,(A - B) = \text{sen}\,A.\cos B - \text{sen}\,B.\cos A.$$

Demonstração:

$\text{sen}\,(A - B) = \text{sen}\,|A + (-B)| = \text{sen}\,A.\cos(-B) + \text{sen}\,(-B).\cos A =$

$= \text{sen}\,A.\cos B - \text{sen}\,B.\cos A$

3.1.5. Tangente da Soma de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $B \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $A + B \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, segue que

$$\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A.\text{tg}\,B}.$$

Demonstração:

$$\text{tg}(A + B) = \frac{\text{sen}(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\text{sen}\,A.\cos B + \text{sen}\,B.\cos A}{\cos A.\cos B - \text{sen}\,A.\text{sen}\,B} = \frac{\dfrac{\text{sen}\,A.\cos B + \text{sen}\,B.\cos A}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B - \text{sen}\,A.\text{sen}\,B}{\cos A.\cos B}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,A}{\cos A} + \dfrac{\text{sen}\,B}{\cos B}}{1 - \dfrac{\text{sen}\,A}{\cos A}.\dfrac{\text{sen}\,B}{\cos B}} = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A.\text{tg}\,B}$$

3.1.6. Tangente da Diferença de Dois Arcos

Teorema: Se A e B são arcos no ciclo trigonométrico, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $B \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $A - B \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, segue que

$$\text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg}\,A - \text{tg}\,B}{1 + \text{tg}\,A.\text{tg}\,B}.$$

Demonstração:

$$\operatorname{tg}(A-B)=\operatorname{tg}[A+(-B)]=\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}(-B)}{1-\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}(-B)}=\frac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B}$$

3.1.7. Seno da Soma de Três Arcos

Teorema: Se A, B e C são arcos no ciclo trigonométrico, segue que

$$\operatorname{sen}(A+B+C)=$$

$$=\operatorname{sen}A.\cos B.\cos C-\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C+\cos A.\operatorname{sen}B.\cos C+\cos A.\cos B.\operatorname{sen}C$$

Demonstração:

$\operatorname{sen}(A+B+C)=\operatorname{sen}[A+(B+C)]=\operatorname{sen}A.\cos(B+C)+\operatorname{sen}(B+C).\cos A=$

$=\operatorname{sen}A[\cos B.\cos C-\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C]+[\operatorname{sen}B.\cos C+\operatorname{sen}C.\cos B]\cos A=$

$=\operatorname{sen}A.\cos B.\cos C-\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B.\operatorname{sen}C+\cos A.\operatorname{sen}B.\cos C+\cos A.\cos B.\operatorname{sen}C$

Todas as expressões do tipo $\operatorname{sen}(\pm A\pm B\pm C)$, $\cos(\pm A\pm B\pm C)$, $\operatorname{tg}(\pm A\pm B\pm C)$ podem ser determinadas de forma análoga.

3.1.8. Expressões do tipo a.sen x + b.cos x, a e b ∈ IR.

Teorema: Toda expressão da forma a.sen x + b.cos x, a e b ∈ IR, pode ser escrita da forma k.sen (x + θ), k ∈ IR.

Demonstração:

Perceba que sempre que $a\neq 0$ e $b\neq 0$ pode-se fazer:

$$a.\operatorname{sen}x+b.\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$, então existe um arco θ de modo que $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Deste modo: $a.\operatorname{sen}x+b.\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta.\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\theta.\cos x\right)\Rightarrow$

$a.\operatorname{sen}x+b.\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\theta)$, onde $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Esta expressão permite calcular os valores mínimos e máximos, apenas em função de a e b, de qualquer expressão da forma a.sen x + b.cos x.

Como $-1\leq\operatorname{sen}(x+0)\leq 1$ e $\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$ segue que

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leq a.\operatorname{sen}x+b.\cos x\leq\sqrt{a^2+b^2}$$

3.2. ARCO DUPLO

3.2.1. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, então **sen 2x = 2.sen x.cos x.**
Demonstração:
Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico:

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen } A.\cos B + \text{sen } B.\cos A$$

Fazendo A = B = x conclui-se que sen 2x = 2.sen x.cos x

3.2.2. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, então **cos 2x = cos²x – sen² x.**
Demonstração:
Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico:

$$\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \text{sen } A.\text{sen } B$$

Fazendo A = B = x conclui-se que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
Observação: Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, outras duas maneiras de expressar cos 2x são **cos 2x = 2.cos² x – 1** ou **cos 2x = 1 – 2.sen² x.**

3.2.3. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$, então $\text{tg}\,2x = \frac{2.\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2 x}$.

Demonstração:
Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico: $\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}\,A + \text{tg}\,B}{1 - \text{tg}\,A.\text{tg}\,B}$.

Fazendo A = B = x: $\text{tg}\,2x = \frac{2.\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2 x}$.

3.3. ARCO TRIPLO

3.3.1. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, então **sen 3x = 3.sen x – 4.sen³ x.**
Demonstração:
Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico:

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen } A.\cos B + \text{sen } B.\cos A$$

Fazendo A = 2x e B = x: $\text{sen } 3x = \text{sen}(2x + x) = \text{sen } 2x.\cos x + \text{sen } x.\cos 2x =$
$= 2.\text{sen } x.\cos^2 x + \text{sen } x(1 - 2.\text{sen}^2 x) = 2.\text{sen } x(1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen } x - 2.\text{sen}^3 x =$
$= 2.\text{sen } x - 2.\text{sen}^3 x + \text{sen } x - 2.\text{sen}^3 x = 3.\text{sen } x - 4.\text{sen}^3 x.$

3.3.1. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, então **cos 3x = 4.cos³ x – 3.cos x.**
Demonstração:
Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico:

$$\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \text{sen } A.\text{sen } B$$

Fazendo A = 2x e B = x: $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x.\cos x - \text{sen } x.\text{sen } 2x =$
$= (2.\cos^2 x - 1).\cos x - 2.\text{sen}^2 x.\cos x = 2.\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x =$
$= 2.\cos^3 x - \cos x - 2.\cos x + 2.\cos^3 x = 4.\cos^3 x - 3.\cos x$

3.3.3. Se x é um arco do ciclo trigonométrico, então $\mathrm{tg}\,3x = \dfrac{3.\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3.\mathrm{tg}^2 x}$.

Demonstração:

Sabe-se que, se A e B são arcos no ciclo trigonométrico: $\mathrm{tg}(A+B) = \dfrac{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B}{1 - \mathrm{tg}\,A.\mathrm{tg}\,B}$.

Fazendo A = 2x e B = x:

$$\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}(2x+x) = \frac{\mathrm{tg}\,2x + \mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}\,2x.\mathrm{tg}\,x} = \frac{\dfrac{2\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x} + \mathrm{tg}\,x}{1 - \dfrac{2\mathrm{tg}^2 x}{1-\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{3.\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3.\mathrm{tg}^2 x}$$

3.4. ARCOS MÚLTIPLOS

O método utilizado para determinar as funções circulares de arcos duplos e arcos triplos **não é** o que se pode chamar de **prático**. Para calcular cos 3x, por exemplo, é necessário calcular anteriormente os valores de sen 2x e cos 2x. Analogamente, pelo método clássico, a maneira mais rápida para calcular o valor de cos 7x é conhecendo os valores de cos 3x, sen 3x, cos 4x e cos 4x para fazer:

$$\cos 7x = \cos(4x + 3x) = \cos 4x.\cos 3x - \mathrm{sen}\,4x.\mathrm{sen}\,3x.$$

Por outro lado, é possível calcular diretamente o valor do seno ou cosseno de um arco da forma nx, $n \in \mathbb{N}$, sem que seja necessário conhecer as expressões do seno ou cosseno de arcos menores de nx. Tal procedimento utiliza conceitos de números complexos, conteúdo constante no volume 4 desta coleção.

Pela 1ª Lei de Moivre sabe-se que $(\cos x + i.\mathrm{sen}\,x)^n = \cos nx + i.\mathrm{sen}\,nx$, $n \in \mathbb{N}$ e $i^2 = -1$. Desta forma, cos nx é igual à parte real de $(\cos x + i.\mathrm{sen}\,x)^n$. Fazendo n = 7 na expressão da 1ª Lei de Moivre:

$$\cos 7x = \mathrm{IRe}[(\cos x + i.\mathrm{sen}\,x)^7] =$$
$$= \binom{7}{0}\cos^7 x - \binom{7}{2}\cos^5 x.\mathrm{sen}^2 x + \binom{7}{4}\cos^3 x.\mathrm{sen}^4 x - \binom{7}{6}\cos x.\mathrm{sen}^6 x =$$
$$= \cos^7 x - 21\cos^5 x(1-\cos^2 x) + 35\cos^3 x.(1-\cos^2 x)^2 - 7\cos x(1-\cos^2 x)^3 =$$
$$= \cos^7 x - 21\cos^5 x + 21\cos^7 x + 35\cos^3 x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) -$$
$$- 7\cos x(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) =$$
$$= 22\cos^7 x - 21\cos^5 x + 35\cos^3 x - 70\cos^5 x + 35\cos^7 x -$$
$$- 7\cos x + 21\cos^3 x - 21\cos^5 x + 7\cos^7 x =$$
$$= 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$$

Utilizando essa estratégia é possível determinar expressões de cos nx e sen nx em função de sen x e/ou cos x, como pode ser observado na tabela abaixo:

$\cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$

$\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$

$\cos 6x = -1 + 18\cos^2 x - 48\cos^4 x + 32\cos^6 x$

$\cos 7x = -7\cos x + 56\cos^3 x - 112\cos^5 x + 64\cos^7 x$

$\cos 8x = 1 - 32\cos^2 x + 160\cos^4 x - 256\cos^6 x + 128\cos^8 x$

$\cos 9x = 9\cos x - 120\cos^3 x + 432\cos^5 x - 576\cos^7 x + 256\cos^9 x$

$\cos 10x = -1 + 50\cos^2 x - 400\cos^4 x + 1120\cos^6 x - 1280\cos^8 x + 512\cos^{10} x$

$\cos 11x = -11\cos x + 220\cos^3 x - 1232\cos^5 x + 2816\cos^7 x - 2816\cos^9 x + 1024\cos^{11} x$

$\cos 12x = 1 - 72\cos^2 x + 840\cos^4 x - 3584\cos^6 x + 6912\cos^8 x - 6144\cos^{10} x + 2048\cos^{12} x$

$\operatorname{sen} 4x = (\operatorname{sen} x)(-4\cos x + 8\cos^3 x)$

$\operatorname{sen} 5x = (\operatorname{sen} x)(1 - 12\cos^2 x + 16\cos^4 x)$

$\operatorname{sen} 6x = (\operatorname{sen} x)(6\cos x - 32\cos^3 x + 32\cos^5 x)$

$\operatorname{sen} 7x = (\operatorname{sen} x)(-1 + 24\cos^2 x - 80\cos^4 x + 64\cos^6 x)$

$\operatorname{sen} 8x = (\operatorname{sen} x)(-8\cos x + 80\cos^3 x - 192\cos^5 x + 128\cos^7 x)$

$\operatorname{sen} 9x = (\operatorname{sen} x)(1 - 40\cos^2 x + 240\cos^4 x - 448\cos^6 x + 256\cos^8 x)$

$\operatorname{sen} 10x = (\operatorname{sen} x)(10\cos x - 160\cos^3 x + 672\cos^5 x - 1024\cos^7 x + 512\cos^9 x)$

$\operatorname{sen} 11x = (\operatorname{sen} x)(-1 + 60\cos^2 x - 560\cos^4 x + 1792\cos^6 x - 2304\cos^8 x + 1024\cos^{10} x)$

$\operatorname{sen} 12x = (\operatorname{sen} x)(-12\cos x + 280\cos^3 x - 1792\cos^5 x + 4608\cos^7 x - 5120\cos^9 x + 2048\cos^{11} x)$

3.5. ARCO METADE

3.5.1. Teorema: Se x é um arco do ciclo trigonométrico: $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Demonstração:

Sabe-se que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Fazendo $\theta = \frac{x}{2}$:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

O sinal é definido de acordo com o quadrante do arco $\frac{x}{2}$. Se $\frac{x}{2}$ pertence ao 1° ou 4° quadrantes o sinal é + e se $\frac{x}{2}$ pertence ao 2° ou 3° quadrantes o sinal é –.

3.5.2. Teorema: Se x é um arco do ciclo trigonométrico: $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

Demonstração:

Sabe-se que $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1-\cos^2\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

O sinal é definido de acordo com o quadrante do arco $\frac{x}{2}$. Se $\frac{x}{2}$ pertence ao 1° ou 2° quadrantes o sinal é + e se $\frac{x}{2}$ pertence ao 3° ou 4° quadrantes o sinal é –.

3.5.3. Teorema: Se x é um arco do ciclo trigonométrico: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Demonstração:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

O sinal é definido de acordo com o quadrante do arco $\frac{x}{2}$. Se $\frac{x}{2}$ pertence ao 1° ou 3° quadrantes o sinal é + e se $\frac{x}{2}$ pertence ao 2° ou 4° quadrantes o sinal é –.

3.6. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Sabe-se que:

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}A.\cos B + \operatorname{sen}B.\cos A \quad (1)$$
$$\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen}A.\cos B - \operatorname{sen}B.\cos A \quad (2)$$
$$\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B \quad (3)$$
$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B \quad (4)$$

Note que:

$$(1)+(2):\ \operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B) = 2.\operatorname{sen}A.\cos B$$
$$(1)-(2):\ \operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B) = 2.\operatorname{sen}B.\cos A$$
$$(3)+(4):\ \cos(A+B)+\cos(A-B) = 2.\cos A.\cos B$$
$$(3)-(4):\ \cos(A+B)-\cos(A-B) = -2.\operatorname{sen}A.\operatorname{sen}B$$

Fazendo a mudança de variáveis $A + B = x$ e $A - B = y$ obtém-se $A = \frac{x+y}{2}$ e $B = \frac{x-y}{2}$. Substituindo esta mudança nas últimas equações se obtém as fórmulas de transformação em produto:

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

As fórmulas de transformação em produto permitem calcular o valor de expressões trigonométricas que envolvem arcos não notáveis. Por exemplo, é possível calcular o valor de $P = \operatorname{sen}\frac{\pi}{24}.\cos\frac{5\pi}{24}$. Fazendo $\begin{cases} \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{24} \\ \frac{x+y}{2} = \frac{5\pi}{24} \end{cases}$ encontra-se $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{6}$. Substituindo em $\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}.\cos\frac{5\pi}{24} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{24}.\cos\frac{5\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

3.7. IDENTIDADES COM ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO

Existem relações que podem ser estabelecidas entre funções trigonométricas dos ângulos de um triângulo. Estas relações podem ser divididas em duas categorias:

1) Relações do tipo SE: As relações que são válidas se A, B e C são ângulos de um triângulo, ou seja, se $A + B + C = \pi$;

2) Relações do tipo SE E SOMENTE SE: As relações que, além de serem válidas para todo triângulo ABC, a volta do teorema também é válida, ou seja, que garantem a existência de ângulos A, B e C que formam um triângulo.

3.7.1. Relações do Tipo SE

3.7.1.1. Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\textbf{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4\text{sen } A.\text{sen } B.\text{sen } C$$

Demonstração:

$\text{sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 2.\text{sen } (A + B).\cos (A - B) + 2\text{sen } C.\cos C =$

$= 2.\text{sen } (\pi - C).\cos (A - B) + 2\text{sen } C.\cos C = 2.\text{sen } C.\cos (A - B) + 2\text{sen } C.\cos C =$

$$= 2\text{sen } C[\cos (A - B) + \cos C] = 2\text{sen } C.2.\cos\left(\frac{A - B + C}{2}\right).\cos\left(\frac{-A + B + C}{2}\right) =$$

$$= 4\text{sen } C.\cos\left(\frac{\pi - 2B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi - 2A}{2}\right) = 4\text{sen } A.\text{sen } B.\text{sen } C$$

3.7.1.2. Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\textbf{cos } 2A + \text{cos } 2B + \text{cos } 2C = -1 - 4\text{cos } A.\text{cos } B.\text{cos } C$$

Demonstração:

$\text{cos } 2A + \text{cos } 2B + \text{cos } 2C = 2.\text{cos } (A + B).\text{cos } (A - B) + 2\text{cos}^2 C - 1 =$

$= 2.\text{cos } (\pi - C).\text{cos } (A - B) + 2\text{cos}^2 C - 1 = -2.\text{cos } C.\text{cos } (A - B) + 2\text{cos}^2 C - 1 =$

$= 2\text{cos } C[\text{cos } C - \text{cos } (A - B)] - 1 =$

$$= -1 - 2\text{cos } C.2.\text{sen}\left(\frac{A - B + C}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{-A + B + C}{2}\right) =$$

$$= -1 - 4\text{cos } C.\text{sen}\left(\frac{\pi - 2B}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{\pi - 2C}{2}\right) = -1 - 4\text{cos } A.\text{cos } B.\text{cos } C$$

3.7.1.3. Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\textbf{cos } A + \text{cos } B + \text{cos } C = 1 + \text{sen}\frac{A}{2}\text{sen}\frac{B}{2}\text{sen}\frac{C}{2}$$

Demonstração:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2.\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\text{sen}^2\frac{C}{2} =$$

$$= 2.\cos\frac{\pi-C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\text{sen}^2\frac{C}{2} + 1 = 2.\text{sen}\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\text{sen}^2\frac{C}{2} + 1 =$$

$$= 2\text{sen}\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \text{sen}\frac{C}{2}\right] + 1 = 2\text{sen}\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1 =$$

$$= 1 + 2\text{sen}\frac{C}{2}.2.\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = 1 + 4\text{sen}\frac{A}{2}.\text{sen}\frac{B}{2}.\text{sen}\frac{C}{2}$$

3.7.2. Relações do Tipo SE E SOMENTE SE

3.7.2.1. (i) Em um triângulo acutângulo ABC é válida a relação

$$\textbf{tg A + tg B + tg C = tg A.tg B.tg C}$$

(ii) Se x, y e z são números reais positivos tais que **x + y + z = x.y.z**, então existe um triângulo ABC acutângulo tal que **x = tg A, y = tg B e z = tg C.**

Demonstração:

(i) $A + B = \pi - C \Rightarrow \text{tg}(A+B) = \text{tg}(\pi - C) \Rightarrow \dfrac{\text{tg A} + \text{tg B}}{1 - \text{tg A.tg B}} = -\text{tg C} \Rightarrow$

$\text{tg A} + \text{tg B} = -\text{tg C} + \text{tg A.tg B. tg C} \Rightarrow \text{tg A} + \text{tg B} + \text{tg C} = \text{tg A.tg B.tg C}$

(ii) $x + y + z = x.y.z \Rightarrow y + z = x(yz - 1) \Rightarrow x = \dfrac{y+z}{yz-1}$

Sabe-se que tg θ pode assumir qualquer valor real. Assim, pode-se fazer x = tg A, y = tg B e z = tg C. Basta agora descobrir a relação entre A, B e C. Note que:

$$\text{tg A} = \frac{\text{tg B} + \text{tg C}}{\text{tg B.tg C} - 1} = -\text{tg}(B + C)$$

Como foi visto no item sobre redução ao 1° quadrante, se tg α = – tg β então α + β = kπ, k ∈ ℤ. Desta forma, segue que A + B + C = kπ. Como x, y e z são positivos então $0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2}$, onde segue que $0 < A + B + C < \dfrac{3\pi}{2}$, fazendo com que a única possibilidade seja A + B + C = π, implicando que existe um triângulo com ângulos A, B e C.

Observação: Como $\text{cotg}\,0 = \dfrac{1}{\text{tg}\,0}$, então a relação é equivalente a

$$\textbf{cotg A.cotg B + cotg A.cotg C + cotg B.cotg C = 1}$$

É válida também a volta do teorema. Assim, se existem números reais positivos x, y e z tais que **xy + xz + yz = 1** então existe um triângulo ABC acutângulo tal que **x = cotg A, y = cotg B e z = cotg C.**

3.7.2.2. (i) Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\text{sen}^2\frac{A}{2}+\text{sen}^2\frac{B}{2}+\text{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}=1$$

(ii) Se x, y e z são números reais positivos tais que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x.y.z = 1$, então existe um triângulo ABC tal que $x = \text{sen}\frac{A}{2}$, $y = \text{sen}\frac{B}{2}$ e $z = \text{sen}\frac{C}{2}$.

Demonstração:

(i) Como $\text{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$: $\text{sen}^2\frac{A}{2}+\text{sen}^2\frac{B}{2}+\text{sen}^2\frac{C}{2}=\frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}$

Como $\cos A+\cos B+\cos C=1+\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$ então

$$\text{sen}^2\frac{A}{2}+\text{sen}^2\frac{B}{2}+\text{sen}^2\frac{C}{2}+2\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}=1$$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \Rightarrow x^2 + (2yz)x + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$$x=\frac{-2yz\pm\sqrt{4y^2z^2-4(y^2+z^2-1)}}{2}=-yz\pm\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}$$

Como $x > 0$ então a única solução possível é $x=-yz+\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}$

Note que $(1 - y^2)(1 - z^2) > 0$ somente se $0 < y, z < 1$ ou se $y, z > 1$. Porém, se y e z forem maiores que 1, x será negativo. Assim, a única possibilidade é $0 < y, z < 1$. Desta forma, existem os ângulos B e C, com $0 < B, C < \pi/2$, de modo que $y = \text{sen}\frac{B}{2}$ e $z = \text{sen}\frac{C}{2}$. Fazendo essa substituição na solução encontrada para x:

$$x=-yz+\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}=-\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

Como $1 \geq y^2 + z^2 = \text{sen}^2\frac{B}{2}+\text{sen}^2\frac{C}{2}$, tem-se que $\cos^2\frac{B}{2}\geq\text{sen}^2\frac{B}{2}$.

Como $0 < B, C < \pi/2$, segue diretamente que $\cos\frac{B}{2}>\text{sen}\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$, implicando que $\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$, ou seja, $B + C < \pi$. Como $x = \cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$, então $0 < x < 1$, fazendo com que exista um ângulo A, com $0 < A < \pi/2$, tal que $x=\text{sen}\frac{A}{2}$. Desta maneira $x=\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$, implicando que $A + B + C = \pi$, fazendo com que exista um triângulo com ângulos A, B e C.

Observação: Como $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$ a relação é idêntica a

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}=2$$

3.7.2.3. (i) Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$$

(ii) Se x, y e z são números reais tais que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x.y.z = 1$, então existe um triângulo ABC tal que $x = \cos A$, $y = \cos B$ e $z = \cos C$.

Demonstração:

(i) Desde que $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, então

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C}{2}$$

Como já foi provado que $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$, segue diretamente que $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$.

(ii) A demonstração é praticamente idêntica a do item 3.7.2.2 parte (ii).

Observação: Como $\cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$ a relação é idêntica a

$$\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2\cos A.\cos B.\cos C = 2$$

3.7.2.4. (i) Em um triângulo ABC é válida a relação

$$\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1$$

(ii) Se x, y e z são números reais positivos tais que $xy + xz + yz = 1$, então existe um triângulo ABC tal que $x = \text{tg}\frac{A}{2}$, $y = \text{tg}\frac{B}{2}$ e $z = \text{tg}\frac{C}{2}$.

Demonstração:

(i) $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right) \Rightarrow \frac{\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}}{1-\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}} \Rightarrow$

$$\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} \Rightarrow \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1$$

(ii) $xy + xz + yz = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y+z}{1-yz}$ (1)

Sabe-se que tg θ pode assumir qualquer valor real. Assim, pode-se fazer $x = \text{tg}\frac{A}{2}$, $y = \text{tg}\frac{B}{2}$ e $z = \text{tg}\frac{C}{2}$. Como x, y e z são positivos, segue que A, B e C são ângulos do 1º quadrante. Basta agora descobrir a relação entre A, B e C. Substituindo na expressão (1):

$$\frac{1}{\text{tg}\frac{A}{2}} = \frac{\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}}{1-\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

No capítulo anterior, verificou que dois arcos α e β possuem mesma tangente se $\alpha = \beta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad A + B + C = (2k + 1)\pi$$

Como $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$, então $0 < A + B + C < \frac{3\pi}{2}$, fazendo com que a única possibilidade seja $A + B + C = \pi$.

Observação:

Como $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$, então a relação é equivalente a

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

É válida também a volta do teorema. Assim, se existem números reais positivos x, y e z tais que $x + y + z = xyz$ então existe um triângulo ABC acutângulo tal que $x = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$, $y = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}$ e $z = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$.

Em resumo, em um triângulo ABC são válidas as relações::

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C \text{ (se } \Delta ABC \text{ acutângulo)}$$

$$\operatorname{cotg} A.\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A.\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} B.\operatorname{cotg} C = 1 \text{ (se } \Delta ABC \text{ acutângulo)}$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = 2$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2\cos A.\cos B.\cos C = 2$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1 \text{ (se } \Delta ABC \text{ acutângulo)}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \text{ (se } \Delta ABC \text{ acutângulo)}$$

FORMULÁRIO DAS TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo foram apresentadas várias fórmulas, todas muito úteis na resolução de problemas de trigonometria. Abaixo estão listadas todas as fórmulas que o leitor deve memorizar:

$$\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$$
$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$$
$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A.\cos B + \operatorname{sen} B.\cos A$$
$$\operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A.\cos B - \operatorname{sen} B.\cos A$$
$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B}$$
$$\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B}$$
$$\operatorname{sen} 2x = 2.\operatorname{sen} x.\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2.\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$
$$\operatorname{sen} 3x = 3.\operatorname{sen} x - 4.\operatorname{sen}^3 x$$
$$\cos 3x = 4.\cos^3 x - 3.\cos x$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3.\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3.\operatorname{tg}^2 x}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1) (Ciaba-07) Sejam α um arco do 1° quadrante e β um arco do 2° quadrante, tais que $\cos\alpha = 0{,}8$ e $\operatorname{sen}\beta = 0{,}6$. O valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ é

A) 1,00 B) 0,96 C) 0,70 D) 0,48 E) 0,00

Solução: Alternativa E

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-0{,}8^2} = \pm\sqrt{1-0{,}64} = \pm\sqrt{0{,}36} = \pm 0{,}6$

Como $\alpha \in$ 1° quadrante, segue que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$

$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \pm\sqrt{1-0{,}6^2} = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$

Como $\beta \in 2^o$ quadrante, segue que $\cos\beta = -0{,}8$

Assim: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\beta.\cos\alpha = 0.6(-0{,}8) + 0{,}6.0.8 = 0$

2) (Fuvest-94) O valor de $(\operatorname{tg}10^o + \operatorname{cotg}10^o)\operatorname{sen}20^o$ é:

a) 1/2 b) 1 c) 2 d) 5/2 e) 4

Solução: Alternativa C

$$(\operatorname{tg}10^o + \operatorname{cotg}10^o)\operatorname{sen}20^o = \left(\frac{\operatorname{sen}10^o}{\cos 10^o} + \frac{\cos 10^o}{\operatorname{sen}10^o}\right) 2\operatorname{sen}10^o\cos 10^o =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}^2 10^o + \cos 10^2}{\cancel{\operatorname{sen}10^o}\ \cancel{\cos 10^o}}\right) 2\cancel{\operatorname{sen}10^o}\ \cancel{\cos 10^o} = 1.2 = 2$$

3) (AFA-03) Dados que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tem-se que $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ vale.

a) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Solução: Alternativa D

Desenvolvendo o valor de $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

4) (ITA-95) A expressão $\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, idêntica a:

a) $\sec\theta/2$ b) $\operatorname{cosec}\theta/2$ c) $\operatorname{cotg}\theta/2$ d) $\operatorname{tg}\theta/2$ e) $\cos\theta/2$

Solução: Alternativa D

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2.\operatorname{sen}\theta/2.\cos\theta/2}{2.\cos^2\theta/2} = \operatorname{tg}\theta/2$$

5) (ITA-16) Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{7}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, então sen 3x é igual a

a) $-\frac{\sqrt{14}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{14}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ d) $-\frac{\sqrt{14}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{14}}{6}$

Solução: Alternativa B

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{7} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = -3\frac{\sqrt{14}}{4} + 4\frac{14}{4^2}\frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

6) (ITA-03) Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2\,[\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:
a) $2^{-4}\,[\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
b) $2^{-4}\,|2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)|$.
c) $2^{-4}\,[-\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
d) $2^{-4}\,[-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
e) $2^{-4}\,|\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)|$.
Solução: Alternativa B
$[\cos 2x]^2[\operatorname{sen} 2x]^2 \operatorname{sen} x = [\cos 2x \cdot \operatorname{sen} 2x]^2.\operatorname{sen} x = [2^{-1}\operatorname{sen} 4x]^2.\operatorname{sen} x =$
$2^{-2}.\operatorname{sen} 4x.(\operatorname{sen} 4x.\operatorname{sen} x) = 2^{-2}.\operatorname{sen} 4x.[-2^{-1}.(\cos 5x - \cos 3x)] =$
$-2^{-3}.[\operatorname{sen} 4x.\cos 5x - \operatorname{sen} 4x.\cos 3x] = -2^{-3}.[2^{-1}.(\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen}(-x))] =$
$= -2^{-4}.(\operatorname{sen} 9x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x) = 2^{-4}.(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 9x)$

7) (ITA-99) Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4\operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$$

a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Solução: Alternativa B
$4.\operatorname{tg}^4 x = \sec^4 x + 4 \Rightarrow 4.\operatorname{tg}^4 x = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 + 4 \Rightarrow$
$4.\operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^4 x + 2.\operatorname{tg}^2 x + 1 + 4 \Rightarrow 3.\operatorname{tg}^4 x - 2.\operatorname{tg}^2 x - 5 = 0 \Rightarrow$
$(\operatorname{tg}^2 x + 1)(3.\operatorname{tg}^2 x - 5) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 5/3 \Rightarrow \sec^2 x - 1 = 5/3 \Rightarrow$
$\sec^2 x = 8/3 \Rightarrow \cos^2 x = 3/8$
Assim: $\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1 = 3/4 - 1 = -1/4 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \sqrt{15}/4$
Deste modo: $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 2x + 2.\operatorname{sen} 2x.\cos 2x = \operatorname{sen} 2x(1 + 2.\cos 2x) =$
$-\frac{\sqrt{15}}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$

8) (ITA-99) Seja $a \in R$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. A expressão

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

é idêntica a:

a) $\frac{\sqrt{2}\cot g^2 a}{1+\cot g^2 a}$ b) $\frac{\sqrt{2}\cot ga}{1+\cot g^2 a}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{1+\cot g^2 a}$

d) $\frac{1+3\cot ga}{2}$ e) $\frac{1+2\cot ga}{1+\cot ga}$

Solução: Alternativa A

$$2.\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a+\frac{3\pi}{4}-a}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+a-\frac{3\pi}{4}+a}{2}\right)\cos a = 2.\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}.\cos^2 a = \sqrt{2}\cos^2 a =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sec^2 a} = \frac{\sqrt{2}}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{\cot^2 a}} = \frac{\sqrt{2}\cot^2 a}{1+\cot^2 a}$$

9) (ITA-09) A expressão $\dfrac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\cot g^2 x\right]\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

Equivale a :

a) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x]\cot g\, x$. b) $[\operatorname{sen} x + \cos x]\, tgx$

c) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x]\cot g^2 x.]$ d) $[1 - \cot g^2 x]\operatorname{sen} x$.

e) $[1 + \cot g^2 x]\,[\operatorname{sen} x + \cos x]$.

Solução: Alternativa A

Note que $\frac{11\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2(2\pi)$, ou seja, $\frac{11\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são arcos côngruos.

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\cot g^2 x\right].\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\cot g^2 x\right].\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\left[-\cos x + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right].\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x\left[\frac{-\cos x.\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right] =$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\left[-\operatorname{sen}^2 x + \cos x\right] = \cot g\, x\,[\cos x - \operatorname{sen}^2 x]$$

10) (ITA-09) Sabendo que $tg^2\left(x+\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0,\frac{1}{2}\pi\right]$, determine sen x.

Solução:

$\sec^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{2} \Rightarrow \sec^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow \cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3} \Rightarrow$

$\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$

Como $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le x+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right] = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$

11) (ITA-11) Calcule

a) $\left(\cos^2\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{\pi}{10}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$.

b) Usando o resultado o item anterior, calcule $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$

Solução:

a) $\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{5}\right).\cos\frac{\pi}{10}-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow$

$\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{10}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

b) $\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{10}=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{\pi}{10}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}=\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow$

$\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}.\cos\frac{\pi}{10}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}=\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}=\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} \Rightarrow \frac{1}{4}=\cos\frac{\pi}{5}.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}$

12) (ITA-13) Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)}$ é

A ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B ( ) 1. C ( ) $\sqrt{2}$. D ( ) $\sqrt{3}$. E ( ) 2.

Solução: Alternativa A

$$\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}} = -\cos x$$

Como $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

13) (ITA-14) Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\operatorname{cossec} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ é

A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{a+b}{2ab}$ C) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ D) $\frac{a^2+b^2}{4ab}$ E) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$

Solução: Alternativa E

$$\operatorname{cossec} 2x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2.\cos x} = \frac{1}{2.\operatorname{sen} x.\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{2.\cos x} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{2.\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{\cos^2 x}{2.\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{\cos x}{2.\operatorname{sen} x} = \frac{\cot x}{2}$$

$$\cot^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1 = \left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2 - 1 = \left(\frac{a^2+b^2-2ab}{2ab}\right)\left(\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{4a^2b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{(2ab)^2}$$

Logo: $\cot x = \pm\frac{a^2-b^2}{2ab}$. Assim: $\operatorname{cossec} 2x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \pm\frac{a^2-b^2}{4ab}$

14) (ITA-15) Seja *n* um inteiro positivo tal que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine *n*.

b) Determine $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$.

Solução:

a) Como $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, é fácil ver que $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ satisfaz a condição dada.

Como $\frac{\pi}{2n} \in 1^{\circ}$ quadrante, a única possibilidade é $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} \Rightarrow n = 6$

b) Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$, então utilizando a relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos que $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$. Logo :

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos \pi/12}{4}} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{8}}$$

15) Demonstre que em um triângulo com ângulos x, y e z vale a relação:

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5y + \operatorname{sen} 5z = 4.\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{5y}{2}.\cos\frac{5z}{2}$$

Solução:

$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 5y + \operatorname{sen} 5z = 2.\operatorname{sen}[(5x+5y)/2].\cos[(5x-5y)/2] + 2.\operatorname{sen} 5z/2.\cos 5z/2 =$
$= 2.\operatorname{sen}[5\pi/2 - 5z/2].\cos[(5x-5y)/2] + 2.\operatorname{sen}[5\pi/2 - 5x/2 - 5y/2].\cos 5z/2 =$
$= 2.\cos 5z/2.\cos[(5x-5y)/2] + 2.\cos[(5x+5y)/2].\cos 5z/2 =$
$= 2.\cos 5z/2.[\cos(5x/2-5y/2) + \cos(5x/2+5y/2)] = 4.\cos 5x/2.\cos 5y/2.\cos 5z/2$

16) Se $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} 3b = \operatorname{tg} 3c$ prove que $(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b} + \frac{1}{\operatorname{tg} c}\right) = 9$.

Solução:

Se $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} 3b = \operatorname{tg} 3c$ então a, b e c são as raízes da equação $\operatorname{tg} 3x = k \Rightarrow$

$$\frac{3.\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3.\operatorname{tg}^2 x} = k \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x - 3k.\operatorname{tg}^2 x - 3.\operatorname{tg} x + k = 0$$

Fazendo $\operatorname{tg} x = t$ segue que tg a, tg b e tg c são as raízes de $t^3 - 3kt^2 - 3t + k = 0$.
Pelas relações de Girard:

$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = 3k$
$\operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b.\operatorname{tg} c = -3$
$\operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b.\operatorname{tg} c = -k$

$$(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b} + \frac{1}{\operatorname{tg} c}\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c)\left(\frac{\operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a.\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b.\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a.\operatorname{tg} b.\operatorname{tg} c}\right) = 3k\frac{-3}{-k} = 9$$

17) (ITA-15) Sejam α e β números reais tais que α, β, $\alpha + \beta \in]\, 0, 2\pi\, [$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2\frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4\frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1 b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 0.

Solução: Alternativa B

$$4\cos^4\frac{\alpha}{2} - 5\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 0 \Rightarrow \left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0$$

i) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm 1 \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0$

ii) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4\cos^4\frac{\beta}{3} - 7\cos^2\frac{\beta}{3} + 3 = 0 \Rightarrow \cos\frac{\beta}{3} = \pm 1 \text{ ou } \cos\frac{\beta}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, segue que $\cos\beta = 0$ ou $\cos\beta = \pm 1$

Como $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$, se $\cos\beta = 0$ (consequentemente tem-se $\operatorname{sen}\beta = \pm 1$) tem-se $\cos(\alpha + \beta) = -\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$, cujo menor valor ocorre para $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\beta = 1$ (ou ambos negativos): $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se $\cos\beta = \pm 1$ ($\operatorname{sen}\beta = 0$) tem-se $\cos(\alpha + \beta) = \pm\cos\alpha$, cujo menor valor ocorre para $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$: $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$

Assim, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18) Prove que:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen}^2 1^\circ}$$

Solução:

$$\frac{\operatorname{sen}(1^\circ)}{\cos(n).\cos(n+1)} = \frac{\operatorname{sen}[(n+1) - n]}{\cos(n).\cos(n+1)} = \frac{\operatorname{sen}(n+1).\cos(n) - \operatorname{sen}(n).\cos(n+1)}{\cos(n).\cos(n+1)} =$$

$$= \operatorname{tg}(n+1) - \operatorname{tg}(n)$$

Logo: $\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}1^\circ - \operatorname{tg}0^\circ + \operatorname{tg}2^\circ - \operatorname{tg}1^\circ + \ldots + \operatorname{tg}89^\circ - \operatorname{tg}88^\circ}{\operatorname{sen}1^\circ} = \frac{\operatorname{tg}89^\circ - \operatorname{tg}0^\circ}{\operatorname{sen}1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen}^2 1^\circ}$$

19) (IME-04) Calcule **sen (x + y)** em função de **a** e **b**, sabendo que o produto **ab ≠ 0**, que **sen x + sen y = a** e que **cos x + cos y = b**.

Solução:

Utilizando fatoração de expressões trigonométricas:

$$\text{sen } x + \text{sen } y = a \Rightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = a \quad (I)$$

$$\cos x + \cos y = b \Rightarrow 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = b \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{b}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I): $a = 2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).\frac{b}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Sabendo que $\text{sen}(x+y) = \frac{2.\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{1+\text{tg}^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \frac{\frac{2a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

20) (IME-13) Considere $P = \prod_{k=0}^{45}\left[1+\text{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]$, com $\prod_{k=0}^{n}$ representando o produto dos termos desde k = 0 até k = n, sendo k e n números inteiros. Determine o(s) valor(es) de m, número real, que satisfaça(m) a equação $P = 2^m$.

Solução:

Desenvolvendo o termo geral:

$$1+\text{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{180}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right) + \text{sen}\left(\frac{k\pi}{180}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right)} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{180}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right)} = \frac{\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{k\pi}{180}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right)} = \frac{\sqrt{2}.\cos\frac{(45-k)\pi}{180}}{\cos\left(\frac{k\pi}{180}\right)}$$

Logo, no produtório, os termos de ordem k e 45 – k serão cancelados, fazendo com que $P = \left(\sqrt{2}\right)^{46} = 2^{23} \Rightarrow m = 23$

21) (IME-17) Se $\frac{\cos x}{\cos y}+\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y}=-1$, calcule o valor S.

$$S=\frac{3\cos y+\cos 3y}{\cos x}+\frac{3\text{sen } y-\text{sen } 3y}{\text{sen } x}$$

Solução:

(I) $\frac{\cos x}{\cos y}+\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y}=-1 \Rightarrow \text{sen } y.\cos x+\text{sen } x.\cos y=-\text{sen } y.\cos y \Rightarrow$

$\text{sen}(x+y)=-\text{sen } y.\cos y$

(II) Como $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ e $\text{sen } 3y=3\text{sen } y-4\text{sen}^3 y$ então:

$$S=\frac{4\cos^3 y}{\cos x}+\frac{4\text{sen}^3 y}{\text{sen } x}=4\left(\cos^2 y\frac{\cos y}{\cos x}+\text{sen}^2 y\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x}\right)=$$

$$=4\left[(1-\text{sen}^2 y)\frac{\cos y}{\cos x}+(1-\cos^2 y)\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x}\right]=$$

$$=4\left[\frac{\cos y}{\cos x}+\frac{\text{sen } y}{\text{sen } x}-\frac{\text{sen}^2 y.\cos y}{\cos x}-\frac{\cos^2 y.\text{sen } y}{\text{sen } x}\right]=$$

$$=4\left[\frac{\text{sen}(x+y)}{\cos x.\text{sen } x}-\frac{(\text{sen}^2 y.\text{sen } x.\cos y+\cos^2 y.\text{sen } y.\cos x}{\cos x.\text{sen } x}\right]=$$

$$=\frac{4}{\cos x.\text{sen } x}\left[\text{sen}(x+y)-\text{sen } y.\cos y(\text{sen } x.\text{sen } y+\cos x.\cos y)\right]=$$

$$=\frac{4}{\cos x.\text{sen } x}\left[\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x+y)\cos(x-y)\right]=$$

$$=\frac{4}{\cos x.\text{sen } x}\left[\text{sen}(x+y)+\frac{\text{sen } 2x+\text{sen } 2y}{2}\right]=$$

$$=\frac{4}{\cos x.\text{sen } x}\left[-\text{sen } y.\cos y+\text{sen } x.\cos x+\text{sen } y.\cos y\right]=4$$

22) (IME-84) Obtenha uma relação entre a, b e c, eliminando x entre as duas equações abaixo:

$$a.\text{sen } x-b.\cos x=(1/2).c.\text{sen } 2x$$
$$a.\cos x+b.\text{sen } x=c.\cos 2x$$

Solução:

Multiplicando a 1ª equação por sen x e a segunda por cos x:

$$\begin{cases} a\,\text{sen}^2 x-b\,\text{sen } x\cos x=c\,\text{sen}^2 x\cos x \\ a\cos^2 x+b\,\text{sen } x\cos x=c\cos x(2\cos^2 x-1) \end{cases}$$

Somando as duas equações: $a=c\cos x(\text{sen}^2 x+2\cos^2 x-1) \Rightarrow$

$a = c\cos x(2\cos^2 x - \cos^2 x) = c\cos^3 x \Rightarrow \cos x = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}$ (1)

Multiplicando a 1ª equação por $-\cos x$ e a segunda por sen x:

$$\begin{cases} -a\,\text{sen}\,x\cos x + b\cos^2 x = -c\,\text{sen}\,x\cos^2 x \\ a\,\text{sen}\,x\cos x + b\,\text{sen}^2 x = c\,\text{sen}\,x(1 - 2\,\text{sen}^2 x) \end{cases}$$

Somando as duas equações: $b = c\,\text{sen}\,x(-\cos^2 x + 1 - 2\,\text{sen}^2 x) \Rightarrow$

$b = c\,\text{sen}\,x(\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}^2 x) = -c\cos^3 x \Rightarrow \text{sen}\,x = -\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ (2)

Elevando (1) e (2) ao quadrado: $\cos^2 x = \sqrt[3]{\frac{a^2}{c^2}}$ e $\text{sen}^2 x = \sqrt[3]{\frac{b^2}{c^2}}$

Somando estas equações: $\sqrt[3]{\frac{a^2}{c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{c^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{c^2}$

23) Elimine α e β nas expressões seguintes obtendo uma relação entre a, b e c:

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = a \\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta = b \\ \cos 3\alpha + \cos 3\beta = c \end{cases}$$

Solução:

Como $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow b = 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) - 2 \Rightarrow$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{b+2}{2}$

Elevando ao quadrado a 2ª equação:

$\cos\alpha + \cos\beta = a \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2 \Rightarrow$

$\frac{b+2}{2} + 2\cos\alpha\cos\beta = a^2 \Rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{2a^2 - b - 2}{4}$

Como $\cos 3x = 4.\cos^3 x - 3.\cos x \Rightarrow c = 4(\cos^3\alpha + \cos^3\beta) - 3(\cos\alpha + \cos\beta) \Rightarrow$

$c = 4(\cos\alpha + \cos\beta)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta) - 3a \Rightarrow$

$c = 4a\left(\frac{b+2}{2} - \frac{2a^2 - b - 2}{4}\right) - 3a = \cancel{4}a\left(\frac{2b + 4 - 2a^2 + b + 2}{\cancel{4}}\right) - 3a \Rightarrow$

$c = a(6 + 3b - 2a^2) - 3a \Rightarrow c = a(3 + 3b - 2a^2)$

24) (IME-10) Considere a sequência

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}},\ a_3 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}},\ldots..$$

Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

Solução:

Inicialmente note que $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A lei de formação dada é equivalente a $a_k = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{a_{k-1}}{2}} \Rightarrow 2.a_k^2 = 1 + a_{k-1}$

Comparando com a identidade trigonométrica $2.\cos^2 \alpha/2 = 1 + \cos \alpha$, pode-se então afirmar que existe um ângulo α tal que $a_k = \cos \alpha/2$ e $a_{k-1} = \cos \alpha$

Como $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ então $a_1 = \cos\frac{\pi}{6}$, $a_2 = \cos\frac{\pi}{2.6}$, $a_3 = \cos\frac{\pi}{4.6}$, ..., $a_{20} = \cos\frac{\pi}{2^{19}.6}$

Logo: $P_{20} = \cos\frac{\pi}{2^{19}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{16}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}$

Multiplicando e dividindo por $2.\text{sen}\frac{p}{2^{19}.6}$:

$$P_{20} = \frac{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}\cos\frac{\pi}{2^{19}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{16}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{18}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{16}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\frac{1}{2}\text{sen}\frac{30^o}{2^{17}}.\cos\frac{\pi}{2^{17}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{16}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\frac{1}{2^2}\text{sen}\frac{\pi}{2^{16}.6}.\cos\frac{\pi}{2^{16}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow$$

$$P_{20} = \frac{\frac{1}{2^3}.\text{sen}\frac{\pi}{2^{15}.6}\ldots\cos\frac{\pi}{2.6}.\cos\frac{\pi}{6}}{2.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{2^{20}.\text{sen}\frac{\pi}{2^{19}.6}} \Rightarrow P_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2^{21}.\text{sen}\frac{\pi}{2^{20}.3}}$$

25) Dado que: $\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = \frac{\text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z}{\text{sen}(x + y + z)} = a$,

mostre que $\cos(y + z) + \cos(z + x) + \cos(x + y) = a$.

Solução:

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = \frac{\text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z}{\text{sen}(x + y + z)} \Rightarrow$$

$\text{sen}(x + y + z).\cos x + \text{sen}(x + y + z).\cos y + \text{sen}(x + y + z).\cos z =$

$= \cos(x + y + z).\text{sen}\, x + \cos(x + y + z).\text{sen}\, y + \cos(x + y + z).\text{sen}\, x \Rightarrow$

$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x + z) + \text{sen}(y + z) = 0$

Note agora que: $\frac{\cos x}{\cos(x + y + z)} = \frac{\cos[(x + y + z) - (y + z)]}{\cos(x + y + z)} =$

$$= \frac{\cos(x + y + z).\cos(y + z) - \text{sen}(x + y + z)\text{sen}(y + z)}{\cos(x + y + z)} =$$

$= \cos(y + z) - \cot(x + y + z).\text{sen}(y + z)$ (1)

Analogamente, pode-se demonstrar que:

$$\frac{\cos y}{\cos(x + y + z)} = \cos(x + z) - \cot(x + y + z).\text{sen}(x + z) \quad (2)$$

$$\frac{\cos z}{\cos(x + y + z)} = \cos(x + y) - \cot(x + y + z).\text{sen}(x + y) \quad (3)$$

Somando as expressões (1), (2) e (3):

$a = \cos(x + y) + \cos(x + z) + \cos(y + z) -$

$- \cot(x + y + z)[\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x + z) + \text{sen}(y + z)] \Rightarrow$

$\cos(x + y) + \cos(x + z) + \cos(y + z) = a$

Exercícios de Vestibular

1) (Udesc-12) A expressão cotg 2x + cossec 2x pode ser escrita como:

a) $\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x . \operatorname{sen} x}$ b) tg x c) cotg x

d) $\frac{2[\cos^2 2x + \operatorname{sen} 2x]}{\operatorname{sen} 4x}$ e) $\frac{2[\cos 2x + \operatorname{sen}^2 2x]}{\operatorname{sen} 4x}$

2) (UEFS-14) O valor de $\frac{\operatorname{sen} 15° . \cos 165°}{\operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 70°}$ é:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3) (UEL-08) Se cos (2x) = 1/2, então o valor de $\tan^2(x) + \sec^2(x)$ é:

a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 4/3 e) 5/3

4) (UEL-09) Se cos (2x) = 1/3, onde $x \in (0, \pi)$, então o valor de

$$y = \frac{\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(2x)}$$

é:

a) – 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) 1

5) (UFPA-00) Sendo a e b dois ângulos tais que tg a = 1/2 e tg b = 1/3, encontre, em graus, o valor do ângulo a + b.

6) (UFPB-05) Se $0 \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, e cotg 0 - tg 0 = 8, então cotg (20) é igual a

a) – 4 b) 1 c) 2 d) – 2 e) 4

7) (UFPE-12) Analise a veracidade das afirmações seguintes sobre identidades trigonométricas.

0-0) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$, para todo x real.

1-1) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, para todo x real.

2-2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$, para todo x real e $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro.

3-3) $2\cos^2 x + \cos(2x) = 3 + 4\cos^2 x$, para todo x real.

4-4) $\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 2\cos x.\cos y$, para quaisquer x e y reais.

8) (FGV-02) A função $f(x) = 16(\text{sen } x)(\cos x)$ assume valor máximo igual a:
a) 16 b) 12 c) 10 d) 8 e) 4

9) (UFPI-07) O valor máximo que a expressão $y = 2\cos x + \text{sen } x$ assume é:

A) 1 B) 2 C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{5}$ E) 3

10) (UFPI-10) O valor da seguinte expressão trigonométrica $\text{sen}10°.\text{sen}70°.\text{sen}130°$ é:
(A) 1/16 (B) 1/8 (C) 1/4 (D) 1/2 (E) 2/3

11) (FAAP-75) O valor da soma $\text{sen}^2\frac{\pi}{3} + \text{sen}^2\frac{2\pi}{3} + \text{sen}^2\frac{3\pi}{3} + ... + \text{sen}^2\frac{9\pi}{3}$ é:
a) 0 b) $\sqrt{2}/2$ c) 1/2 d) 9 e) 9/2

2) (PUC/RS-01) A expressão $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ é idêntica a
a) $2.\cos 2\alpha$ b) $2.\text{sen}\,2\alpha$ c) $\cos 2\alpha$
d) $\text{sen}\,2\alpha$ e) $\cos 2\alpha - \text{sen}\,2\alpha$

13) (UFU-01) Encontre o valor máximo e o valor mínimo que a função $f(x) = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$ pode assumir.

14) (UFRJ-97) Seja x tal que $\text{sen } x + \cos x = 1$. Determine todos os valores possíveis para $\text{sen } 2x + \cos 2x$.

15) (UFT-09) Dado $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4}$, $0° < \theta < 90°$. O valor de $\text{sen}\,(4\theta)$ é:

a) $-\frac{\sqrt{7}}{16}$ b) $\frac{3\sqrt{7}}{32}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ d) $-\frac{3\sqrt{7}}{32}$

16) (Unifei-09) Se θ é um ângulo do 4º Quadrante e $\text{cotg}\,\theta = -\frac{2}{5}$, quanto vale $\text{sen}\,2\theta - \cos 2\theta$?

17) (FGV-10) A soma $\cos^2 0° + \cos^2 2° + \cos^2 4° + \cos^2 6° + ... + \cos^2 358° + \cos^2 360°$ é igual a
A) 316. B) 270. C) 181. D) 180. e) 91.

18) (FGV-12) O valor de y no sistema de equações:

$$\begin{cases} (\text{sen}\,10°)x - (\cos 10°)y = -\dfrac{1}{\text{sen}\,50°} \\ (\text{sen}\,50°)x + (\cos 50°)y = \dfrac{1}{\text{sen}\,10°} \end{cases}$$

é:

a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

19) (FGV-13) Se $\text{sen}\,x + \text{sen}\,y = \frac{\sqrt{15}}{3}$ e $\cos x + \cos y = 1$, então $\sec(x - y)$ é igual a

a) 1/3 b) 1/2 c) 2 d) 3 e) 4

20) (FGV-15) Se $1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots = 5$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então, $\text{sen}\,2\alpha$ é igual a

(A) 0,84. (B) 0,90. (C) 0,92. (D) 0,94. (E) 0,96.

21) (Fuvest-93) O valor máximo da função $f(x) = 3.\cos x + 2.\text{sen}\,x$ para x real é:

a) $\sqrt{2}/2$ b) 3 c) $5\sqrt{2}/2$ d) $\sqrt{13}$ e) 5

22) (Fuvest-07) Um arco x está no terceiro quadrante do círculo trigonométrico e verifica a equação $5\cos 2x + 3\text{sen}\,x = 4$. Determine os valores de $\text{sen}\,x$ e $\cos x$.

23) (Fuvest-09) Seja x no intervalo $]0, \pi/2[$ satisfazendo a equação $\text{tg}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sec x = \frac{3}{2}$. Assim, calcule o valor de:

a) $\sec x$.

b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

24) (Fuvest-10) Sejam x e y dois números reais, com $0 < x < \pi/2$ e $\pi/2 < y < \pi$, satisfazendo $\text{sen}\,y =$ e $11\text{sen}\,x + 5\cos(y - x) = 3$. Nessas condições, determine

a) $\cos y$.

b) $\text{sen}\,2x$.

25) (Fuvest-11) Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = \pi/2$. Sabendo-se que $\text{sen}(y - x) = 1/3$, o valor de $\text{tg}^2 y - \text{tg}^2 x$ é igual a

a) 3/2 b) 5/4 c) 1/2 d) 1/4 e) 1/8

26) (Fuvest-12) O número real x, com $0 < x < \pi$, satisfaz a equação

$$\log_3(1 - \cos x) + \log_3(1 + \cos x) = -2.$$

Então, cos 2x + sen x vale

a) 1/3 b) 2/3 c) 7/9 d) 8/9 e) 10/9

27) (Fuvest-15) Sabe-se que existem números reais A e x_0, sendo $A > 0$, tais que

$$\text{sen } x + 2\cos x = A \cos(x - x_0)$$

para todo x real. O valor de A é igual a

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

28) (UEFS-11) Se os arcos α, β e γ, nessa ordem, formam uma progressão aritmética, então a expressão $\frac{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}$ é equivalente a

A) tg α C) tg γ E) tg(α + β + γ)
B) tg β D) tg (α + β)

29) (UFC-99) Expresse cos 3x em função de cos x. Use este resultado para mostrar que cos 20^0 não é um número racional.

30) (Ciaba-07) A trigonometria e a astronomia Até o final do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia esbarrava em cálculos longos e tediosos. Nessa época, os astrônomos passaram a usar as fórmulas de Prostaféreses, que transformam a multiplicação em adição ou subtração. Afinal, adicionar ou subtrair é geralmente mais rápido do que multiplicar, porém existem casos que nos provam o contrário. Portanto, qual o valor do produto sen 12° . cos 8°?
O resultado encontrado foi: (dado: sen 20° = 0,342, sen 8° = 0,139, cos 12° = 0,978)

a) maior que sen 30° b) maior que sen 60°
c) menor que a tg 30° d) maior que o cos 30°
e) igual ao quociente do sen 30° pelo cos 60°

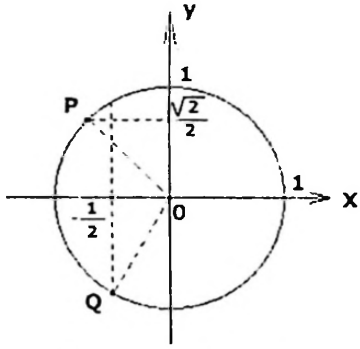
31) (EsPCEx-93) O valor numérico da expressão y = sen 13π/12.cos 11π/12 é igual a:

a) 1/2 b) 1/4 c) 1/6 d) 1/8

32) (EsPCEx-98) Se cos x . cos y ≠ 0, então a soma tg x + tg y é equivalente ao produto:

a) (sen x + sen y) (cos x. cos y) b) (sen x + sen y) (secx . secy)
c) sen(x + y) (secx . secy) d) secx + secy . sen(x + y)
e) senx . seny . cos(x + y)

33) (EsPCEx-12) Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em (1, 0), denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo. O valor de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é



a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ c) $2+\sqrt{3}$ d) $2-\sqrt{3}$ e) $-1+\sqrt{3}$

34) (AFA-98) Seja P o produto dos fatores $(\operatorname{sen} n^{\circ} + \cos n^{\circ})$, onde n = 45, 46, 47, ... 149, 150. Pode-se afirmar que

a) P = 0 b) $P = 2^{90}$ c) $1 \leq P < 8$ d) $8 \leq P \leq 2^{90}$

35) (AFA-00) Os valores de $m \in R$, para os quais a equação

$$\sqrt{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) = m^2 - 2$$

admite soluções, são

a) $-1 \leq m \leq 1$ b) $-2 \leq m \leq 2$ c) $0 \leq m \leq \sqrt{2}$ d) $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$

36) (Escola Naval-88) O valor de $\operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ}$ é:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $2\sqrt{3}$

37) (Escola Naval-91) Se $\operatorname{sen} x + \cos x = 1/2$ então $\operatorname{sen} 2x$ é igual a:

a) $\frac{-1-\sqrt{7}}{4}$ b) $\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ c) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ d) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ e) $\frac{-3}{4}$

38) (Escola Naval-94) Se $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x - \cos y} = 2$ e $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, então tg y é igual a:

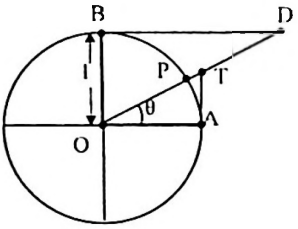
a) 3 b) 1/6 c) 0 d) – 1/6 e) – 3

39) (Escola Naval-97) Sabendo-se que tan x = a e tan y = b; pode-se reescrever $Z = \frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 2y}{\text{sen } 2x - \text{sen } 2y}$ como:

a) $\left(\frac{1-ab}{1+ab}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ b) $\left(\frac{1+ab}{1-ab}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ c) $\left(\frac{1-ab}{1+ab}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$

d) $\left(\frac{1+ab}{1-ab}\right)\left(\frac{-a+b}{a-b}\right)$ e) $\left(\frac{1+ab}{1-ab}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$

40) (Escola Naval-04)



A figura acima mostra uma circunferência de raio igual a 1 e centro no ponto O. Os pontos A, B e P pertencem à circunferência, o segmento $\overline{OA}$ é perpendicular ao segmento $\overline{OB}$ e os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AT}$ são tangentes a essa circunferência. O valor da área do polígono BDTAOB em função do ângulo θ é

a) cos 2θ b) sen2θ c) cossec 2θ d) sec 2θ e) tg 2θ

41) (Escola Naval-98) Sendo $y = \text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, o valor numérico de y é:

a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{3}+2$

42) (Escola Naval-00) Sabendo que $\log_{10}\left(\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\right) = 4$, podemos afirmar que tg $\left(\frac{a}{2}\right)$ é igual a

(A) 1 (B) $\sqrt{10}$ (C) 10 (D) 10^2 (E) 10^4

43) (Escola Naval-01) Se $a - b = \frac{\pi}{6}$ e tg a = $3\sqrt{3}$, o valor de $(\text{tg } b)^3$ é igual a

(A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{125}$ (C) $\frac{-3\sqrt{3}}{125}$ (D) $\frac{-8\sqrt{3}}{9}$

44) (Escola Naval-14) O valor do produto cos 40°.cos 80°.cos 160° é

a) $-\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) -1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

45) (Escola Naval-16) Seja q = (cos 5°)(cos 20°)(cos 40°)(cos 85°) a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$. Sendo assim, é correta afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{3}{15}$ d) $\frac{4}{15}$ e) $\frac{7}{15}$

46) (ITA-70) Seja $P = \text{sen}^2 ax - \text{sen}^2 bx$. Temos, então que:

a) P = sen ax.cos bx

b) $P = \cos\frac{a}{2}x.\text{tg } bx$

c) $P = 2.\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)x.\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)x$

d) P = sen (a + b)x.sen (a – b)x

e) nenhuma é válida

47) (ITA-74) $\left[\frac{1-\text{tgx}}{1+\text{tgx}}\right]^2$ vale:

a) $\frac{1-2.\text{sen } 2x}{1+\text{sen } 2x}$ b) $\frac{1+2.\text{sen } 2x}{1-\text{sen } 2x}$ c) $\frac{1+\text{sen } 2x}{1-\text{sen } 2x}$ d) $\frac{1-\text{sen } 2x}{1+\text{sen } 2x}$ e) nda

48) (ITA-75) Sabendo-se que $\text{sen } x = \frac{m-n}{m+n}$, n > 0 e m > 0, podemos afirmar que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ é igual a:

a) $\frac{n}{m}$ b) $\frac{\sqrt{m}}{n}$ c) $1-\frac{n}{m}$ d) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ e) nda

49) (ITA-87) Se $\cos^4 4x - \text{sen}^4 4x = a \neq 0$, então cos 8x vale:

a) 2a b) a c) 4a d) zero e) a + 4

50) (ITA-87) O valor de x > 0 que satisfaz a equação $\sqrt{x} = \text{tg } \pi/12$ é:

a) $x = 4\sqrt{3}$ b) $x = 5 - 4\sqrt{3}$ c) $x = 7 - \sqrt{3}$

d) $x = 7 - 4\sqrt{3}$ e) $x = 9 - 4\sqrt{3}$

51) (ITA-87) Suponha x e y números reais, tais que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) = \sqrt{3} \\ (\operatorname{tg}x)(\operatorname{tg}y) = 1 \end{cases}$$

Calcule o módulo do número $S = tgx + tgy$

52) (ITA-89) Se tg (2A) = 5 então $\operatorname{tg}(\pi/4 + A) - \operatorname{tg}(\pi/4 - A)$ é igual a:

a) – 40/21 b) – 2 c) 5 d) 8 e) 10

53) (ITA-90) Sabendo-se que θ é um ângulo tal que $2\operatorname{sen}(\theta - 60^\circ) = \cos(\theta + 60^\circ)$, então tg θ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ onde

a) a e b são reais negativos; b) a e b são inteiros;

c) a + b = 1; d) a e b são pares;

e) $a^2 + b^2 = 1$.

54) (ITA-92) Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que cos x = 5/6 e cos y = 4/5, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha}$, temos que:

a) α está no 4° quadrante e T = 2/3.

b) α está no 1° quadrante e T = 2/3.

c) α está no 1° quadrante e $T = 2/3 + \sqrt{11}/10$.

d) α está no 4° quadrante e $T = 2/3 - \sqrt{11}/10$.

e) n.d.a.

55) (ITA-94) A expressão trigonométrica

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$$

Para $x \in]0, \pi/2[$, $x \neq \pi/4$, é igual a:

a) sen 2x b) cos 2x c) 1 d) 0 e) sec 2x

56) (ITA-96) Seja $\alpha \in [0, \pi/2]$, tal que sen x + cos x = m.

Então, o valor de $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}$ será:

a) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$ b) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$ c) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$

d) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$ e) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

57) (ITA-03) O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números sen $\frac{\pi}{12}$; x, y, z e sen 75°, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

a) 3^{-4} b) 2^{-6} c) 6^{-2} d) 2^{-5} e) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

58) (ITA-10) O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\alpha\right]$ b) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

c) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$ d) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

e) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)-\cos\alpha$

59) (ITA-75) Num triângulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ medem respectivamente a, b, e c. Então a expressão:

$$a.\operatorname{sen}(\hat{B}-\hat{C}) + b.\operatorname{sen}(\hat{C}-\hat{A}) + c.\operatorname{sen}(\hat{A}-\hat{B})$$

tem valor que satisfaz uma das seguintes alternativas:

a) $a.\operatorname{sen}\hat{A} + b.\operatorname{sen}\hat{B} + c.\operatorname{sen}\hat{C}$ b) $\operatorname{sen}^2\hat{A} + \operatorname{sen}^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{C}$

c) 0 d) 1

e) nda

60) (ITA-73) Eliminando θ nas equações

$$x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = 2a \operatorname{sen} 2\theta$$
$$x \cos x\,\theta - y \operatorname{sen}\theta = a\cos 2\theta \ , \ a > 0$$

temos:

a) $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = 2a(x+y)^2$ b) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)$

c) $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$ d) impossível eliminar θ

e) n.d.a.

61) (IME-78) Dados os arcos A, B, C e D, todos do primeiro quadrante, e tais que tanA = 1/3, tanB = 1/5, tanC = 1/7 e tanD = 1/8, verificar se A + B + C + D = π/4.

62) (IME-88) Demonstre que, num triângulo ABC, $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C}{\cos B + \cos C}$.

63) (IME-88) Demonstre a identidade $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\left(\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}\right)$.

64) (IME-90) Determine o valor de $p = \operatorname{sen}\frac{\pi}{24}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{24}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{24}\operatorname{sen}\frac{11\pi}{24}$

65) (IME-91) Mostre que $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$.

66) (IME-91) Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:
$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$

67) (IME-09) Sabe-se que $y = \frac{2 + 2^{\cos 2x}}{2(1 + 4^{\operatorname{sen}^2 x})}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Uma outra expressão para y é

a) 2 b) $2^{-\operatorname{sen}^2 x}$ c) $2^{-2\operatorname{sen}^2 x}$ d) $2^{-\cos^2 x}$ e) $2^{-2\cos^2 x}$

68) (IME-12) O valor de $y = \operatorname{sen} 70° \cos 50° + \operatorname{sen} 260° \cos 280°$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

69) (IME-13) Assinale a alternativa que apresenta o mesmo valor da expressão $[4\cos^2(9°) - 3)][4\cos^2(27°) - 3]$:

a) sen (9°) b) tg (9°) c) cos (9°) d) sec (9°) e) cossec (9°)

70) (IME) Sabendo que sen 2A, sen 2B e sen 2C estão em P.A., nessa ordem, demonstrar que tg(B + C), tg(C + A) e tg(A + B) também estão em P.A. nesta ordem.

71) (IME-54) Dadas as três equações abaixo determinar f(a, b, c) = 0

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y).\cos(x-y) = a \\ \cos(x+y)\cos(x-y) = b \\ \cos 2(x-y) = c \end{cases}$$

72) (IME-60) Demonstrar a identidade:

$$\text{sen } a + \text{sen } b + \text{sen } c - \text{sen } (a + b + c) = 4.\text{sen}\frac{a+b}{2}.\text{sen}\frac{b+c}{2}.\text{sen}\frac{a+c}{2}$$

73) (IME-76) Considere

$$E = \left(\text{sen}\frac{1\pi n}{N}\right)^2 + \left(\text{sen}\frac{2\pi n}{N}\right)^2 + \ldots + \left(\text{sen}\frac{N\pi n}{N}\right)^2 = \sum_{k=1}^{N}\left(\text{sen}\frac{k\pi n}{N}\right)^2.$$

N e n são números inteiros, tais que $0 < n < N$. Calcule E em função de N.

74) (IME-77) Prove que para todo arco x cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\text{sen}x + \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

Exercícios Gerais

75) Prove que, se $\cos(\alpha + \beta) = 0$, então $\text{sen}(\alpha + 2\beta) = \text{sen}\,\alpha$.

76) Prove que, se $3.\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(2\alpha + \beta)$, então $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = 2.\text{tg}\,\alpha$

77) Prove que, se $\text{sen}\,B = \frac{1}{5}\text{sen}(2A + B)$, então $\text{tg}(A + B) = \frac{3}{2}\text{tg}\,A$.

78) Prove que se: $\text{sen}\,\alpha = A.\text{sen}\,(\alpha + \beta)$, então $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta - A}$.

79) Prove a identidade $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2.\cos\alpha.\cos\beta.\cos(\alpha + \beta) = \text{sen}^2\beta$.

80) Sejam A e B ângulos agudos satisfazendo $\begin{cases} 3\text{sen}^2 A + 2\text{sen}^2 B = 1 \\ 3\text{sen}\,2A - 2\text{sen}\,2B = 0 \end{cases}$. Prove que $\cos(A + 2B) = 0$.

81) Mostre que:

$$\cos^2 b + \cos^2(a + b) - 2.\cos a.\cos b.\cos(a + b) = \text{sen}^2 a$$

82) Prove que sen x = 4.sen (x/3).sen (60° + x/3).sen (60° – x/3).

83) Prove que A + B + C = 0 implica em:

sen A + sen B + sen C = – 4.sen (A/2).sen (B/2).sen (C/2)

84) Dado $\begin{cases} a.\cos\alpha + b.\text{sen}\,\alpha = c \\ a.\cos\beta + b.\text{sen}\,\beta = c \end{cases}$, prove que $\text{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ e cot α + cot β = $\dfrac{2ab}{c^2-a^2}$.

85) Mostre que:

cos (x + y).sen (x – y) + cos (y + z).sen (y – z) +
+ cos (z + w).sen (z – w) + cos (w + x).sen (w – x) = 0

86) Mostre que:

sen (x + y).sen (x – y).sen (z + w).sen (z – w) +
+ sen (z + y).sen (z – y).sen (w + x).sen (w – x) +
+ sen (w + y).sen (w – y).sen (x + z).sen (x – z) = 0

87) Mostre que:

cos (y + z – x) + cos (z + x – y) + cos (x + y – z) + cos (x + y + z) =
= 4.cos x.cos y.cos z

88) Mostre que cos a.cos 2a.cos 4a... cos 2^{n-1}a = $\dfrac{\text{sen}\,2^n a}{2^n \text{sen}\,a}$.

89) Calcule o valor da seguinte expressão $\dfrac{\cos 25^\circ + \sqrt{3}.\text{sen}\,25^\circ}{\text{sen}\,10^\circ + \cos 10^\circ}$.

90) Se $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ prove que $\left(1 + \text{tg}\dfrac{x}{2}\right)\left(1 + \text{tg}\dfrac{y}{2}\right) = 2$.

91) Se $\text{tg}^2 x = 1 + 2.\text{tg}^2 y$ prove que cos 2y = 1 + 2.cos 2x.

92) Se tg 2x = k.cossec 2y – cotg 2y, então demonstre que $\text{tg}(2x - y) = \dfrac{k-1}{k+1}\text{cotg}\,y$

93) Se (1 + k.cos x)(1 – k.cos y) = $1 - k^2$, com k ≠ 0, demonstre que:

$$(1-k)\,\text{tg}^2\frac{x}{2} = (1+k)\,\text{tg}^2\frac{y}{2}$$

94) Sabe-se que x, y e z são ângulos de um triângulo e que $\cotg(x + y) + \cotg(x + z) + \cotg(y + z) = -\sqrt{3}$. Determinar o valor de $\tg x.\cotg y + \tg y.\cotg z + \tg z.\cotg x$.

95) Se $\tg^2 x - \tg^2 y = \tg x.\tg y$, calcule o valor de $\dfrac{\sen 2x.\sen 2y}{\sen(x+y).\sen(x-y)}$.

96) Se $\dfrac{\cos x}{3} = \dfrac{\sen x}{7}$, calcule o valor de $\dfrac{\tg 2x + \cotg 2x}{\sec 2x + \operatorname{cossec} 2x}$.

97) Demonstre as seguintes identidades:

a) $\sen^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

b) $\sen^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$

c) $\sen^8 x + \cos^8 x = 2\left(\dfrac{\sen^2 2x}{5} - 1\right)^2 - 1$

d) $\dfrac{\cos 3x + \sen 3x}{\cos x - \sen x} = 1 + 2.\sen 2x$

e) $\dfrac{\sen 3x}{\cos x} + \dfrac{\cos 3x}{\sen x} = 2.\cotg 2x$

f) $(1 + \sec 2x)(1 + \sec 4x)(1 + \sec 8x)(1 + \sec 16x) = \dfrac{\tg 16x}{\tg x}$

g) $\left(\dfrac{\tg 3x}{\tg x} - 1\right)\left(\dfrac{\tg 9x}{\tg 3x} - 1\right)\left(\dfrac{\tg 27x}{\tg 9x} - 1\right)\ldots\left(\dfrac{\tg 3^n x}{\tg 3^{n-1} x} - 1\right) = \dfrac{2^n \cos x}{\cos 3^n x}$

h) $64.\cos^7 x - 112.\cos^5 x + 60.\cos^3 x - 10.\cos x = 2.\cos 2x.\cos 5x$

i) $3.\cos^2 2x - \sen^2 2x = 4.\sen(60° + x).\sen(60° - 2x)$

j) $3.\tg^2 2x.\tg 6x + 3.\tg 2x - \tg^3 2x = \tg 6x$

k) $\operatorname{cossec} 2x + \cotg 4x = \cotg x - \operatorname{cossec} 4x$

l) $4(\cos 2x + \cos 6x)(\cos 6x + \cos 8x) = 1 + \sen 15x.\operatorname{cossec} x$

m) $\cotg^3 x + \tg^3 x = 8.\operatorname{cossec}^2 2x - 6.\operatorname{cossec} 2x$

n) $\sen^3(60° + x) + \sen^3(60° - x) = \dfrac{3\sqrt{3}\cos x}{4}$

o) $3.\tg x - 2.\cotg x = \operatorname{cossec} 2x - 5.\cotg 2x$

p) $\dfrac{\cos^3 2x - \cos 2y.\cos^2(y - 3x)}{\cos(2y - 4x) + 2.\cos 2x} = \sen^2(y - x)$

q) $\dfrac{\tg^2 2x - \tg^2 x}{1 - \tg^2 2x.\tg^2 x} = \tg 3x.\tg x$

r) $\frac{\text{sen}^2 3x}{\text{sen}^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8\cos 2x$

s) $2.\cos x.\cos y.\cos(x + y) = \cos^2 x + \cos^2 y - \text{sen}^2(x + y)$

98) Prove que:

a) se $\text{tg}\frac{x}{2} = t$, então $\text{tg}\, x + \sec x = \frac{1+t}{1-t}$

b) se $\text{cotg}\, x - \text{tg}\, x = t$, então $\text{tg}\, 4x = \frac{4t}{t^2 - 4}$

c) se $\sec 2x = 2 + \sec x$, então $\cos 2x + \cos 3x = 0$

d) $\text{cossec}\, 2x + \text{cotg}\, 4x = \text{cotg}\, x - \text{cossec}\, 4x$

e) $4(\cos 2x + \cos 6x)(\cos 6x + \cos 8x) = 1 + \text{sen}\, 15x.\text{cossec}\, x$

f) $\text{cotg}^3 x + \text{tg}^2 x = 8.\text{cossec}^3 2x - 6.\text{cossec}\, 2x$

g) $\text{sen}^3 x.\text{sen}\, 3x + \cos^3 x.\cos 3x = \cos^3 2x$

h) $3.\text{tg}\, x - 2.\text{cotg}\, x = \text{cossec}\, 2x - 6.\text{cotg}\, 2x$

i) se $x + y = \frac{\pi}{2}$, então $\left(1 + \text{tg}\frac{x}{2}\right)\left(1 + \text{tg}\frac{y}{2}\right) = 2$

j) se $\text{tg}^2 x = 1 + 2.\text{tg}^2 y$, então $\cos 2y = 1 + 2.\cos 2x$

k) se $\text{tg}\, 2\theta = \mu.\text{cossec}\, 2\alpha - \text{cotg}\, 2\alpha$, então $\text{tg}(2\theta - \alpha) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}\text{cotg}\,\alpha$

l) se $(1 + k.\cos\alpha)(1 - k.\cos\beta) = 1 - k^2\ (k \neq 0)$, então $(1-k)\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = (1+k)\,\text{tg}^2\frac{\beta}{2}$

m) $\cos^2\alpha - \cos^2(\alpha + \beta) = \text{sen}^2\beta + 2.\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta.\cos(\alpha + \beta)$

n) se $\frac{\cos^3 x}{\cos y} + \frac{\text{sen}^3 x}{\text{sen}\, y} = 1$ então $\text{sen}\, 2x + 2.\text{sen}(x + y) = 0$

99) Prove que:

a) $4.\cos 24^\circ.\cos 36^\circ.\cos 84^\circ = \text{sen}\, 18^\circ$

b) $\text{tg}\, 9^\circ - \text{tg}\, 27^\circ - \text{tg}\, 63^\circ + \text{tg}\, 81^\circ = 4$

c) $\cos 12^\circ + \cos 60^\circ + \cos 84^\circ = \cos 24^\circ + \cos 48^\circ$

d) $\text{sen}\, 40^\circ.\text{sen}\, 50^\circ = \text{sen}\, 30^\circ.\text{sen}\, 80^\circ$

e) $\text{tg}\, 20^\circ.\text{tg}\, 40^\circ = \text{tg}\, 10^\circ.\text{tg}\, 60^\circ$

f) $\cos^2 14^\circ - \cos 7^\circ.\cos 21^\circ = \text{sen}^2 7^\circ$

g) $\text{sen}\, 47^\circ + \text{sen}\, 61^\circ - \text{sen}\, 11^\circ - \text{sen}\, 25^\circ = \cos 7^\circ$

100) Prove que $\cos\frac{\pi}{65}.\cos\frac{2\pi}{65}.\cos\frac{4\pi}{65}.\cos\frac{8\pi}{65}.\cos\frac{16\pi}{65}.\cos\frac{32\pi}{65} = \frac{1}{64}$.

101) Se $\frac{\cos^3 x}{\cos y}+\frac{\text{sen}^3 y}{\text{sen } y}=1$ prove que sen 2x + 2.sen (x + y) = 0.

102) Demonstre que 7.cos 8°.sec 36°.sec 46° + tg 28°(24.tg 46° – tg 36°) = 25

103) Se cos x = 0,125, determine o valor de $\sqrt{\frac{\text{sen } 3x(1-\cos 3x)}{\text{sen } 2x-\text{sen } x}}$.

104) Demonstre que:

a) sen (x – y).sen (x + y) = (sen x + sen y).(sen x – sen y)

b) $\frac{\text{sen } x+\cos x}{\cos x-\text{sen } x}=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\text{tg}(a+b)=\frac{\text{sen}^2 a-\text{sen}^2 b}{\text{sen } a.\cos a-\text{sen } b.\cos b}$

$\frac{1-\cos x+\text{sen } x}{1+\cos x-\text{sen } x}=\text{tg}\frac{x}{2}.\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

105) Prove que:

a) tg x + tg 2x – tg 3x = – tg x.tg 2x.tg 3x , para todos os possíveis valores de x.

b) $\text{sen}^2 x-\text{sen}^2 2x+\text{sen}^2 3x=2.\text{sen } x.\cos 2x.\text{sen } 3x$

106) Prove que:

a) $\frac{2.\cos 20°-\text{sen } 50°}{\text{sen } 40°}=\sqrt{3}$

b) $\left(\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{2\pi}{17}\right)\left(\cos\frac{9\pi}{17}+\cos\frac{7\pi}{17}\right)=\frac{1}{4}$

107) Prove as identidades:

a) $\text{sen}\alpha+\text{sen}\beta+\text{sen}\gamma-\text{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=4\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$.

b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$

108) Prove que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(a-b).\operatorname{sen}(a-c)}+\frac{1}{\operatorname{sen}(b-a).\operatorname{sen}(b-c)}+\frac{1}{\operatorname{sen}(c-a).\operatorname{sen}(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}$$

109) Prove que:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(a-b).\operatorname{sen}(a-c)}+\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}(b-a).\operatorname{sen}(b-c)}+\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}(c-a).\operatorname{sen}(c-b)}=0$$

110) Prove que, se $A + B + C = \pi$:

a) $\operatorname{sen}^3 A.\cos(B-C)+\operatorname{sen}^3 B.\cos(C-A)+\operatorname{sen}^3 C.\cos(A-B)=$
$=3.\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C$

b) $\operatorname{sen}^3 A.\operatorname{sen}(B-C)+\operatorname{sen}^3 B.\operatorname{sen}(C-A)+\operatorname{sen}^3 C.\operatorname{sen}(A-B)=0$

111) Sejam $0 < \alpha, \beta < \pi$ e $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$. Mostre que $\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

112) Sejam $\cos A+\cos B=a$ e $\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B=b$. Mostre que $\cos(A+B)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ e $\operatorname{sen}(A+B)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

113) Sejam α e β duas diferentes soluções da equação $a.\cos x+b.\operatorname{sen} x=c$. Prove que $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

114) Sejam $\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ e $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$. Prove que $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$.

115) Sejam $\cos\alpha=\cos\beta.\cos\varphi=\cos\gamma.\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\alpha=2.\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}.\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. Prove que:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

116) Seja $\cos\theta=\cos\alpha.\cos\beta$. Mostre que $\operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

117) Mostre que, se $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d}$, então $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

118) Sejam $\cos^2\theta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $\cos^2\varphi = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$, $\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}$. Prove que:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

119) Elimine θ das equações abaixo, obtendo uma relação entre m e α:

$$\begin{cases}\cos(\alpha-3\theta) = m.\cos^3\theta \\ \operatorname{sen}(\alpha-3\theta) = m.\operatorname{sen}^3\theta\end{cases}.$$

120) Prove que se $\cos(\theta-\alpha) = a$ e $\operatorname{sen}(\theta-\beta) = b$, então:

$$a^2 - 2ab.\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + b^2 = \cos^2(\alpha-\beta).$$

121) Se $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ e $\operatorname{tg}\gamma$ são dois a dois distintos e tais que $\operatorname{tg}3\alpha = \operatorname{tg}3\beta = \operatorname{tg}3\gamma$, prove que $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) = 9$.

122) Se α, β e γ são três valores distintos de x que satisfazem

$$\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg}(x-b) + \operatorname{tg}(x-c) = 0,$$

prove que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{tg}(a+b+c).$$

123) Demonstre que se $x + y + z = \pi$, então:

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y - \operatorname{sen}^2 z = 2\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y.\operatorname{sen} z$

b) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 2\cos x.\cos y.\cos z$

c) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 3y + \operatorname{sen} 3z = -4.\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{3y}{2}.\cos\frac{3z}{2}$

d) $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 y + \operatorname{sen}^3 z = 3.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2}.\cos\frac{z}{2} + \cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{3y}{2}.\cos\frac{3z}{2}$

e) $1 + \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = -4.\cos x.\cos y.\cos z$

f) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 3y + \operatorname{sen} 3z = -4.\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{3y}{2}.\cos\frac{3z}{2}$

g) $\frac{1-\cos x+\cos y+\cos z}{1+\cos x+\cos y-\cos z} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.\operatorname{cotg}\frac{z}{2}$

h) $\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} - \cos\frac{z}{2} = 4.\cos\frac{\pi+x}{4}.\cos\frac{\pi+y}{4}.\cos\frac{\pi-z}{4}$

i) $\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2y.\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} 2z.\operatorname{sen}^2 z =$
$= \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z + 2.\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y.\operatorname{sen} z$
j) $\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4 y + \operatorname{sen}^4 z =$
$= 2(\operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{sen}^2 y.\operatorname{sen}^2 z) - 4.\operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen}^2 y.\operatorname{sen}^2 z$
k) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg} x.\operatorname{cotg} y.\operatorname{cotg} z + \operatorname{cossec} x.\operatorname{cossec} y.\operatorname{cossec} z$

124) Demonstre que se $x + y + z + w = 2\pi$, então:

a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} w = 4\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x+z}{2}\operatorname{sen}\frac{x+w}{2}$

b) $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2w = 4.\cos(x+y).\cos(x+z).\cos(x+w)$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z.\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y.\operatorname{tg} w} = \dfrac{\operatorname{tg}(x+z)}{\operatorname{tg}(x+y)}$

125) Em um triângulo ABC sabe-se que $\cot(A+B) + \cot(B+C) + \cot(C+A) = -\sqrt{3}$. Determine o valor de $\operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C$.

126) Se $\sec x - \operatorname{cossec} x = a$ demonstre que $a^2.\cos 4x - 8.\operatorname{sen} 2x = a^2 - 8$.

127) Demonstre que
$$\operatorname{cotg}^2 85° + \operatorname{cotg}^2 5° + \operatorname{tg}^2 40° + \operatorname{tg}^2 50° - 4.\operatorname{tg}^2 80° - 4.\operatorname{tg}^2 10° = 4$$

128) Dado que $(1-k)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = (1+k)\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}$, demonstre que
$$(1 + k.\cos x)(1 - k.\cos y) + k = 1.$$

129) Calcule o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}.\cos^3\frac{\pi}{24} - \operatorname{sen}^3\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}$.

130) Se $\cos 2x = -\frac{119}{169}\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ calcule o valor de $7.\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 4.\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

131) Sabe-se que $x + y + z = \pi$ e $\frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} y}{3} = \frac{\operatorname{tg} z}{4}$. Calcule o valor de
$$\sec^2 x + \sec^2 y + \sec^2 z.$$

132) Sabe-se que $\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2x.\operatorname{tg} 3x + \ldots + \operatorname{tg} 5x.\operatorname{tg} 6x = 14$. Calcule o valor de $\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\operatorname{tg} x}$.

133) Elimine x das expressões seguintes, obtendo uma relação entre as constantes envolvidas nas identidades.

a) $\begin{cases} a.\operatorname{sen} x = b.\operatorname{sen} 2x \\ c.\cos x = d.\cos 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$

c) $\begin{cases} m.\cos x + n.\operatorname{sen} x = a.\operatorname{sen} 2x \\ -m.\operatorname{sen} x + n.\cos x = 2a.\cos 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} a + b.\cos x + c.\cos 2x = 0 \\ 2a.\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3x = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 2x = c \\ \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} 2x = d \end{cases}$

f) $\begin{cases} a.\cos^2 x + b.\operatorname{sen}^2 x = c \\ (b-c)\operatorname{tg}^2 x + (c-a)\operatorname{cotg}^2 x = d \end{cases}$

g) $\begin{cases} a.\operatorname{sen} x = b.\operatorname{sen} 2x \\ c.\cos x = d.\cos 2x \end{cases}$

h) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3.\operatorname{sen} x + 2.\cos x = a \\ 2.\operatorname{sen} x + 3.\cos x = b \end{cases}$

j) $\begin{cases} a + b.\cos x + c.\cos 2x = 0 \\ 2a.\cos x + b.\cos 2x + c.\cos 3x = 0 \end{cases}$

134) Elimine α e β nas expressões seguintes obtendo uma relação entre x, y e z:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = x \\ \cos\alpha + \cos\beta = b \\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = z \end{cases}$$

135) Elimine A e B nas expressões seguintes obtendo uma relação entre a, b, c e d:

$$\begin{cases} a.\operatorname{sen} B = b.\operatorname{sen} A \\ c = a.\cos B + b.\cos A \\ d = \cos(A + B) \end{cases}$$

136) Elimine α, β e θ nas expressões seguintes obtendo uma relação entre a, b, c e d:

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta = a \\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta = b \\ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\theta = c \\ \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\theta = d \end{cases}$$

137) Se $\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x} = p$ obtenha o valor de $\dfrac{\operatorname{cotg} 4x}{\operatorname{tg} x}$.

138) Calcule o valor de $\dfrac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 3y}{\operatorname{tg} 3x.\operatorname{tg} 3y}$ sabendo que

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 3.\operatorname{tg}^2 x.\operatorname{tg}^2 y + 8.\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y + 3$$

139) Sabendo-se que $\operatorname{tgx}.\operatorname{tg} y = \sqrt{2} - 1$ calcule o valor de $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2(x+y).\operatorname{tg}^2(x-y)}{\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x}\right)^2}$.

140) Determine os valores de A e B de modo que seja verificada a identidade:

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{6} - \operatorname{sen} 10^\circ}{\frac{1}{6} + \cos 20^\circ}} = A.\operatorname{tg} 20^\circ + B.$$

141) Prove que:

a) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta+\beta) + \operatorname{sen}(\theta+2\beta) + \ldots + \operatorname{sen}(\theta+(n-1)\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}\left[\theta + \frac{1}{2}(n-1)\beta\right] \operatorname{sen}\frac{n\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$

b) $\cos\theta + \cos(\theta+\beta) + \cos(\theta+2\beta) + \ldots + \cos(\theta+(n-1)\beta) = \dfrac{\cos\left[\theta + \frac{1}{2}(n-1)\beta\right] \operatorname{sin}\frac{n\beta}{2}}{\operatorname{sin}\frac{\beta}{2}}$

c) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + ... + \cos n\theta = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\theta \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

d) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 3\theta + ... + \operatorname{sen} n\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\theta.\operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{0}{2}}$

e) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta + ... + \operatorname{sen}(2n-1)\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

f) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + ... + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$

g) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{n} + ... + \operatorname{sen}\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{2n}$

h) $\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{3\pi}{n} + ... + \cos\dfrac{(n-1)\pi}{n} = 0$

i) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha + \operatorname{sen} 5\alpha + ... + \operatorname{sen}(2n-1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + ... + \cos(2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha$

j) $\cos\dfrac{\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{3\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{5\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{7\pi}{2n+1} + ... + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

k) $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{4\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{6\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{8\pi}{2n+1} + ... + \cos\dfrac{2n\pi}{2n+1} = -\dfrac{1}{2}$

l) $\operatorname{sen}^2 0,5^\circ + \operatorname{sen}^2 1,5^\circ + \operatorname{sen}^2 2,5^\circ + ... + \operatorname{sen}^2 44,5^\circ = \dfrac{45}{2} - \dfrac{\operatorname{cossec} 1^\circ}{4}$

m) $1 + a.\cos\theta + a^2.\cos 2\theta + ... = \dfrac{1 - a.\cos\theta}{1 - 2a.\cos\theta + a^2}$

n) $\dfrac{1}{\sin\theta.\sin 2\theta} + \dfrac{1}{\sin 2\theta.\sin 3\theta} + ... + \dfrac{1}{\sin n\theta.\sin(n+1)\theta} = \dfrac{\cot\theta - \cot(n+1)\theta}{\sin\theta}$

o) $\dfrac{1}{\cos\theta.\cos 2\theta} + \dfrac{1}{\cos 2\theta.\cos 3\theta} + ... + \dfrac{1}{\cos n\theta.\cos(n+1)\theta} = \dfrac{\tan(n+1)\theta - \tan\theta}{\sin\theta}$

p) $\dfrac{1}{\cos\theta + \cos 3\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta + \cos 5\theta} + ... + \dfrac{1}{\cos\theta + \cos(2n+1)\theta} = \dfrac{\tan(n+1)\theta - \tan\theta}{2\sin\theta}$

q) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 3x + ... + \operatorname{sen}^2 nx = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(nx).\cos[(n+1)x]}{2.\operatorname{sen} x}$

r) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2 2nx = n + \dfrac{\operatorname{sen} 2nx.\cos(2n+1)x}{2.\operatorname{sen} x}$

142) Demonstre que:

a) $\cos x + \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) = 0$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(120^\circ - x) + \operatorname{sen}(120^\circ + x) = 0$

c) $\cos^2 x + \cos^2(120^\circ - x) + \cos^2(120^\circ + x) = \frac{3}{2}$

d) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2(120^\circ - x) + \operatorname{sen}^2(120^\circ + x) = \frac{3}{2}$

e) $\cos^3 x + \cos^3(120^\circ - x) + \cos^3(120^\circ + x) = \frac{3}{4}\cos 3x$

f) $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3(120^\circ - x) + \operatorname{sen}^3(120^\circ + x) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen} 3x$

g) $\cos^4 x + \cos^4(120^\circ - x) + \cos^4(120^\circ + x) = \frac{9}{8}$

h) $\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4(120^\circ - x) + \operatorname{sen}^4(120^\circ + x) = \frac{9}{8}$

i) $\cos^5 x + \cos^5(120^\circ - x) + \cos^5(120^\circ + x) = \frac{15}{16}\cos 3x$

j) $\cos^6 x + \cos^6(120^\circ + x) + \cos^6(120^\circ - x) = \frac{3.\cos 6x + 30}{32}$

k) $\cos^7 x + \cos^7(120^\circ - x) + \cos^7(120^\circ + x) = \frac{63}{64}\cos 3x$

143) Prove que $\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{\operatorname{sen} 4x} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{sen} 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ para todo número natural n e todo real x. (com $\operatorname{sen} 2^n x$ não nulo).

144) Dado que $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)\ldots(1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n$, determine n.

Dica: Prove que $1 + \operatorname{tg}(k) = \frac{\sqrt{2}.\operatorname{sen}(k + 45^\circ)}{\cos k}$

145) Prove que a média dos números da forma $n.\operatorname{sen} n^\circ$ $(n = 2, 4, 6, \ldots, 180)$ é igual a $\cot 1^\circ$.

146) Demonstre que $\operatorname{sen} 6^\circ = \frac{\sqrt{3 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{8}$.

147) Prove que $2\operatorname{sen} 2^\circ + 4\operatorname{sen} 4^\circ + 6\operatorname{sen} 6^\circ + \ldots + 180\operatorname{sen} 180^\circ = 90\operatorname{tg} 89^\circ$.

Equações Trigonométricas

4.1. DEFINIÇÃO

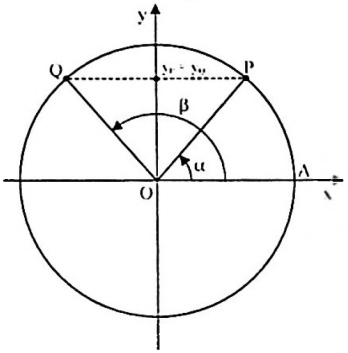
Considere que f(x) é uma função que envolve apenas constantes reais e operações com funções trigonométricas (sen, cos, tg, cotg, sec, cossec). Resolver uma equação trigonométrica f(x) = 0 significa determinar todos os valores de r tais que f(r) = 0. Estes valores r formam um conjunto denominado *conjunto solução* da equação f(x) = 0. Note que, para pertencer ao conjunto solução da equação f(x) = 0, todos os valores r devem pertencer ao domínio da função f(x).

De maneira geral, as equações trigonométricas são dadas originalmente por expressões envolvendo várias funções trigonométricas que, após a devida manipulação algébrica, se reduzem a resolver uma das equações fundamentais abaixo:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$$
$$\cos \alpha = \cos \beta$$
$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$$

Assim, é importante estudar com detalhes o conjunto solução destas equações trigonométricas fundamentais.

4.2. sen α = sen β



De modo que sen α = sen β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q , devem possuir a mesma ordenada: $y_P = y_Q$

Isto ocorre em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos:

$$\alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

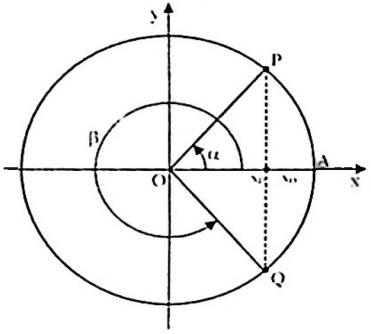
ii) α e π − β são côngruos:

$$\alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, conclui-se que:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

4.3. cos α = cos β



De modo que cos α = cos β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q , devem possuir a mesma abscissa: $x_P = x_Q$

Isto ocorre em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos:

$$\alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ii) α e 2π − β são côngruos:

$$\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

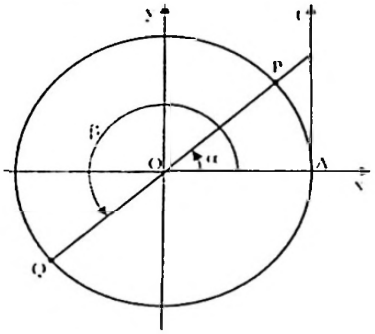
Logo, conclui-se que:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \textbf{ou} \\ \alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Observação: É muito comum utilizar no lugar de 2π − β o arco côngruo − β:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \textbf{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$

4.4. tg α = tg β



De modo que tg α = tg β, as imagens dos arcos α e β sobre o ciclo trigonométrico, respectivamente os pontos P e Q, devem estar alinhadas com o centro O do ciclo.

Isto ocorre em duas possibilidades:

i) α e β são côngruos:

$$\alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ii) α e π + β são côngruos:

$$\alpha = \pi + \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, conclui-se que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \textbf{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$$

4.5. SISTEMA DE EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ variáveis reais e $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, ..., $f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ equações envolvendo apenas funções trigonométricas. Estas equações formam um sistema de equações trigonométricas. Se uma n-ênupla ordenada $(r_1, r_2, ..., r_n)$ satisfaz todas as equações, isto é, $f_1(r_1, r_2, ..., r_n) = 0$, $f_2(r_1, r_2, ..., r_n) = 0$, ..., $f_m(r_1, r_2, ..., r_n) = 0$, então afirma-se que $(r_1, r_2, ..., r_n)$ é solução do sistema de equações. O conjunto solução do sistema de equações é o conjunto que reúne todas as n-ênuplas ordenadas que são solução simultânea de todas as equações dos sistema.

Se D_1 é domínio de f_1, D_2 o domínio de f_2, ..., D_m o domínio de f_m, é necessário verificar se $(r_1, r_2, ..., r_n)$, que foi encontrada a partir da manipulação algébrica das equações, pertence a $D = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_m$. Caso $(r_1, r_2, ..., r_n)$ não pertença a D, então $(r_1, r_2, ..., r_n)$ não é pertence ao conjunto solução do sistema de equação.

Por exemplo, considere o sistema trigonométrico $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Note que $x = \dfrac{\pi}{6}$ e $y = \dfrac{\pi}{2}$ satisfaz às duas equações do sistema. Assim, o par ordenado $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, é um elemento do conjunto solução do sistema.

4.6. SOLUÇÕES DENTRO DE UM INTERVALO

Até este momento, as soluções de uma equação ou sistema de equações trigonométricas foram estudadas englobando todos os arcos côngruos. Por exemplo, encontrou-se soluções do tipo $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Entretanto, é bastante comum determinar as soluções que pertençam a um determinado intervalo real, sobretudo o intervalo $[0, 2\pi]$. Para determinar quais soluções pertencem a um determinado intervalo, é necessário substituir valores inteiros de k de modo a encontrar a menor e a maior solução que pertençam ao intervalo designado. Por exemplo, as soluções do tipo $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}$ que pertencem ao intervalo $A = [0, 2\pi]$ são determinadas fazendo k assumir os menores números naturais:

i) $k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$; ii) $k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}$; iii) $k = 2 \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$;

iv) $k = 3 \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{6}$; v) $k = 4 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{3} > 2\pi$

Deste modo, as soluções do tipo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, no intervalo $[0, 2\pi]$ são $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

4.7. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMO RAÍZES DE POLINÔMIOS

As funções trigonométricas das soluções de determinadas equações trigonométricas podem ser interpretadas como raízes de polinômios. Estas equações, de maneira geral, envolvem arcos múltiplos de uma mesma variável, como sen 5θ, tg 9θ, ... Por exemplo, considere a equação $\cos 5\theta = 1$. Resolvendo essa equação obtém $5\theta = 2k\pi$, que implica $\theta = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Restringindo as soluções ao intervalo $[0, 2\pi[$, conclui-se que as soluções da equação $\cos 5\theta = 1$ são 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ e $\frac{8\pi}{5}$.

Desenvolvendo, a partir das fórmulas de adição de arcos, $\cos 5\theta$ encontra-se:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

Como $\cos 5\theta = 1$, então $16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta - 1 = 0$, onde pode-se afirmar que $\cos 0$ (= 1), $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$ e $\cos\frac{8\pi}{5}$ são raízes da equação

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Esta conclusão permite calcular o valor de operações com essas raízes. Pelas Relações de Girard, segue que a soma destas raízes vale 0:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -1$$

Também pelas Relações de Girard, o produto das raízes vale:

$$1.\cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{4\pi}{5}.\cos\frac{6\pi}{5}.\cos\frac{8\pi}{5} = -\frac{-1}{16} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{4\pi}{5}.\cos\frac{6\pi}{5}.\cos\frac{8\pi}{5} = \frac{1}{16}$$

Exercícios Resolvidos

1) Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Solução:

a) Sabe-se que $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, ou seja, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} \Rightarrow$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Sabe-se que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $\cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Sabe-se que $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, ou seja, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

2) Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 1$; b) $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 2.\operatorname{sen} 3x$;

c) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$; d) $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

Solução:

a) *1ª solução*

Dividindo a equação por 2: $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Conjunto solução: $S = \left\{2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$

2ª solução

$\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow \sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \cos x \Rightarrow$

$(\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2 x})^2 = (1-\cos x)^2 \Rightarrow 3 - 3\cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x \Rightarrow$

$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$

i) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ii) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

Como a equação foi elevada ao quadrado, é necessário testar todas as raízes na equação original. Perceba que as raízes do tipo $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ não satisfazem a equação original, uma vez que $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$

3ª solução

Como $\cos x = 0$ não é solução da equação, pode-se dividir os dois membros da equação original por $\cos x$: $\frac{\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = \sec x \Rightarrow$

$1 + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = \sqrt{1 + \text{tg}^2 x} \Rightarrow (1 + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x)^2 = (\sqrt{1 + \text{tg}^2 x})^2 \Rightarrow$

$1 + 2\sqrt{3}\,\text{tg}\, x + 3\,\text{tg}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x(\text{tg}\, x + \sqrt{3}) = 0$

i) $\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = k\pi$;

ii) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

Mais uma vez deve-se testar as raízes, onde verifica-se que as raízes do tipo $k\pi$, com k ímpar e $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ não satisfazem a equação original.

Assim, o conjunto solução é $S = \left\{2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$

b) Aplicando uma das transformações de soma em produto:

$\text{sen}\, 5x + \text{sen}\, x = 2.\text{sen}\, 3x \Rightarrow 2\,\text{sen}\frac{5x + x}{2}\cos\frac{5x - x}{2} - 2\,\text{sen}\, 3x = 0 \Rightarrow$

$\text{sen}\, 3x.\cos 2x - \text{sen}\, 3x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, 3x(\cos 2x - 1) = 0$

i) $\text{sen } 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

ii) $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

Note que todos os arcos da forma $k\pi$ podem ser escritos na forma $\frac{k\pi}{3}$, bastando fazer k múltiplo de 3. Logo, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{k\pi}{3}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Note que: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2.\text{sen}^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2}$

Assim: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\text{sen } 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

Conjunto solução: $S = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

d) Usando a fatoração $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$ segue que:

$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x.\cos^2 x) =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 3.\text{sen}^2 x.\cos^2 x = 1 - \frac{3\text{sen}^2 2x}{4}$

Logo: $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} \Rightarrow 1 - \frac{3\text{sen}^2 2x}{4} = \frac{7}{16} \Rightarrow \text{sen}^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\text{sen } 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

Conjunto solução: $S = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

3) (Ciaba-07) Se $\text{sen } 2x = \text{sen } x$ e $0 < x < \pi$, então x é:

a) $\pi/6$ b) $\pi/4$ c) $\pi/3$ d) $\pi/2$ e) $2\pi/3$

Solução: Alternativa C

Desenvolvendo a expressão obtém-se:

$\text{sen } 2x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow 2\text{sen}x.\cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x(2\cos x - 1) = 0$

Assim, existem duas opções:

i) $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, onde nenhum arco pertence ao intervalo $0 < x < \pi$

ii) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, onde apenas $x = \frac{\pi}{3}$ pertence ao intervalo $0 < x < \pi$

4) (ITA-06) O conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2 x - 1)(1 - \operatorname{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in Z$, é

a) $\{\pi/3 + k\pi/4, k \in Z\}$ b) $\{\pi/4 + k\pi/4, k \in Z\}$

c) $\{\pi/6 + k\pi/4, k \in Z\}$ d) $\{\pi/8 + k\pi/4, k \in Z\}$

e) $\{\pi/12 + k\pi/4, k \in Z\}$

Solução: Alternativa D

1ª solução

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = 4 \Rightarrow (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^2 = (2 \operatorname{sen} x \,.\, \cos x)^2 \Rightarrow$$

$\cos^2 2x = \operatorname{sen}^2 2x \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \cos^2 2x \Rightarrow$

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

2ª solução

Sabe-se que $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. Logo: $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\left(1 - \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right) = 4 \Rightarrow$

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1)^2 = 4\operatorname{tg}^2 x = (2\operatorname{tg} x)^2 \overset{\operatorname{tg} x \neq 1}{\Rightarrow} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

5) (ITA-08) A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a:

a) 2π b) $\frac{23}{12}\pi$ c) $\frac{9}{6}\pi$ d) $\frac{7}{6}\pi$ e) $\frac{13}{12}\pi$

Solução: Alternativa E

Utilizando uma das transformações da soma em produto:

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{9x + 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x - 3x}{2}\right) + 2\cos 6x = 0$$

$2\cos 6x\,(\cos 3x + 1) = 0$ assim, para $0 \leq x \leq \pi/2$, temos:

i) $\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ Logo: $x = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}\right\}$

ii) $\cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = \pi + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{3}$

No intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$ tem-se apenas a solução $x = \dfrac{\pi}{3}$

Assim: $S = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{12}$

6) (ITA-10) Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}, 0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma sen α + sen β, então α é igual a.

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{5}$ d) $\frac{5\pi}{8}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

Solução: Alternativa B

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\text{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Uma vez que o valor máximo de um cosseno é 1, tem-se que:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} = 2k\pi \Rightarrow \alpha - \beta = 4k\pi, k \in Z$$

Como $0 \le \alpha \le \beta$ e $\alpha + \beta = 4\pi/3$, a única possibilidade é $k = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 2\pi/3$

7) (ITA-10) Considere a equação $(3 - 2\cos^2 x)(1 + \text{tg}^2\frac{x}{2}) - 6\text{tg}\frac{x}{2} = 0$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0,\pi[$

b) Para as soluções encontradas em a), determine cotg x

Solução:

$$[3 - 2(1 - \text{sen}^2 x)]\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 6\frac{\text{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow 2\text{sen}^2 x + 1 = 6\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$2\text{sen}^2 x + 1 = 3\text{sen}\,x \Rightarrow 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\,x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow$$

$\text{sen}x = 1$ ou $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$

i. $\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$ no intervalo $[0, \pi[$ existe apenas a raiz $x = \frac{\pi}{2}$

ii. $\text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow$ no intervalo $[0, \pi[$ existem apenas as raízes $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

b) i) $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{cotg}\,x = 0$;

ii) $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{cotg}x = \sqrt{3}$;

iii) $x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \text{cotg}x = -\sqrt{3}$

8) (ITA-12) Determine os valores reais de x de modo que $\text{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Solução:

$$\text{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x) = 2.\left(\frac{1}{2}.\text{sen}(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right) =$$

$$= 2.\left(\text{sen}(2x).\cos\frac{\pi}{3} - \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos(2x)\right) = 2\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Tal expressão assume valor máximo se, e somente se:

$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in Z$, sendo Z o conjunto dos números inteiros.

9) (ITA-13) Seja a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \text{sen}^8 x + 4\text{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$.

é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas III. C ( ) apenas I e III.

D ( ) apenas II e IV. E ( ) todas.

Solução: Alternativa E

Note que:

$\cos^8 x = (1 - \text{sen}^2 x)^4 = 1 - 4\,\text{sen}^2 x + 6\,\text{sen}^4 x - 4\,\text{sen}^6 x + \text{sen}^8 x \Rightarrow$

$6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x + 1 - a = 0$

I. $6\text{sen}^4 x - 4\,\text{sen}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow 6y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ não existe $x \in R$. Item verdadeiro

II. $12\text{sen}^4 x - 8\text{sen}^2 x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x \in \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right\} \Rightarrow 8$ soluções.

Item verdadeiro

III. $6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = 0$ onde existem 3 soluções $(0, \pi, 2\pi)$ ou $\text{sen}\,x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ com 4 soluções. Item verdadeiro

IV. $6\text{sen}^4 x - 4\text{sen}^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm 1 \Rightarrow$ 2 soluções $(\pi/2$ e $3\pi/2)$ ou $\text{sen}^2 x = -1/3$ (não convém)

Item verdadeiro

10) (ITA-13) Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta)\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - 2\cos^2(\alpha-\beta) = -1 \quad \text{e}$$
$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) = \sqrt{3}$$

Solução:

1) $\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta + \cos\alpha.\cos\beta = 2\cos^2(\alpha-\beta) - 1 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos 2(\alpha-\beta) \Rightarrow$
$\alpha - \beta = \pm 2.(\alpha-\beta)$

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}.\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\alpha + \beta - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6}$

3) $\begin{cases} \alpha-\beta = \pm 2(\alpha-\beta) \\ \alpha+\beta = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Logo: $S = \left\{\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right);\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

11) (ITA-05) Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y) = \frac{1}{2}$$
$$\text{sen}\,x + \cos y = 1$$

Solução:

Usando a fórmula da soma de senos, tem-se o seguinte sistema: $\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\cos y = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases}$

Deste sistema, percebe-se que sen x e cos y são raízes da equação: $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$,

que resolvida, dá: $\text{sen}\,x = \cos y = \frac{1}{2}$, ou seja, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$ e $y = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$.

Desta forma, os pares de respostas são:

$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right)$

12) (ITA-04) Prove que, se os ângulos internos α, β ou γ de um triângulo satisfazem a equação **sen** (3α) + **sen** (3β) + **sen** $(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos internos α, β ou γ é igual a **60°**.

Solução:

$0 = \text{sen}(3\alpha) + \text{sen}(3\beta) + \text{sen}(3\gamma) =$

$= 2\text{sen}[3(\alpha + \beta)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= 2\text{sen}[3(180^\circ - \gamma)/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= 2\text{sen}[270^\circ - 3\gamma/2]\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= -2\cos(3\gamma/2)\cos[(3\alpha - 3\beta)/2] + 2\text{sen}(3\gamma/2)\cos(3\gamma/2) =$

$= 2\cos(3\gamma/2)[\text{sen}(3\gamma/2) - \cos[(3\alpha - 3\beta)/2] =$

$= 2\cos(3\gamma/2)|\cos(90^\circ - 3\gamma/2) - \cos[(3\alpha - 3\beta)/2] =$

$= -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}[(180^\circ + 3\alpha - 3\beta - 3\gamma)/4]\text{sen}[(180^\circ - 3\alpha + 3\beta - 3\gamma)/4] =$

$= -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}|(180^\circ + 3\alpha - 540^\circ + 3\alpha)/4|\text{sen}|(180^\circ + 3\beta + 3\beta - 540^\circ)/4| =$

$= -4\cos(3\gamma/2)\text{sen}(3\alpha/2 - 90^\circ)\text{sen}(3\beta/2 - 90^\circ) = -4\cos(3\gamma/2)\cos(3\alpha/2)\cos(3\beta/2)$

Assim, pelo menos um dos valores de $\cos(3\alpha/2)$, $\cos(3\beta/2)$, $\cos(3\gamma/2)$ deve ser igual a zero.

Perceba que $\cos(3x/2) = 0 \Rightarrow 3x/2 = 90^\circ + (180^\circ)k \Rightarrow x = 60^\circ + (120^\circ)k$, $k \in Z$

Se x for ângulo de um triângulo (no caso, x pode ser igual a α, β ou γ), a única solução possivel é $x = 60^\circ$.

Portanto, pelo menos um dos ângulos α, β e γ deve ser igual a 60°.

13) (IME-03) Resolva a equação $\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,(2\alpha) = 2.\text{tg}\,(3\alpha)$, sabendo-se que $\alpha \in [0, \pi/2)$.

1ª Solução:

Repare, inicialmente, que $\alpha \neq \pi/6$ e $\alpha \neq \pi/4$.

Portanto, pode-se afirmar que $\text{tg}\,(3\alpha) = \text{tg}\,(2\alpha + \alpha) = \dfrac{\text{tg}\,(\alpha) + \text{tg}\,(2\alpha)}{1 - \text{tg}\,(\alpha).\text{tg}\,(2\alpha)}$.

Assim: $\text{tg}\,(3\alpha) = \dfrac{2.\text{tg}\,(3\alpha)}{1 - \text{tg}\,(\alpha).\text{tg}\,(2\alpha)} \Rightarrow \text{tg}(3\alpha)[1 - \text{tg}\,(\alpha).\text{tg}\,(2\alpha)] = 2.\text{tg}\,(3\alpha) \Rightarrow$

$\text{tg}\,(3\alpha)|1 + \text{tg}\,(\alpha).\text{tg}\,(2\alpha)| = 0$

i) se $\text{tg}\,(3\alpha) \neq 0 \Rightarrow \text{tg}\,(\alpha).\text{tg}\,(2\alpha) = -1 \Rightarrow \dfrac{2.\text{tg}^2(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)} = -1 \Rightarrow$

$2.\text{tg}^2(\alpha) = -1 + \text{tg}^2(\alpha) \Rightarrow \text{tg}^2(\alpha) = -1$ que não possui solução real.

ii) $\text{tg}\,(3\alpha) = 0 \Rightarrow 3\alpha = k.\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{k.\pi}{3}$

Como $\alpha \in [0, \pi/2)$ então $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi/3$

2ª Solução:

$$\text{tg}\,(3\alpha) = \text{tg}\,(\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}2\alpha}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}2\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha + \dfrac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}}{1 - \text{tg}\alpha.\dfrac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}} = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}^3\alpha + 2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha - 2.\text{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow$$

$3\operatorname{tg}\alpha - 9\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha + 3\operatorname{tg}^5\alpha = 6\operatorname{tg}\alpha - 6\operatorname{tg}^3\alpha - 2\operatorname{tg}^3\alpha + 2\operatorname{tg}^5\alpha \Rightarrow$

$\operatorname{tg}^5\alpha - 2\operatorname{tg}^3\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}^4\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha - 3) = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - 3)(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) = 0$

i) $\operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

ii) $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{3}$. Como $\alpha \in 1°$ quadrante então o único valor que satisfaz é $\alpha = \pi/3$.

iii) $\operatorname{tg}^2\alpha = -1$ não possui solução real.

14) (IME-05) Resolva a equação $2\operatorname{sen} 11x + \cos 3x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 3x = 0$.

Solução:

$$\frac{1}{2}.\cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2}.\operatorname{sen}(3x) = -\operatorname{sen}(11x) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}.\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}.\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(-11x) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}(-11x)$$

$$\text{i) } 3x - 11x + \frac{\pi}{6} = \pi + k.2\pi \Rightarrow -8x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{48} - k.\frac{\pi}{4}$$

$$\text{ii) } 3x + \frac{\pi}{6} = -11x + k.2\pi \Rightarrow 14x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7}$$

$$\text{Assim: } S = \left\{x \in \Re / x = -\frac{\pi}{84} + \frac{k\pi}{7} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{48} - \frac{k.\pi}{4}, k \in Z\right\}$$

15) (IME-06) Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x) = 1.$$

Determine os valores destes ângulos (em radianos).

1ª Solução:

Se os ângulos de um triângulo estão em PA então estes são da forma $\frac{\pi}{3} - A$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + A$, onde A é a razão da PA.

Fazendo uma troca de variável, ou seja, chamando $\operatorname{sen}x + \cos x = y$, segue que $(-\operatorname{sen}x.\cos x) = \frac{1 - y^2}{2}$, Substituindo na equação dada, obtém-se:

$$y\left(1+\frac{1-y^2}{2}\right)=1 \Rightarrow -y^3+3y-2=0$$

Como a soma dos coeficientes é zero, então uma das raízes é 1. Utilizando Briot-Ruffini, tem-se $-y^2-y+2=0$, que resolvida dá as outras raízes, que são -2 e 1.

Se $y=1$, então $\text{sen } x+\cos x=1$, porém, $\text{sen } x+\cos x=\sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, logo,

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ é a única possibilidade.

Se $y=-2$, então $\text{sen } x+\cos x=-2$, ou seja, $\sqrt{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2$ (Impossível)

Como x é ângulo de um triângulo, então a única possibilidade é $x=\frac{\pi}{2}$.

Assim, os ângulos do triângulo são $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}$.

2ª Solução:

Desenvolvendo a equação trigonométrica encontra-se $\text{sen}^3 x+\cos^3 x=1$.

Claramente $\text{sen } x=1$ e $\cos x=0$ ou $\text{sen } x=0$ e $\cos x=1$ são soluções da equação.

Destas, apenas $\text{sen } x=1$ e $\cos x=0$ satisfaz o fato de x ser ângulo de um triângulo.

Assim, $x=\pi/2$ é solução.

Se $0<\text{sen } x<1$ e $0<\cos x<1$ então $1=\text{sen}^3 x+\cos^3 x<\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, que é uma contradição.

Logo, $x=\pi/2$, implicando que os ângulos do triângulo são $\pi/6$, $\pi/3$ e $\pi/2$.

16) (IME-07) Resolva a equação: $\log_{(\text{sen } x+\cos x)}(1+\text{sen } 2x)=2$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Solução:

Condições de existência de soluções reais, em $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

I. $1+\text{sen } 2x>0\Leftrightarrow(\text{sen } x+\cos x)^2>0\Leftrightarrow \text{sen } x+\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}$

II. $0<\text{sen } x+\cos x\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

Já que x está no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, deve-se impor que:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, conclui-se que a equação tem solução real se $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Deste modo:

$\log_{(\text{sen } x \cdot \cos x)}(1 + \text{sen } 2x) = \log_{(\text{sen } x \cdot \cos x)}(\text{sen } x + \cos x)^2 =$

$= 2 \cdot \log_{(\text{sen } x \cdot \cos x)}(\text{sen } x + \cos x) = 2$, para todo x do domínio da equação.

Finalmente, o conjunto solução da equação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$

17) (IME-08) Determine o conjunto-solução da equação

$$\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$$

Solução:

$\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \text{sen}^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow$

$(\text{senx} + \text{cosx})(\text{sen}^2 x - \text{senx.cosx} + \cos^2 x) = (1 + \text{senx.cosx})(1 - \text{senx.cosx}) \Leftrightarrow$

$(\text{senx} + \text{cosx})(1 - \text{senx.cosx}) = (1 + \text{senx.consx})(1 - \text{senx.cosx}) \Leftrightarrow$

$(1 - \text{senx.cosx})(\text{senx} + \text{cosx} - 1 - \text{senx.cosx}) = 0 \Leftrightarrow$

$(1 - \text{senx.cosx})[(\text{senx} - 1)] - \text{cosx}(\text{senx} - 1)] = 0 \Leftrightarrow$

$(1 - \text{senx.cosx})(\text{senx} - 1)(1 - \text{cosx}) = 0.$

Há, assim, três possibilidades:

I – $\text{senx.cosx} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}2x = 2$ (não convém) ou

II – $\text{senx} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ ou

III – $\text{cosx} = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$, $k \in Z$

Portanto, o conjunto solução é: $S = \{ x \in R : X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi\}$

18) (IME-09) Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação

$\sqrt{a}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{3a}\sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{2x}$, para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq a$.

Solução:

Fazendo a substituição $x = a \text{ sen } 0$ (como $0 \leq x \leq a$ tem-se $0 \leq \text{sen } 0 \leq 1$) obtém-se:

$\sqrt{a}\sqrt{a + a\cos\theta} + \sqrt{3a}\sqrt{a - a\cos\theta} = 2\sqrt{2}a\text{sen}\theta, \cos\theta \geq 0 \Rightarrow$

$$a\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) = a \text{ sen } \theta, \cos\theta \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\frac{\theta}{2} = \text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\,\theta$$

Assim, tem-se as seguintes possibilidades:

I) $\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \Rightarrow x = a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4k\pi\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

II) $\theta = \pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3}$

$k = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5\pi}{9} \Rightarrow \cos 0 < 0$ (não convém)

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{17\pi}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < 0$ (não convém)

$k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{29\pi}{9} \Rightarrow \cos\theta < 0$ (não convém)

$k \geq 3$: os arcos encontrados são côngruos aos casos de k = 0, 1 ou 2.

Portanto, a única solução é $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

19) (ITA-16) Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$. Determine todos os pares ordenados (x, y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solução:

Perceba que $\operatorname{sen} x > 0$ e $\operatorname{sen} y > 0$, já que $x, y \in [0, \pi]$

Como $\sqrt{2}\cos x = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} y > 0$ então $x \in (0, \pi/2)$

Como $\sqrt{3}\cos y = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}\operatorname{sen} x < 0$ então $y \in (\pi/2, \pi)$

Somando as equações e dividindo por 2:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} y + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$$

Note que:

i) $x + \pi/4 > \pi/4$ e $x + \pi/4 < \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$

ii) $y - \pi/3 > \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ e $y - \pi/3 < \pi - \pi/3 = 2\pi/3$

Ou seja, existem duas possibilidades:

$x + \pi/4 = y - \pi/3$ ou $x + \pi/4 + y - \pi/3 = \pi$

Subtraindo as equações e dividindo por 2:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \quad (1)$$

1° caso: $x + \pi/4 = y - \pi/3$

Assim, (1) fica da forma:

$$\operatorname{sen}\left(y-\frac{5\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2.\operatorname{sen}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{7\pi}{12}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$$

i) $y - \pi/4 = 7\pi/12 \Rightarrow y = 5\pi/6$

Deste modo: $x = y - 7\pi/12 = \pi/4$

ii) $y - \pi/4 = 5\pi/12 \Rightarrow y = 2\pi/3$

Desta forma: $x = y - 7\pi/12 = \pi/12$

2° caso: $x + \pi/4 + y - \pi/3 = \pi \Rightarrow x + y = 13\pi/12$

$$(1) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}-y\right)+\operatorname{sen}\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2.\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}.\cos\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\cos\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\cos\frac{7\pi}{12} \Rightarrow$$

Como $\pi/4 < y - \pi/4 < 3\pi/4 \Rightarrow y - \pi/4 = 7\pi/12 \Rightarrow y = 5\pi/6$

Logo $x = 13\pi/12 - y = 13\pi/12 - 5\pi/6 = \pi/4$

Portanto, existem dois pares que satisfazes a equação $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$.

20) (Olimpíada da Espanha-85) Resolva a equação $\operatorname{tg}^2 2x + 2.\operatorname{tg} 2x.\operatorname{tg} 3x = 1$.

Solução:

$$\operatorname{tg}^2 2x + 2.\operatorname{tg} 2x.\operatorname{tg} 3x = 1 \Rightarrow 2.\operatorname{tg} 2x.\operatorname{tg} 3x = 1 - \operatorname{tg}^2 2x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{2.\operatorname{tg} 2x} \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 4x} \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \cot 4x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)$$

i) $3x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, k \in Z$

ii) $3x = \pi + \frac{\pi}{2} - 4x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, k \in Z$

21) (Olimpíada AIME-2006) Determine a soma de todos os x tais que

$$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8.\cos^3 4x.\cos^3 x$$

onde x é um ângulo medido em graus e $100° < x < 200°$.

Solução:

$\cos^3 3x + \cos^3 5x = 8.\cos^3 4x.\cos^3 x \Rightarrow$

$(\cos 3x + \cos 5x)(\cos^2 3x - \cos 3x.\cos 5x + \cos^2 5x) = 8.\cos^3 4x.\cos^3 x \Rightarrow$

$2.\cos 4x.\cos x.(\cos^2 3x - \cos 3x.\cos 5x + \cos^2 5x) = 8.\cos^3 4x.\cos^3 x$

Assim, se $\cos 4x.\cos x = 0$ a equação é satisfeita:

i) $\cos 4x.\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm 22{,}5° + 90°.k \Rightarrow x = 112{,}5°$ ou $x = 157{,}5°$

Para $\cos 4x.\cos x \neq 0$ a equação fica da forma:

$\cos^2 3x - \cos 3x.\cos 5x + \cos^2 5x = 4.\cos^2 4x.\cos^2 x \Rightarrow$

$\cos^2 3x - \cos 3x.\cos 5x + \cos^2 5x = (\cos 5x + \cos 3x)^2 \Rightarrow$

$\cos^2 3x - \cos 3x.\cos 5x + \cos^2 5x = \cos^2 5x + 2.\cos 5x.\cos 3x + \cos^2 3x \Rightarrow$

$\cos 3x.\cos 5x = 0$

ii) $\cos 3x = 0 \Rightarrow x = \pm 30° + 120°.k \Rightarrow x = 150°$

iii) $\cos 5x = 0 \Rightarrow x = \pm 18° + 72°.k \Rightarrow x = 126°$ ou $x = 162°$ ou $x = 198°$

Assim, a soma de todos os x que satisfazem o enunciado é:

$112{,}5° + 157{,}5° + 150° + 126° + 162° + 198° = 906°$

22) Ache a, b, c inteiros tais que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são $\cos 72^0$ e $\cos 144^0$.

Solução:

Considere a equação $\cos 3x = \cos 2x$, cujas soluções são:

i) $3x = 2x + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$

ii) $3x = -2x + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{5}$

Desenvolvendo a equação em função de cos x:

$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow 4.\cos^3 x - 3.\cos x = 2.\cos^2 x - 1 \Rightarrow$

$4.\cos^3 x - 2.\cos^2 x - 3.\cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(4.\cos^2 x + 2.\cos x - 1) = 0$

Fazendo $\cos x = t$ segue-se que cos 0, cos 72° e cos 144° são raízes da equação $(t - 1)(4.t^2 + 2.t - 1) = 0$, ou seja, cos 72° e cos 144° são raízes da equação $4.t^2 + 2.t - 1 = 0$

23) (Olimpíada da Bélgica-06)

a) Encontre todos os números reais α tais que $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha)$.

b) Determine inteiros a, b, c, d tais que $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$, $\cos\dfrac{6\pi}{7}$, são soluções da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Solução:

a) $\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow 4\alpha = 3\alpha + 2k\pi$ ou $4\alpha = -3\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$ ou $\alpha = \dfrac{2k\pi}{7}$, logo $1, \cos\dfrac{2\pi}{7}, \cos\dfrac{4\pi}{7}, \cos\dfrac{6\pi}{7}$ são as raízes dessa equação.

Por outro lado, tem-se que $\cos(4\alpha) = 8\cdot\cos^4\alpha - 8\cdot\cos^2\alpha + 1$ e $\cos(3\alpha) = 4\cdot\cos^3\alpha - 3\cdot\cos\alpha$. Faça $\cos\alpha = t$. Daí, segue que

$\cos(4\alpha) = \cos(3\alpha) \Leftrightarrow (t-1)(8t^3 + 4t^2 - 4t - 1) = 8t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 3t + 1 = 0$

Assim, a equação $8t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0$ tem como soluções $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$.

24) Calcule o valor de $tg^2\ 10° + tg^2\ 50° + tg^2\ 70°$.

Solução:

$$\text{Como } tg\,3x = \frac{3tg\,x - tg^3\,x}{1-3tg^2\,x} \Rightarrow tg\,9x = \frac{3\left(\frac{3tg\,x - tg^3\,x}{1-3tg^2\,x}\right) - \left(\frac{3tg\,x - tg^3\,x}{1-3tg^2\,x}\right)^3}{1-3\left(\frac{3tg\,x - tg^3\,x}{1-3tg^2\,x}\right)^2} \Rightarrow$$

$$tg\,9x = \frac{9tg\,x - 84tg^3\,x + 126tg^5\,x - 36tg^7\,x + tg^9\,x}{1 - 36tg^2\,x + 126tg^4\,x - 84tg^6\,x + 9tg^8\,x}$$

Sabe-se que tg 9x não está definida para os valores em que o denominador é igual a 0. Assim, a equação $1 - 36t^2 + 126t^4 - 84t^6 + 9t^8 = 0$ possui como raízes tg 10°, tg 30°, tg 50°, tg 70°, tg 110°, tg 130°, tg 150° e tg 170°.

Fazendo $x = t^2$ segue que $tg^2\ 10°$, $tg^2\ 30°$, $tg^2\ 50°$ e $tg^2\ 70°$ são as raízes da equação:

$$1 - 36x + 126x^2 - 84x^3 + 9x^4 = 0.$$

Pelas relações de Girard: $tg^2\ 10° + tg^2\ 30° + tg^2\ 50° + tg^2\ 70° = \frac{84}{9} \Rightarrow$

$$tg^2\ 10° + \frac{1}{3} + tg^2\ 50° + tg^2\ 70° = \frac{84}{9} \Rightarrow tg^2\ 10° + tg^2\ 50° + tg^2\ 70° = 9$$

25) Prove que $tg^2\ 4° + tg^2\ 8° + tg^2\ 12° + \ldots + tg^2\ 88° = 990$.

Solução:

Seja $z = \cos 0 + i.\text{sen } 0 \Rightarrow z^{45} = (\cos 0 + i.\text{sen } 0)^{45} = \cos 450 + i.\text{sen } 450$

$$\cos 450 = \binom{45}{0}\cos^{45} 0 - \binom{45}{2}\cos^{43} 0.\text{sen}^2 0 + \ldots + \binom{45}{44}\cos 0.\text{sen}^{44} 0$$

$$\text{sen}45\theta = \binom{45}{1}\cos^{44}\theta.\text{sen}\theta - \binom{45}{3}\cos^{42}\theta.\text{sen}^3\theta + \ldots + \binom{45}{45}\text{sen}^{45}\theta$$

Assim:

$$tg45\theta = \frac{\binom{45}{1}\cos^{44} 0.\text{sen}\theta - \binom{45}{3}\cos^{42} 0.\text{sen}^3 0 + \ldots + \binom{45}{45}\text{sen}^{45} 0}{\binom{45}{0}\cos^{45}\theta - \binom{45}{2}\cos^{43}\theta.\text{sen}^2\theta + \ldots + \binom{45}{44}\cos\theta.\text{sen}^{44}\theta} \Rightarrow$$

$$tg45\theta = \frac{\binom{45}{1}tg\theta - \binom{45}{3}tg^3\theta + ... + \binom{45}{45}tg^{45}\theta}{\binom{45}{0} - \binom{45}{2}tg^2\theta + ... + \binom{45}{44}tg^{44}\theta}$$

Fazendo tg θ = t segue que: $tg45\theta = \frac{\binom{45}{1}t - \binom{45}{3}t^3 + ... + \binom{45}{45}t^{45}}{\binom{45}{0} - \binom{45}{2}t^2 + ... + \binom{45}{44}t^{44}}$

$$tg\ 450 = 0 \Leftrightarrow \binom{45}{45}t^{45} - \binom{45}{43}t^{43} + ... - \binom{45}{3}t^3 + \binom{45}{1}t = 0 \quad (1)$$

A equação (1) possui como raízes t = 0, ± tg 4°, ± tg 8°, ..., ± tg 88°

Dividindo (1) por t obtém-se $\binom{45}{45}t^{44} - \binom{45}{43}t^{42} + ... - \binom{45}{3}t^2 + \binom{45}{1} = 0$ (2)

Logo, as raízes da equação (2) são: t = ± tg 4°, ± tg 8°, ..., ± tg 88°

Fazendo $t^2 = x$ obtém-se $\binom{45}{45}x^{22} - \binom{45}{43}x^{21} + ... - \binom{45}{3}x + \binom{45}{1} = 0$ (3)

Portanto, as raízes de (3) são $x = tg^2 4°, tg^2 8°, ..., tg^2 88°$

Deste modo, a soma das raízes de (3) vale:

$$tg^2 4° + tg^2 8° + tg^2 12° + ... + tg^2 88° = \frac{\binom{45}{43}}{\binom{45}{45}} = 990$$

26) (Olimpíada da Romênia-96) Mostre que

$$\cos^7 x + \cos^7\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^7\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{63}{64}\cos 3x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

Seja $z = \cos\theta + i.\text{sen}\,\theta$

i) $(\cos 0 + i.\text{sen}\,0)^5 = \cos 50 + i.\text{sen}\,50$

$$\cos 5\theta = \binom{5}{0}\cos^5\theta - \binom{5}{2}\cos^3 0.\text{sen}^2\theta + \binom{5}{4}\cos 0.\text{sen}^4\theta \Rightarrow$$

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta(1 - \cos^2\theta)^2 \Rightarrow$

$\cos 50 = \cos^5 0 - 10\cos^3 0 + 10\cos^5 0 + 5\cos\theta - 10\cos^3 0 + 5\cos^5\theta \Rightarrow$

$\cos 5\theta = 16.\cos^5\theta - 20.\cos^3\theta + 5.\cos\theta$ (1)

ii) $(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)^7 = \cos 7\theta + i.\text{sen}\,7\theta$

$\cos 7\theta = \binom{7}{0}\cos^7\theta - \binom{7}{2}\cos^5\theta.\text{sen}^2\theta + \binom{7}{4}\cos^3\theta.\text{sen}^4\theta - \binom{7}{6}\cos\theta.\text{sen}^6\theta \Rightarrow$

$\cos 7\theta = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3 \Rightarrow$

$\cos 7\theta = \cos^7\theta - 21\cos^5\theta + 21\cos^7\theta + 35\cos^3\theta - 70\cos^5\theta + 35\cos^7\theta - 7\cos\theta +$

$+ 21\cos^4\theta - 21\cos^5\theta + 7\cos^7\theta \Rightarrow$

$\cos 7\theta = 64.\cos^7\theta - 112.\cos^5\theta + 56.\cos^3\theta - 7.\cos\theta \quad (2)$

Além disso, sabe-se que $\cos 3\theta = 4.\cos^3\theta - 3.\cos\theta \quad (3)$

Multiplicando a equação (1) por 7:

$7\cos 5\theta = 112.\cos^5\theta - 140.\cos^3\theta + 35.\cos\theta \quad (4)$

Somando as equações (2) e (4):

$\cos 7\theta + 7.\cos 5\theta = 64.\cos^7\theta - 84.\cos^3\theta + 28.\cos\theta \quad (5)$

Multiplicando a equação (3) por 21: $21.\cos 3\theta = 84.\cos^3\theta - 63.\cos\theta \quad (6)$

Somando as equações (5) e (6):

$\cos 7\theta + 7.\cos 5\theta + 21.\cos 3\theta = 64.\cos^7\theta - 35.\cos\theta \Rightarrow$

$64.\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7.\cos 5\theta + 21.\cos 3\theta + 35.\cos\theta \quad (7)$

$\theta \to \theta + 2\pi/3$:

$64.\cos^7(\theta + 2\pi/3) = \cos(7\theta + 2\pi/3) + 7.\cos(5\theta + 4\pi/3) + 21.\cos 3\theta +$

$+ 35.\cos(\theta + 2\pi/3) \quad (8)$

$\theta \to \theta + 4\pi/3$:

$64.\cos^7(\theta + 4\pi/3) = \cos(7\theta + 4\pi/3) + 7.\cos(5\theta + 2\pi/3) + 21.\cos 3\theta +$

$+ 35.\cos(\theta + 4\pi/3) \quad (9)$

Observe que, para um α qualquer:

$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}(\alpha + 2\pi/3) + \text{sen}(\alpha + 4\pi/3) =$

$= \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha.\cos 2\pi/3 + \cos\alpha.\text{sen}\,2\pi/3 + \text{sen}\,\alpha.\cos 4\pi/3 + \cos\alpha.\text{sen}\,4\pi/3 =$

Como $\cos 2\pi/3 = \cos 4\pi/3 = -1/2$ e $\text{sen}\,2\pi/3 = -\text{sen}\,4\pi/3$, segue que:

$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}(\alpha + 2\pi/3) + \text{sen}(\alpha + 4\pi/3) = 0 \quad (10)$

Assim, somando as equações (7), (8), (9) e aplicando (10):

$64.\cos^7\theta + 64.\cos^7(\theta + 2\pi/3) + 64.\cos^7(\theta + 4\pi/3) = 63.\cos 3\theta \Rightarrow$

$\cos^7\theta + \cos^7(\theta + 2\pi/3) + \cos^7(\theta + 4\pi/3) = (63/64).\cos 3\theta$

Exercícios de Vestibular

1) (Mackenzie-00) O número de valores de x, $0 \le x \le 2\pi$, tais que $(\text{sen } x + \cos x)^2 = 1$, é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) maior que 5

2) (FGV-01) Resolva as seguintes equações trigonométricas:
a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, onde $0 \le x \le 2\pi$.
b) $\text{sen } x = \cos 2x$, onde $0 \le x \le 2\pi$.

3) (FEI-12) A soma das raízes da equação $1 - \text{sen}^2 x + \cos(-x) = 0$, para $0 \le x \le 2\pi$, é igual a:
a) $3\pi/2$ b) $5\pi/2$ c) 3π d) 5π e) $7\pi/2$

4) (UEFS-12) O número de soluções da equação $3\cos^2 x = 2 + 2\text{sen}x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5) (UEL-07) Sabendo que $\text{sen } \alpha = \cos \beta$ para α e β números reais, considere as afirmações.
I. $\alpha + \beta = \pi/2 + 2k\pi$ ou $\alpha - \beta = \pi/2 + 2k\pi$, com k inteiro.
II. $\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta = 1$.
III. $\alpha = \beta = (2k - 1)\pi/4$, com k inteiro.
IV. $\text{sen}(-\alpha) = \cos(-\beta)$.
A alternativa que contém todas as afirmativas corretas é:
a) I e II b) I e III c) II e III d) I, II e IV e) II, III e IV

6) (UFSCar-02) O valor de x, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, tal que $4(1 - \text{sen}^2 x)(\sec^2 x - 1) = 3$ é
a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/6$ e) 0

7) (UFCE-10) O número de soluções da equação $4\text{sen}^4 x - 5\text{sen}^2 x + 1 = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é
A) 4. B) 6. C) 8. D) 10.

8) (Unesp-04) Dada a equação $\cos(4x) = -\frac{1}{2}$.

a) verifique se o ângulo x pertencente ao 1º quadrante, tal que $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ satisfaz a equação acima;
b) encontre as soluções da equação dada, em toda a reta.

9) (FEI-17) O produto dos valores do conjunto solução da equação $8\sqrt{1-\cos^2 x} = 4$ para $0 \le x \le p$ é igual a:

a) $\frac{\pi^2}{36}$ b) $\frac{\pi^2}{9}$ c) $\frac{\pi^2}{16}$ d) $\frac{5\pi^2}{9}$ e) $\frac{5\pi^2}{36}$

10) (UFPA-97) Dê a solução geral da equação

$$(\text{sen } 2x + \cos 2x)^2 - \text{sen } 4x + \cos^2 4x = \text{sen}^2 4x$$

11) (UFPA-04) Ao observar a 6ª volta de uma roda gigante, Lucas fica curioso por saber de quantos radianos é o arco descrito pela cadeira onde está sua irmã Luana. Sendo $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$ o ponto da trajetória onde se encontra Luana, o número de radianos encontrados por Lucas é:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{21\pi}{4}$ d) $\frac{21\pi}{2}$ e) $\frac{41\pi}{4}$

12) (UFPA-06) As soluções da equação

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)+\cos(2\pi-x)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\text{sen}(2\pi+x)} = 1$$

para $0 \le x \le 2\pi$, são tais que

(A) somam π (B) somam 2π
(C) diferem de 2π (D) diferem de π
(E) somam $\pi/2$

13) (UFPA-08) Considere a função f dada por $f(x) = 8 + \text{sen}(x - \pi/7)$. Podemos afirmar que f assume seu valor mínimo quando

a) $\frac{\pi}{7} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ b) $\frac{8\pi}{7} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

c) $\frac{23\pi}{14} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ d) $\frac{9\pi}{14} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

e) $\frac{8\pi}{7} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

14) (UFPA-10) Uma partícula inicia um movimento oscilatório harmônico ao longo de um eixo ordenado, de amplitude igual a 5 unidades e centrado na origem, de modo que a sua posição pode ser descrita, em função do tempo em segundos, pela função $f(t) = 5\cos(t)$. Ao mesmo tempo, uma outra partícula inicia um movimento também harmônico, centrado em 3, de amplitude igual a 1 e com o dobro da frequência da primeira partícula, de modo que sua posição é descrita pela função $g(t) = \cos(2t) + 3$. Acerca da posição relativa das duas partículas, é CORRETO afirmar que

a) elas se chocarão no instante $t = \pi/3$ s
b) elas se chocarão no instante $t = \pi/4$ s
c) elas se chocarão no instante $t = \pi/6$ s.
d) elas se chocarão no instante $t = 3$s.
e) elas não se chocarão.

15) (FGV-10) No intervalo $[0, \pi]$, a equação $8^{\operatorname{sen}^2 x} = 4^{\operatorname{sen} x - \frac{1}{8}}$ admite o seguinte número de raízes:

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

16) (FGV-12) No intervalo $[0, 4\pi]$, a equação $\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 6 = 0$ tem raízes cuja soma é:

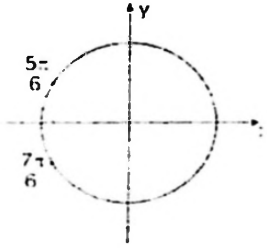
A) 2 B) -2 C) 6 D) $\pi/2$ E) 3π

17) (Fuvest-02) Determine as soluções da equação $(2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$ que estão no intervalo $[0,2\pi]$.

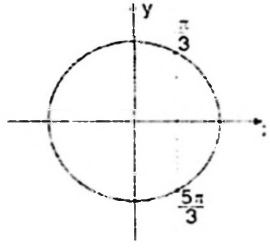
18) (UFPE-10) Quantas soluções a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos x}$ admite, no intervalo $[0, 80\pi)$?

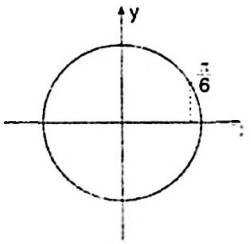
19) (UFPel-08) As raízes da equação $4.\cos^2 x + 4\sqrt{3}.\operatorname{sen}(90° + x) = 3.\tan 135°$, para $0 \leq x < 2\pi$, pode(m) ser representada(s), no ciclo trigonométrico pelos pontos:

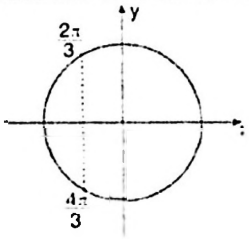
(a)

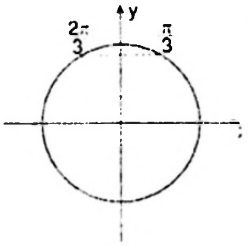


(b)



(c) 

(d) 

(e) 

(f) I.R.

20) (EspCEx-16) A soma das soluções da equação $\cos 2x - \cos x = 0$, $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$ b) 2π c) $\frac{7\pi}{3}$ d) π e) $\frac{8\pi}{3}$

21) (Ciaba-04) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$, para $0 \leq x \leq \pi$, é igual a

a) $\pi/2$ b) π c) $2\pi/3$ d) $3\pi/2$ e) $5\pi/3$

22) (Escola Naval-92) No intervalo $[0, 2\pi]$, o número de soluções da equação $\text{sen } x = \cos 2x$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

23) (Escola Naval-93) O número de soluções da equação $\cos^2 (x + \pi) + \cos^2 (x - \pi) = 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

24) (Mackenzie-02) Em $[0; 2\pi]$, as soluções da equação $\frac{2\,\text{sen } x}{\cos 2x - 1} = \frac{1}{1 + \text{sen } x}$ são em número de:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

25) (Udesc-11) Considere $x \in (0, \pi/2)$ o valor que faz com que os termos $\text{sen}(x)$, $2.\cos(2x)$ e $3.\text{sen}(x)$ formem, nessa ordem, uma progressão aritmética. A soma dos três termos dessa progressão é igual a:

a) 3 b) 1/2 c) $\pi/3$ d) $\pi/6$ e) $-3+3\sqrt{3}$

26) (UECE-12) O número de soluções (p, q) do sistema

$$\begin{cases} \cos^2 p - 2.\text{sen}\, q = 0 \\ \cos^2 p + 2.\text{sen}\, q = 1,5 \end{cases}$$

com $p, q \in [-\pi, \pi]$, é

A) 4. B) 6. C) 8. D) 10.

27) (UECE-14) Se p e q são duas soluções da equação $2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\, x + 1 = 0$ tais que $\text{sen}\, p \neq \text{sen}\, q$, então o valor da expressão $\text{sen}^2 p - \cos^2 q$ é igual a

A) 0. B) 0,25. C) 0,50. D) 1.

28) (UFC-01) Supondo $0 \leq \theta \leq \pi$, encontre todos os valores de θ para os quais $\cos 3\theta + \cos 5\theta = \cos 4\theta$.

29) (UFBA-11) Sendo x a medida de um arco, em radianos, determine as soluções da equação $4.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(x+7\pi)+\text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right)=0$ que pertencem ao intervalo $[-6, 8]$.

30) (UFRGS-12) O número de interseções da função $f(x) = \text{sen}\, 5x$ com o eixo das abscissas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é

a) 10 b) 14 c) 21 d) 24 e) 27

31) (ITA-87) O número de soluções reais da equação:

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \text{sen}^8 x + \text{sen}^{10} x = 5$$

é:

a) um número maior que 12 b) zero c) 2 d) 10 e) 1

32) (ITA-88) Sobre a equação $\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x = 2\,\text{sen}\, 6x$, podemos afirmar que:

a) apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \pi/4$

b) apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \pi/2$

c) apresenta uma raiz no intervalo $\pi/2 < x < \pi$

d) apresenta uma raiz no intervalo $\pi < x < 3\pi/2$

e) não apresenta raízes reais

33) (ITA-88) A respeito da solução da equação $\text{sen } x + \sqrt{3}\cos x = 2$, $0 \le x < 2\pi$, podemos afirmar que:
a) existe apenas uma solução no primeiro quadrante
b) existe apenas uma solução no segundo quadrante
c) existe apenas uma solução no terceiro quadrante
d) existe apenas uma solução no quarto quadrante
e) existem duas soluções no intervalo $0 \le x < 2\pi$

34) (UFC-98) Sejam p e q números reais não nulos e tais que $p \neq q$ e $p \neq 0$. Determine o valor de $\frac{q}{p}$ para que a equação trigonométrica

$$p.\cos^2 x - (p + q)\cos x + q = 0,$$

com $0 \le x \le 2\pi$, possua exatamente três raízes reais.

35) (Insper-06) Se α é um número real tal que $0 < \alpha < \pi/2$ e que satisfaz a equação

$$(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^{2\,\text{sen}\,\alpha} = \sqrt{1 + \text{sen}\,2\alpha}\,,$$

então:
a) $\pi/12$ b) $\pi/6$ c) $\pi/4$ d) $\pi/3$ e) $5\pi/12$

36) (Insper-07) Seja 0 a medida, em graus, de um ângulo agudo. Se $4\text{sen}(2\theta) = 13\cos^2\theta$, então pode-se concluir que:
a) $0 < \theta < 15$. b) $15 < \theta < 30$. c) $30 < \theta < 45$. d) $45 < \theta < 60$. e) $60 < \theta < 90$.

37) (Insper-12) Considere a sequência

$$\left(\cos\frac{\pi}{14}, \cos\frac{2\pi}{14}, \cos\frac{3\pi}{14}, \ldots, \cos\frac{n\pi}{14}, \ldots, \cos\frac{999\pi}{14}, \cos\frac{1000\pi}{14}\right)$$

O total de elementos dessa sequência que são números inteiros é igual a
a) 0. b) 35. c) 71. d) 105. e) 142.

38) (Mackenzie-80) Sejam x e y dois ângulos agudos que representam uma solução do sistema:

$$\begin{cases} 3.\text{sen}^2 x + 2.\text{sen}^2 y = 1 \\ 3.\text{sen}\,2x - 2.\text{sen}\,2y = 0 \end{cases}$$

Então, $x + 2y$ é igual a:
a) $\arccos\sqrt{5}/5$ b) $3\pi/4$ c) $2\pi/3$ d) $\pi/3$ e) $\pi/2$

39) (FGV-80) Resolver $\frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\text{tg}^2 x} - \frac{1}{\text{cot}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\text{cossec}\,x} = -3$
a) $x = \pi/4 + k\pi$ b) $x = \pi/2 + 2k\pi$ c) $x = -\pi/4 + k\pi$
d) $x = \pi/4 + k\pi/2$ e) nda

40) (FGV-17) Uma solução da equação sen 2x . sen 3x = cos 2x . cos 3x, com $0° \leq x < 90°$, é
a) 72°. b) 36°. c) 24°. d) 18°. e) 15°.

41) (UFU-00) Na equação $1 + \text{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right) = \text{sen}\, x$, em que a é um número real não nulo e $0 \leq x \leq \pi$, o maior valor positivo de a para que essa equação admita solução é igual a:
a) 1/4 b) 1/2 c) 1 d) 2

42) (Unicamp-96) Ache todos os valores de x, no intervalo $[0, 2\pi]$, para os quais

$$\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}.$$

43) (Unicamp-17) Sabendo que k é um número real, considere a função $f(x) = k\text{sen}\, x + \cos x$, definida para todo número real x.
a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = 0 - 1$.
b) Para $k = 3$, encontre todas as soluções da equação $f(x)^2 + f(-x)^2 = 10$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

44) (Unesp-01) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o mesmo era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2.\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

onde t é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t = 0$) e P(t) é a profundidade da água (em metros) no instante t.

a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$.

b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

45) (Unesp-05) A temperatura, em graus celsius (°C), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, das 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),\ 0 \leq t \leq 24,$$

com t em horas. Determine:

a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$);
b) em quais horários do dia a temperatura atingiu 0°C.

46) (Unesp-06) A figura ao lado mostra a órbita elíptica de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto A (apogeu), que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra, e o ponto P (perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ponto O indica o centro da Terra e o ângulo PÔS tem medida α, com $0° \leq \alpha \leq 360°$. A altura h, em km, do satélite à superfície da Terra, dependendo do ângulo α, é dada aproximadamente pela função $h = \left(-64 + \frac{7980}{100 + 5.\cos\alpha}\right) \times 10^2$.

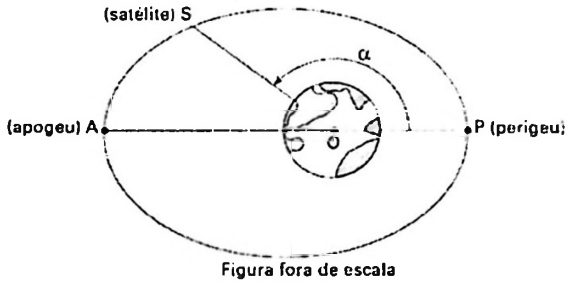


Figura fora de escala

Determine:
a) A altura h do satélite quando este se encontra no perigeu e também quando se encontra no apogeu.
b) os valores de α, quando a altura h do satélite é de 1580km.

47) (Unicamp-99) Considere a função: $S(x) = 1 + 2\text{sen } x + 4(\text{sen } x)^2 + 8(\text{sen } x)^3$ para $x \in \boldsymbol{R}$.

a) Calcule $S(\frac{\pi}{3})$.

b) Resolva a equação: $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

48) (Unicamp-01) Considere a equação trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}\text{sen } 2\theta = 0.$$

a) Mostre que não são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$.
b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação.

49) (Fuvest-00) Determine os números reais x e y, com $0 \leq x + y \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$, tais que:

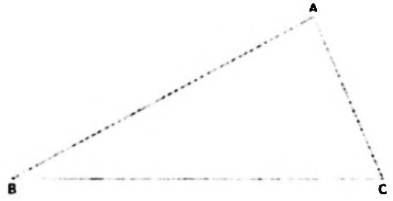
$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{4}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2}$$

50) (Fuvest-01)
a) Calcule cos30 em função de sen θ e de cos θ.
b) Calcule sen 30 em função de sen θ e de cos θ
c) Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, resolva a equação $\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + 1 = \frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$

51) (Fuvest-08) A medida x, em radianos, de um ângulo satisfaz $\pi/2 < x < \pi$ e verifica a equação sen x + sen 2x + sen 3x = 0. Assim,
a) determine x.
b) calcule cos x + cos 2x + cos 3x.

52) (Fuvest-12) No triângulo acutângulo ABC, ilustrado na figura, o comprimento do lado BC mede $\frac{\sqrt{15}}{5}$, o ângulo interno de vértice C mede α, e o ângulo interno de vértice B mede $\frac{\alpha}{2}$. Sabe-se, também, que $2.\cos(2\alpha) + 3\cos\alpha + 1 = 0$. Nessas condições, calcule



a) o valor de sen α.
b) o comprimento do lado AC.

53) (EsPCEx-98) A soma das soluções da equação $\frac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1$, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{5\pi}{6}$

54) (EsPCEx-02) O valor de cos x + sen x, sabendo que 3.sen x + 4.cos x = 5, é
a) 3/5 b) 4/5 c) 1 d) 6/5 e) 7/5

55) (EsPCEx-14) A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π b) 3π c) 4π d) 5π e) 6π

56) (AFA-98) A função real $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos x$ tem valor máximo em

a) $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ b) $x = (k + 1/6)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = (2k + 1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ d) $x = (2k + 1/3)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

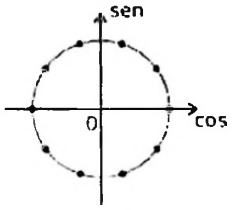
57) (AFA-05) Considere m a raiz da equação $\cos^2 x + 3\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 3 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. O número $\text{cotg}\, m - \sec 2m$ é

a) 0 b) -1 c) 1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

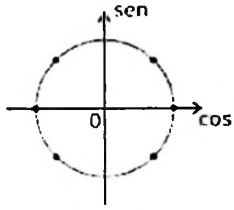
58) (AFA-10) Seja a função real f definida por $f(x) = \cos(4x) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)$

Marque a alternativa que possui a melhor representação, no ciclo trigonométrico, de todas as raízes da função f

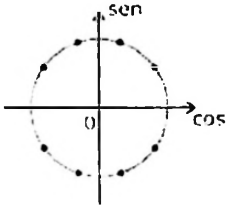
a)



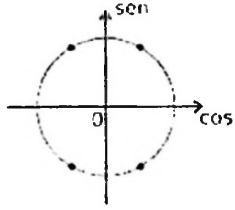
c)



b)



d)



59) (AFA-13) Sejam as funções reais f, g e h definidas por $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\text{cossec}\, x} + \frac{\cos x}{\sec x}$, $g(x) = |\sec x|$ e $h(x) = |\text{cossec}\, x|$, nos seus domínios mais amplos contidos no intervalo $[0,2\pi]$. A(s) quantidade(s) de interseção(ões) dos gráficos de f e g; f e h; g e h é(são), respectivamente

a) 0, 0 e 4 b) 3, 1 e 4 c) 2, 3 e 4 d) 0, 2 e 3

60) (Escola Naval-87) A menor solução positiva da equação

$$\text{sen } 9x + \text{sen } 5x + 2\,\text{sen}^2 x = 1$$

é:

a) $\pi/4$ b) $3\pi/84$ c) $\pi/42$ d) $\pi/84$ e) $\pi/294$

61) (Escola Naval-88) O número de solução da equação

$$\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1 - \tfrac{1}{2}\,\text{sen } 2x$$

no intervalo $(0, 2\pi)$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

62) (Escola Naval-90) A equação $\text{tg}^2 2x + 2\text{tg } 2x.\text{tg } 3x = 1$ possui no intervalo $[0, 2\pi]$

a) 2 soluções; b) 6 soluções; c) 8 soluções;
d) 12 soluções; e) 14 soluções;

63) (Escola Naval-91) A equação $\sec^3 x - 2\text{tg}^2 x = 2$, no intervalo $]0\ ,\ 2\pi[$:

a) não possui solução. b) possui uma solução.
c) possui duas soluções. d) possui três soluções.
e) possui quatro soluções.

64) (Escola Naval-99) O produto das soluções da equação

$$2.\text{sen}^3 x + 5.\cos^2 x + 4.\text{sen } x + 2.\tan^2 x = 4 + 2.\sec^2 x,$$

no intervalo $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}\right[$ é:

a) $5\pi^3/12$ b) $\pi^3/12$ c) $5\pi^3/72$ d) $\pi^2/6$ e) $\pi^2/12$

65) (Escola Naval-05) Os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são soluções do sistema de equações $\begin{cases} \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = 2 \\ \text{sen } x + \cos y = 2 \end{cases}$ onde $x \in [0, 2\pi]$. A distância desde A até B é

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ c) π d) 2π e) 3π

66) (Escola Naval-06) No intervalo $[0, \pi]$ a equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ possui soma dos inversos das raízes igual a:

a) $\frac{15}{2\pi}$ b) $\frac{117}{10\pi}$ c) $\frac{15}{\pi}$ d) 2π e) $\frac{117}{5\pi}$

67) (Escola Naval-08) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = 2\text{sen}^2 x + 6\cos x$ e $g(x) = k + \cos 2x$, $K \in \mathbb{R}$. Se $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{19}{2}$ então a soma das soluções da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $\left]\frac{21\pi}{11}, \frac{16\pi}{5}\right[$ é.

a) $\frac{13\pi}{6}$ b) $\frac{13\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{3}$ d) $\frac{25\pi}{6}$ e) $\frac{16\pi}{3}$

68) (Escola Naval-11) Considere S a coma das raízes da equação trigonométrica $4\text{sen}^3 x - 5\text{sen}\, x - 4\cos^3 x + 5\cos x = 0$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual o valor de $\text{tg}\, S + \text{cossec}\, 2S$?

a) 2 b) 1 c) 0 d) – 1 e) – 2

69) (Escola Naval-12) A soma dos quadrados das raízes da equação

$$|\text{sen}\, x| = 1 - 2\text{sen}^2 x,$$

quando $0 < x < 2\pi$ vale

a) $\frac{49}{36}\pi^2$ b) $\frac{49}{9}\pi^2$ c) $\frac{7}{3}\pi^2$ d) $\frac{14}{9}\pi^2$ e) $\frac{49}{6}\pi^2$

70) (Escola Naval-13) A soma das soluções da equação trigonométrica

$$\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 1$$

no intervalo $[0, 2\pi]$, é

a) 8π b) 6π c) $\frac{8\pi}{3}$ d) 5π e) $\frac{5\pi}{2}$

71) (ITA-66) Mostrar que se A, B e C são os ângulos internos de um triângulo que verificam a relação $\text{sen}\, A = \text{tg}\frac{B+C}{2}$, então o triângulo é retângulo.

72) (ITA-71) Dada a equação $log(\cos x) = \text{tg}\, x$, as soluções desta equação em x satisfazem a relação:

a) $3\pi/2 < x \leq 2\pi$; b) $0 < x < \pi/2$; c) $0 < x < \pi$; d) $-\pi/2 < x < \pi/2$; e) N.d.r.a.

73) (ITA-71) Qual é o menor valor de x que verifica a equação

$$\text{tg}\, x + 3\,\text{cotg}\, x = 3?$$

a) $x = \pi/4$ b) para todo $x \in (0, \pi/2)$

c) para nenhum valor de x d) para todo valor de $x \neq n\pi/2$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

e) apenas para x no 3º quadrante

74) (ITA-71) A equação $\{\text{sen}(\cos x)\}\{\cos(\cos x)\} = 1$ é satisfeita para

a) $x = \pi/4$

b) $x = 0$

c) nenhum valor de x

d) todos os valores de x

e) todos os valores de x pertencentes ao 3º quadrante

75) (ITA-76) Resolvendo a equação

$$3.\text{sen}^2(e^x) - 2\sqrt{3}.\text{sen}(e^x).\cos(e^x) - 3.\cos^2(e^x) = 0$$

obtemos:

a) $e^x = k\pi \pm \pi/4$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $x = \log_e\left(2k\pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^x = k\pi + \pi/3$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

d) $x = \log_e\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

e) nda

76) (ITA-77) Resolvendo a equação $\text{tg}\left(2\log x - \frac{\pi}{6}\right) - \text{tg}\left(\log x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $k = 0,1,2,3,\ldots$

b) $x = e^{\pi/2 + k\pi}$; $k = 0,1,2,3,\ldots$

c) $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$; $k = 0,1,2,3,\ldots$

d) $x = e^{\pi/6 + 2k\pi}$; $k = 0,1,2,3,\ldots$

e) nenhuma das anteriores

77) (ITA-77) Considere um triângulo ABC cujos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação $\text{sen}\,\hat{A} = \text{tg}\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

a) com os dados do problema não podemos determinar $\hat{A}$ nem $\hat{B}$ e nem $\hat{C}$.

b) um desses ângulos é reto.

c) $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ e $\hat{B} + \hat{C} = \frac{5\pi}{6}$.

d) $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$ e $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$.

e) nda

78) (ITA-79) Se a e b são ângulos complementares, $0 < a < \pi/2$, $0 < x < \pi/2$ e $\frac{\text{sen a} + \text{sen b}}{\text{sen a} - \text{sen b}} = \sqrt{3}$, então $\text{sen}\left(\frac{3a}{5}\right) + \cos(3b)$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}/3$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}/2$ e) 1

79) (ITA-82) Considere o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3.\text{sen}\,\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$

para x e θ reais. Se restringirmos θ ao intervalo $0, \pi/2$, então:

a) o sistema não possuirá solução.

b) o sistema possuirá apenas uma solução (x_1, θ_1).

c) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $x_1 + x_2 = 40/13$.

d) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 17/12$.

e) o sistema possuirá duas soluções (x_1, θ_1) e (x_2, θ_2), de modo que $\cos\theta_1.\cos\theta_2 = 1/2$.

80) (ITA-83) Dados A, B e C, ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in (4\pi/3, 5\pi/3) \cup (5\pi/3, 2\pi)$, o sistema

$$\begin{cases} \text{sen A} + \text{sen B} = \text{sen}\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$$

admite como solução:

a) $A = \pi - \alpha/2$, $B = \alpha/2 - 2\pi/3$ e $C = 2\pi/3$

b) $A = \pi - \alpha/2$, $B = \alpha/2$ e $C = 0$

c) $A = 2\pi/3$, $B = \alpha/2$ e $C = \pi/3 - \alpha/2$

d) $A = \pi - \alpha/2$, $B = 2\pi/3$ e $C = \alpha/2 - 2\pi/3$

e) $A = \pi$, $B = \alpha/2$ e $C = -\alpha/2$

81) (ITA-83) Dadas as funções $f(x^2) = \log_{2x} x$ e $g(x) = 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\,x + 1$ definidas para $x > 0$ e $x \neq 1/2$, o conjunto $A = \{x \in (0, 2\pi): (gof)(x) = 0\}$ é dado por:

a) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$ b) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 2^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$ c) $A = \left\{4^{2-\pi}, 4^{6-\pi}, 4^{6-5\pi}\right\}$

d) $A = \left\{4^{\frac{2\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{2\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$ e) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$

82) (ITA-88) Seja a equação $\text{sen}^3 x.\cos x - \text{sen}\, x.\cos^3 x = 1/m$ onde m é um número real não nulo.
Podemos afirmar que:
a) A equação admite solução qualquer que seja m, $m \neq 0$.
b) Se $|m| < 4$ esta equação não apresenta solução real.
c) Se $m > 1$ esta equação não apresenta solução real.
d) Se $|m| > 2$ esta equação sempre apresenta solução real.
e) Se $m < 4$ esta equação não apresenta solução real.

83) (ITA-89) Os valores de α, $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \pi/2$, para os quais a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 - 4x - \text{tg}^2\,\alpha$, assume seu valor mínimo igual a -4, são:
a) $\pi/4$ e $3\pi/4$ b) $\pi/5$ e $2\pi/3$ c) $\pi/3$ e $2\pi/3$
d) $\pi/7$ e $2\pi/7$ e) $2\pi/5$ e $3\pi/5$

84) (ITA-90) O conjunto das soluções reais da equação $|\ln(\text{sen}^2 x)| = \ln(\text{sen}^2 x)$ é dado por:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : x = \pi + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

85) (ITA-91) Sejam a e b constantes reais positivas. Para que a equação

$$\cos^3 x + (a-1)\cos^2 x - (a+b)\cos x + b = 0$$

tenhas duas raízes reais distintas no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ devemos ter:

a) $0 < b \leq a - 1$ b) $0 < b < a + 1$ c) $a < b < a + 2$
d) $a + 1 < b \leq a + 2$ e) n.d.a.

86) (ITA-93) O conjunto das soluções da equação $\text{sen}\,5x = \cos 3x$ contém o seguinte conjunto:
a) $\{\pi/16 + k\pi/5,\ k \in \mathbb{Z}\}$ b) $\{\pi/16 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{\pi/4 + k\pi/3,\ k \in \mathbb{Z}\}$ d) $\{\pi/4 + k\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\{\pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

87) (ITA-98) A soma das raízes da equação

$$\sqrt{3}\text{tg}x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x = 0$$

que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:
a) $\frac{17\pi}{4}$ b) $\frac{16\pi}{3}$ c) $\frac{15\pi}{4}$ d) $\frac{14\pi}{3}$ e) $\frac{13\pi}{4}$

88) (ITA-06) Seja f: IR → IR definida por $f(x) = \sqrt{77}.\text{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in IR: f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então m + n é igual a
a) $2\pi/15$ b) $\pi/15$ c) $-\pi/30$ d) $-\pi/15$ e) $-2\pi/15$

89) (IME) Demonstrar que é isósceles o triângulo ABC cujos ângulos A e B verificam a relação: $\text{sen}\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \text{sen}\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$.

90) (IME-45) Discutir a equação $\text{sen } 2x = m.\text{tg } x$ e resolvê-la para m = 1.

91) (IME) Determine todas as soluções da equação trigonométrica:
$$\text{sen } 9x + \text{sen } 5x + 2\text{sen}^2 x = 1.$$

92) (IME-58) Determine as relações que devem existir entre os ângulos M, N e P, para que se verifique a igualdade:
$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2.\cos M.\cos N.\cos P = 1.$$

93) (IME-64) Resolva o sistema das equações: $\begin{cases} \text{tg } x + \text{tg } y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \text{cotg } x + \text{cotg } y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

94) (IME-64) Que valores devem ser dados a m, na equação abaixo, para que os valores de x sejam os dos ângulos agudos de um triângulo retângulo?
$$3.\text{tg } x + m^2.\text{cotg } x = 4m$$
Quais são os ângulos?

95) (IME-65) Calcular o menor arco positivo x, diferente de zero, que satisfaz a:
$$\text{sen}^2 3x - \text{sen}^2 2x = \text{sen}^2 x.$$

96) (IME-72) Demonstrar que em um triângulo ABC, no qual os ângulos B e C verificam a relação $\frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 C} = \frac{\text{tg}B}{\text{tg}C}$, é retângulo ou isósceles.

97) (IME-81) Determine todos os valores de x, y e z, situados no intervalo fechado $[0, \pi]$, satisfazendo ao sistema: $\begin{cases} \cos x + \cos 2y = 0 \\ \cos y + \cos 2z = 0 \\ \cos z + \cos 2x = 0 \end{cases}$

98) (IME-83) Dada a equação $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-m.\text{sen}^2x=0$, determine a condição a que deve satisfazer m para que se tenha pelo menos uma solução x_0 tal que $0 < x_0 < 2\pi$.

99) (IME-86) a) Resolva a equação:

$$m.\cos x-(m+1).\text{sen } x = m \quad , m \in R.$$

b) Determine m de modo que essa equação admita as raízes x' e x" cuja diferença seja $\pi/2$.

100) (IME-89) Para que valores de *t*, o sistema $\begin{cases} x+y=\pi \\ \text{sen } x+\text{sen } y=\log_{10} t^2 \end{cases}$ é possível e determinado.

101) (IME-89) Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade sen 4A + sen 4B + sen 4C = 0 , então o triângulo é retângulo.

102) (IME-91) Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação $\frac{\cos(B-C)}{\text{sen } A+\text{sen}(C-B)}=\text{tg } B$ então o triângulo é retângulo com ângulo reto A.

103) (IME-91) Resolver o sistema: $\begin{cases} \text{tg}^2x+\text{tg}^2y=6 \\ \frac{\text{tg}x}{\text{tg}y}+\frac{\text{tg}y}{\text{tg}x}=-6 \end{cases}$ sabendo que x e y pertencem ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

104) (IME-92) Encontre todas as soluções de $\sec x-2\cos x=1$ em $[0,2\pi]$.

105) (IME-93) Resolva a equação sen x – cos x = sen 2x – cos 2x – 1

106) (IME-96) Encontre todas as soluções reais da equação apresentada abaixo, onde n e um numero natural:

$$\cos^n x-\text{sen}^n x=1$$

107) (IME-11) O valor de $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}$ é:

a) – 1 b) – 0,5 c) 0 d) 0,5 e) 1

108) (IME-15) O número de soluções da equação $\cos 8x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

109) (IME-16) Seja a equação $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}$. As soluções dessa equação para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ forma um polígono no círculo trigonométrico de área.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Exercícios Gerais

110) Resolva a equação $\operatorname{sen} 18x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 2x = 3 + \cos^2 2x$.

111) Resolva e equação $\cos 3x.\cos^3 x + \operatorname{sen} 3x.\operatorname{sen}^3 x = 0$.

112) Resolva a equação $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0$.

113) Resolva a equação $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$.

114) Resolvas seguintes equações:
a) $\operatorname{sen} 3x = 3.\operatorname{sen} x$
b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$
d) $4.\cos x.\cos 2x.\cos 3x = 1$
e) $\sec x + \operatorname{cossec} x = 2\sqrt{2}$
f) $\operatorname{tg} x + \sec 2x = 1$
g) $\cos 9x.\cos 7x = \cos 5x.\cos 3x$
h) $\cos^2 x - \cos x.\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

115) Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \cos z \\ \cos 2x + \cos 2y = \cos 2z \\ \cos 3x + \cos 3y = \cos 3z \end{cases}$$

116) Resolva a equação $4.\operatorname{sen} 2x.\cos 2x + \dfrac{5}{\cos 2x} = 13.\operatorname{tg} 2x$ para $x \in [0, 2\pi]$

117) Resolva a equação $4\cos^4 x - \cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos 4x + \cos\dfrac{3x}{2} = \dfrac{7}{2}$.

118) Resolva a equação $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \sqrt{2}$

119) Determine a soma das raízes de $3.\operatorname{tg}^2 x + 8.\operatorname{tg} x + 3 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

120) Resolva a equação $\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x.\operatorname{tg}^2 x = 1$.

121) Prove que $\operatorname{tg} 20°.\operatorname{tg} 40°.\operatorname{tg} 80° = \sqrt{3}$.

122) Prove que $\cot 10°\cot 30°\cot 50°\cot 70° = 3$.

123) Demonstre que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$, então um deles vale 120°.

124) Demonstre que é retângulo o triângulo no qual se verifica a relação:

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$$

125) Demonstre que é retângulo o triângulo no qual se verifica a relação

$$\operatorname{sen} C = \cos A + \cos B$$

126) Os ângulos A, B e C de um triângulo satisfazem $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$. Prove que um dos ângulos é igual a 60°.

127) Se α, β, θ e γ são as raízes equação $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 3.\operatorname{tg} 3x$, não existindo pares de raízes côngruas, mostre que $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\gamma = 0$.

128) Se α, β, 0 e γ são as quatro raízes da equação $a.\operatorname{sen} 4x + b.\cos 4x + c = 0$, não existindo pares de raízes côngruas, mostre que $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg} 0.\operatorname{tg}\gamma = 1$.

129) Prove que, se

$$tg(B + C - a) + tg(C + A - B) + tg(A + B - C) = tg(A + B + C),$$

então A, B ou C é côngruo a $\pi/2$.

130) Prove que, se $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z = 4.\operatorname{sen}\frac{y+z}{2}\operatorname{sen}\frac{z+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}$, então $x + y + z = k\pi$.

131) Se $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos(2x + 2y + 2z) = 0$, prove que $x + y$ ou $x + z$ ou $y + z$ é igual a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

132) Prove que $tg^2\frac{\pi}{14}$, $tg^2\frac{3\pi}{14}$ e $tg^2\frac{5\pi}{14}$ são as raízes de $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$.

133) Prove que $tg\frac{\pi}{7}$, $tg\frac{2\pi}{7}$ e $tg\frac{4\pi}{7}$ são as raízes de $x^3 + \sqrt{7}x^2 - 7x + \sqrt{7} = 0$.

134) Prove que $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$ e $\cos\frac{8\pi}{9}$ são as raízes de $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

135) Prove que $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9}$ e $\cos\frac{8\pi}{9}$ são as raízes da equação $16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1 = 0$.

136) Determine a equação cujas raízes são $\sec^2\frac{2\pi}{7}$, $\sec^2\frac{4\pi}{7}$ e $\sec^2\frac{6\pi}{7}$ e demonstre que $tg^2\frac{2\pi}{7} + tg^2\frac{4\pi}{7} + tg^2\frac{6\pi}{7} = 21$.

137) Determine a equação cujas raízes são $\cos\frac{\pi}{11}$, $\cos\frac{3\pi}{11}$, $\cos\frac{5\pi}{11}$, $\cos\frac{7\pi}{11}$ e $\cos\frac{9\pi}{11}$.

138) Demonstre que:

a) $\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} = \frac{5}{4}$

b) $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$

c) $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{9} + \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{9} + \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{9} + \operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{9} = \frac{9}{4}$

d) $\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

e) $\text{sen}\frac{\pi}{7}.\text{sen}\frac{2\pi}{7}.\text{sen}\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

f) $\text{tg}^2\frac{\pi}{7}+\text{tg}^2\frac{2\pi}{7}+\text{tg}^2\frac{3\pi}{7}=21$

g) $\sec\frac{\pi}{11}-\sec\frac{2\pi}{11}+\sec\frac{3\pi}{11}-\sec\frac{4\pi}{11}+\sec\frac{5\pi}{11}=6$

h) $\text{tg}\frac{\pi}{20}-\text{tg}\frac{3\pi}{20}+\text{tg}\frac{5\pi}{20}-\text{tg}\frac{7\pi}{20}+\text{tg}\frac{9\pi}{20}=5$

i) $\text{cotg}^2\frac{\pi}{9}+\text{cotg}^2\frac{2\pi}{9}+\text{cotg}^2\frac{4\pi}{9}=9$

j) $\text{tg}^2\frac{\pi}{11}+\text{tg}^2\frac{2\pi}{11}+\text{tg}^2\frac{3\pi}{11}+\text{tg}^2\frac{4\pi}{11}+\text{tg}^2\frac{5\pi}{11}=55$

k) $\text{tg}\frac{\pi}{13}+\text{tg}\frac{2\pi}{13}+\text{tg}\frac{3\pi}{13}+\text{tg}\frac{4\pi}{13}+\text{tg}\frac{5\pi}{13}+\text{tg}\frac{6\pi}{13}=\sqrt{13}$

l) $\text{sen}^2\frac{\pi}{14}+\text{sen}^2\frac{3\pi}{14}+\text{sen}^2\frac{5\pi}{14}=\frac{5}{4}$

m) $\sec\frac{\pi}{9}+\sec\frac{5\pi}{9}+\sec\frac{7\pi}{9}=-6$

n) $\cot^2\frac{\pi}{14}+\cot^2\frac{3\pi}{14}+\cot^2\frac{5\pi}{14}=21$

o) $\text{tg}^2\frac{\pi}{9}+\text{tg}^2\frac{2\pi}{9}+\text{tg}^2\frac{4\pi}{9}=33$

139) Prove que as raízes de $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$ são $\text{tg}\frac{\pi}{16}$, $\text{tg}\frac{5\pi}{16}$, $\text{tg}\frac{9\pi}{16}$ e $\text{tg}\frac{13\pi}{16}$.

140) Prove que tg 10°, tg 70° e tg 130° são as raízes de $\sqrt{3}x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{3}x + 1 = 0$.

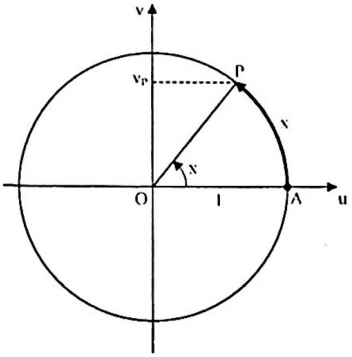
141) Prove que as raízes de $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$ são $2.\cos\frac{2\pi}{15}$, $2.\cos\frac{4\pi}{15}$, $2.\cos\frac{8\pi}{15}$ e $2.\cos\frac{14\pi}{15}$.

Funções Trigonométricas

5.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 2 deste livro foram definidas como são calculadas as funções trigonométricas no ciclo trigonométrico. Neste capítulo serão analisados todos os conceitos envolvidos no estudos das funções, como domínio, imagem, gráfico, amplitude, raízes, variação do sinal, crescimento e decrescimento.

5.2. FUNÇÃO SENO



Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento x. Define-se a função seno (simbolicamente designada por *sen*) de um arco x como f: IR→IR que associa a cada x a ordenada do ponto P:

$$f(x) = \text{sen } x = v_P$$

A partir desta definição pode-se determinar todas as propriedades da função seno.

Domínio: O domínio da função f(x) = sen x é o conjunto dos números reais:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

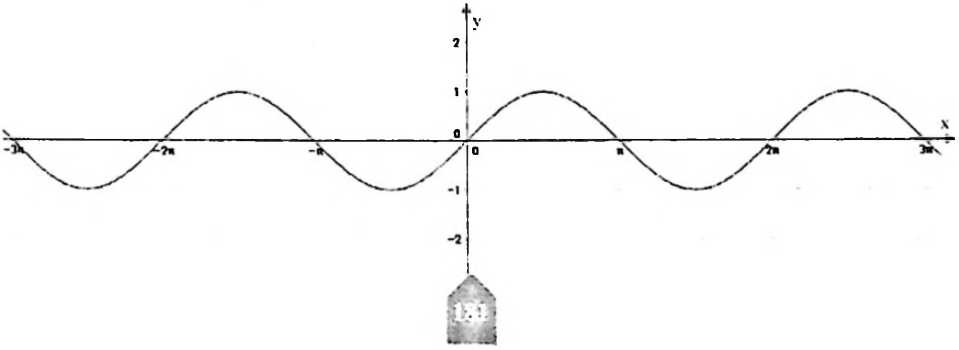
Imagem: A imagem da função f(x) = sen x é o conjunto Im(f) = [– 1, 1].

Sinal: A função f(x) = sen x é positiva para x pertencente ao primeiro ou segundo quadrantes e negativa para x pertencente ao terceiro ou quarto quadrantes:

$$f(x) = \text{sen } x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

$$f(x) = \text{sen } x < 0 \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

Gráfico: O esboço do gráfico da função f(x) = sen x está dado abaixo:



A curva definida por f(x) = sen x possui nome de **senóide**. Sendo IR o domínio de f(x) = sen x, o gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

Raízes: Como estudado no capítulo sobre equações trigonométricas, as raízes da função f(x) = sen x são da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Período: Observando o gráfico da função f(x) = sen x, verifica-se que seno é uma função periódica e seu período é 2π, ou seja:

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 4\pi) = ... = \text{sen}(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função f(x) = sen x é crescente para x pertencente ao 1° ou 4° quadrantes e é decrescente para x pertencente ao 2° ou 3° quadrantes:

$$\text{sen x é crescente} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{sen x é decrescente} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Paridade: Analisando a variação do sinal da função f(x) = sen x ao longo dos quadrantes, verifica-se que:

i) se $x \in 1°\,Q \Rightarrow -x \in 4°\,Q \Rightarrow$ **sen x = – sen (– x)**
ii) se $x \in 2°\,Q \Rightarrow -x \in 3°\,Q \Rightarrow$ **sen x = – sen (– x)**
iii) se $x \in 3°\,Q \Rightarrow -x \in 2°\,Q \Rightarrow$ **sen x = – sen (– x)**
iv) se $x \in 4°\,Q \Rightarrow -x \in 1°\,Q \Rightarrow$ **sen x = – sen (– x)**

Portanto, independentemente do quadrante do arco x, tem-se

$$\textbf{sen (x) = – sen (– x)},$$

ou seja, f(x) = – f(– x), fazendo com que f(x) = sen x seja uma função **ímpar**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função seno na forma f: IR→[– 1, 1], conclui-se que f(x) = sen x é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função seno seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo em que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Por exemplo, fazendo $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, f(x) = sen x é injetora.

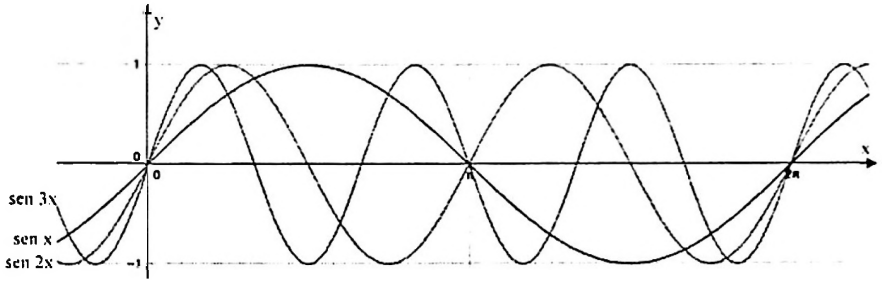
5.2.1. Estudo da Função f(x) = A + B.sen (kx + θ)

As propriedades da função f(x) = A + B.sen (kx + θ), são, de maneira geral, dependentes dos valores de A, B, k e θ ∈ IR. A única propriedade independente de A, B, k e θ é o domínio, que continua sendo o conjunto dos número reais.

A melhor maneira de verificar a dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com A, B, k e θ é fixar o valor de três destas constantes e fazer, no mesmo sistema de eixos, gráficos de f(x) variando a quarta constante, verificando como se comportam estes gráficos.

5.2.1.1. Dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com k

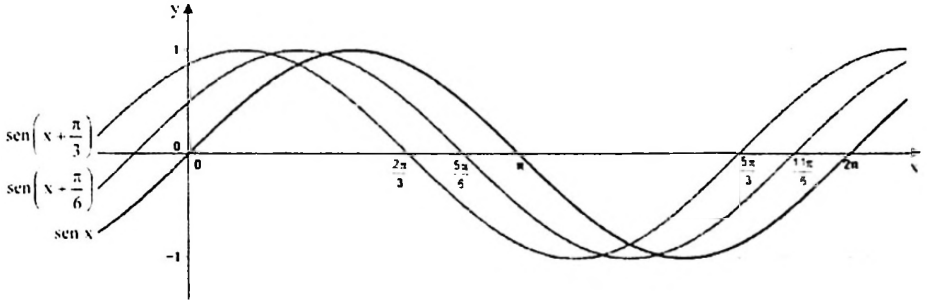
Inicialmente façamos A = 0, B = 1, θ = 0 e variando o valor de k:



Pelo gráfico, é possível identificar que o período de sen x é 2π, o período de sen 2x é π e o período de sen 3x é $\frac{2\pi}{3}$. Seguindo com este raciocínio, o período da função f(x) = sen kx é $\frac{2\pi}{k}$, $k \neq 0$.

5.2.1.2. Dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com θ

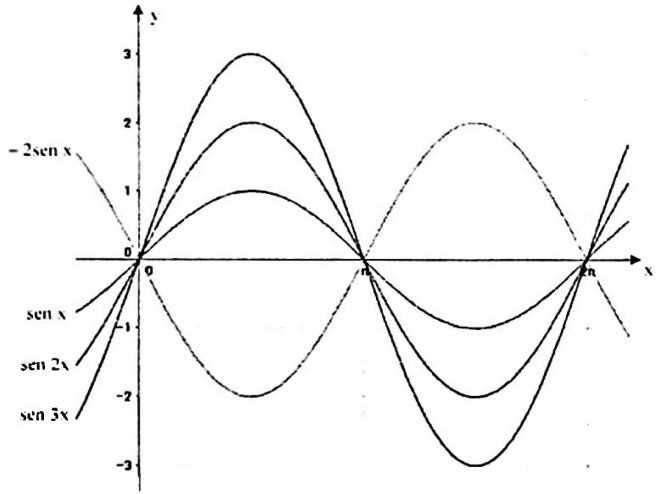
Fazendo A = 0, B = 1, k = 1 e variando o valor de θ:



Do gráfico, verifica-se que θ provoca um deslocamento da linha do gráfico para a esquerda, se θ positivo, ou para a direta, se θ negativo, em um valor de θ radianos. Isso faz com que sejam alteradas as raízes da função e, consequentemente, os intervalos em que a função é positiva ou negativa. Por exemplo, enquanto a função f(x) = sen x possui raízes em x = 2kπ e é positiva para $0 < x < \pi$, a função $g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ possui raízes em $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e é positiva para $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

5.2.1.3. Dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com B

Fazendo A = 0, k = 1, θ = 0 e variando o valor de B:



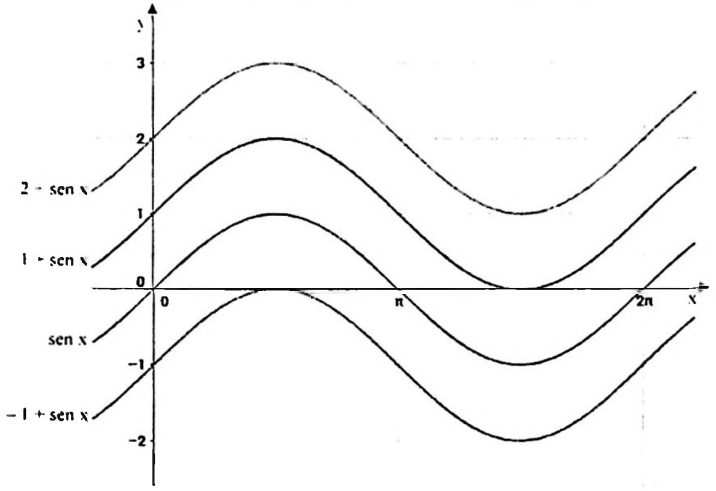
Perceba que a função f(x) = sen x varia na forma $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, enquanto que a função g(x) = 2sen x varia na forma $-2 \leq 2\text{sen } x \leq 2$ e a função h(x) = 3sen x varia na forma $-3 \leq 3\text{sen } x \leq 3$. Logo, pode-se afirmar que B determina a amplitude da função t(x) = Bsen x, onde $-B \leq B.\text{sen } x \leq B$.

Note que se B < 0, há uma inversão do sinal do gráfico em relação à função sen x, como pode ser verificado no gráfico da função r(x) = – 2sen x. Entretanto, a amplitude se mantém mesmo para B negativo: $-2 \leq -2\text{sen } x \leq 2$

Para A = 0, k = 1, θ = 0, independentemente do sinal de B, as raízes da função f(x) = Bsen x não são alteradas, sendo todas do tipo $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.2.1.3. Dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com A

Fazendo B = 1, k = 1, θ = 0 e variando o valor de A:



Pelo gráfico, é imediato concluir que A faz com que o gráfico da função f(x) = A + sen x sofra um deslocamento vertical para cima, se A positivo, ou para baixo, se A é negativo, em A unidades de comprimento. Note que esse deslocamento vertical provoca uma alteração dos valores das raízes da função. Em determinadas situações, como na função f(x) = 2 + sen x, não existem valores de x de modo que a função se anule.

5.2.1.4. Resumo da Dependência de f(x) = A + B.sen (kx + θ) com A, B, k e θ

Abaixo segue um quadro com o resumo da dependência da função trigonométrica **f(x) = A + B.sen(kx + θ)** com os valores de A, B, k e θ:

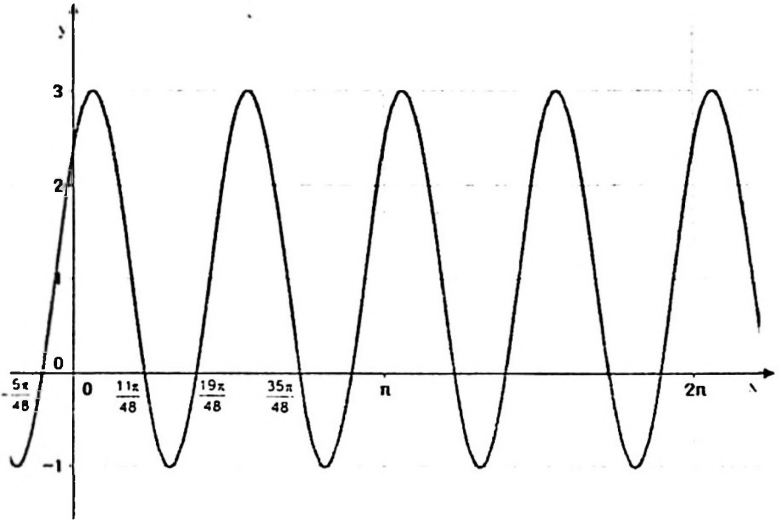
1) k define o período: $\mathbf{p = \frac{2\pi}{k}}$

2) θ desloca horizontalmente o gráfico. Se θ > 0 o gráfico é deslocado para a esquerda e se θ < 0 o gráfico é deslocado para a direita, em θ radianos.

3) B altera a amplitude do gráfico: – B ≤ B.sen x ≤ B

4) A desloca verticalmente o gráfico: Se A > 0 o gráfico deslocado para cima e de A < 0 o gráfico é deslocado para baixo, em |A| unidades de comprimento.

De posse dessas informações e dos valores de A, B, k e θ, pode-se fazer o esboço do gráfico de qualquer função da forma f(x) = A + B.sen (kx + θ). Por exemplo, para desenhar o gráfico da função $g(x) = 1 + 2\operatorname{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$, basta fazer o gráfico de uma senóide de período $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, deslocada em $\frac{\pi}{4}$ radianos para a esquerda, com uma amplitude de duas unidades de comprimento e deslocada 1 unidade de comprimento para cima:



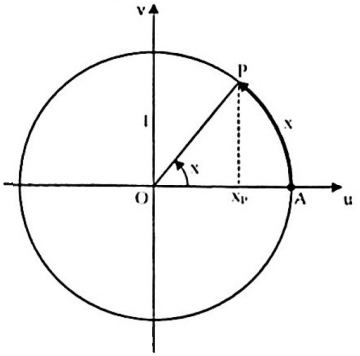
Note que todos os valores de A, B, k e θ influenciam no cálculo das raízes de f(x). Para determinar as raízes de f(x) é necessário resolver a equação f(x) = 0. Por exemplo, na função $g(x) = 1 + 2\operatorname{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$, cujo gráfico foi representado acima, as raízes são dadas por:

$1 + 2\operatorname{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, onde existem duas situações:

i) $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 4x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}$

ii) $4x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 4x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}$

5.3. FUNÇÃO COSSENO



Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P, imagem de um arco de comprimento x. Define-se a função cosseno (simbolicamente designada por *cos*) de um arco x como f: IR→IR que associa a cada x a abscissa do ponto P:

$$f(x) = \cos x = u_P$$

A partir desta definição pode-se determinar todas as propriedades da função cosseno.

Domínio: O domínio da função f(x) = cos x é o conjunto dos números reais:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

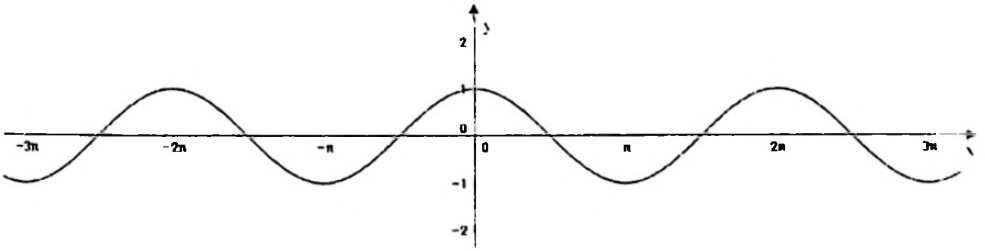
Imagem: A imagem da função f(x) = cos x é o conjunto Im(f) = [– 1, 1].

Sinal: A função f(x) = cos x é positiva para x pertencente ao primeiro ou quarto quadrantes e negativa para x pertencente ao segundo ou terceiro quadrantes:

$$f(x) = \cos x > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$f(x) = \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Gráfico: O esboço do gráfico da função f(x) = cos x está dado abaixo:



A curva definida por f(x) = cos x possui nome de **cossenóide**. Sendo IR o domínio de f(x) = cos x, o gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

Raízes: Como estudado no capítulo sobre equações trigonométricas, as raízes da função f(x) = cos x são da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Período: Observando o gráfico da função $f(x) = \cos x$ verifica-se que cosseno é uma função periódica e seu período é 2π, ou seja:

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = ... = \cos(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função $f(x) = \cos x$ é crescente para x pertencente ao 3º ou 4º quadrantes e é decrescente para x pertencente ao 1º ou 2º quadrantes:

$$\cos x \text{ é crescente} \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$
$$\cos x \text{ é decrescente} \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

Paridade: Analisando a variação do sinal da função $f(x) = \cos x$ ao longo dos quadrantes verifica-se que:

i) se $x \in 1^o Q \Rightarrow -x \in 4^o Q \Rightarrow \mathbf{\cos x = \cos(-x)}$
ii) se $x \in 2^o Q \Rightarrow -x \in 3^o Q \Rightarrow \mathbf{\cos x = \cos(-x)}$
iii) se $x \in 3^o Q \Rightarrow -x \in 2^o Q \Rightarrow \mathbf{\cos x = \cos(-x)}$
iv) se $x \in 4^o Q \Rightarrow -x \in 1^o Q \Rightarrow \mathbf{\cos x = \cos(-x)}$

Portanto, independentemente do quadrante do arco x, tem-se

$$\mathbf{\cos(x) = \cos(-x)},$$

ou seja, $f(x) = -f(-x)$, fazendo com que $f(x) = \cos x$ seja uma função **par**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função cosseno na forma $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, conclui-se que $f(x) = \cos x$ é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função cosseno seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo em que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Por exemplo, $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ é injetora.

5.3.1. Estudo da Função $f(x) = A + B.\cos(kx + \theta)$

Pelo fato de $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, todo o estudo realizado para a função $g(x) = A + B.\operatorname{sen}(kx + \theta)$ é válido para a função $f(x) = A + B.\cos(kx + \theta)$, a saber:

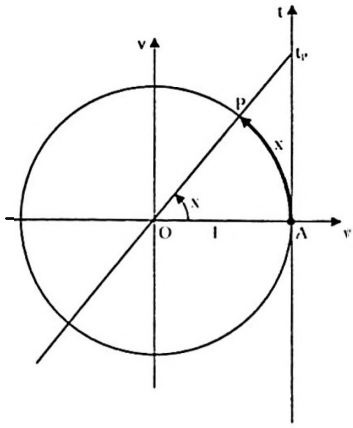
1) **k** define o período: $\mathbf{p = \frac{2\pi}{k}}$

2) θ desloca horizontalmente o gráfico. Se $\theta > 0$ o gráfico é deslocado para a esquerda e se $\theta < 0$ o gráfico é deslocado para a direita, em θ radianos.

3) **B** altera a amplitude do gráfico: $-B \leq B.\cos x \leq B$

4) **A** desloca verticalmente o gráfico: Se $A > 0$ o gráfico deslocado para cima e se $A < 0$ o gráfico é deslocado para baixo, em $|A|$ unidades de comprimento.

5.4. FUNÇÃO TANGENTE



Considere um eixo t, com origem em A e paralelo ao eixo v. Esse eixo é conhecido como **eixo das tangentes**. O ponto P é a imagem do arco θ sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo t em um ponto de posição t_P.

A função tangente é definida como $f: IR - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to IR$ que associa a cada θ a posição t_P sobre o eixo das tangentes.

$$f(x) = \text{tg } x = t_P$$

A partir desta definição pode-se determinar todas as propriedades da função tangente.

Domínio: O domínio da função f(x) = tg x é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$D(f) = IR - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Imagem: A imagem da função f(x) = tg x é o conjunto Im(f) = IR. Assim, para cada y real, sempre existe um real x de modo tg x = y.

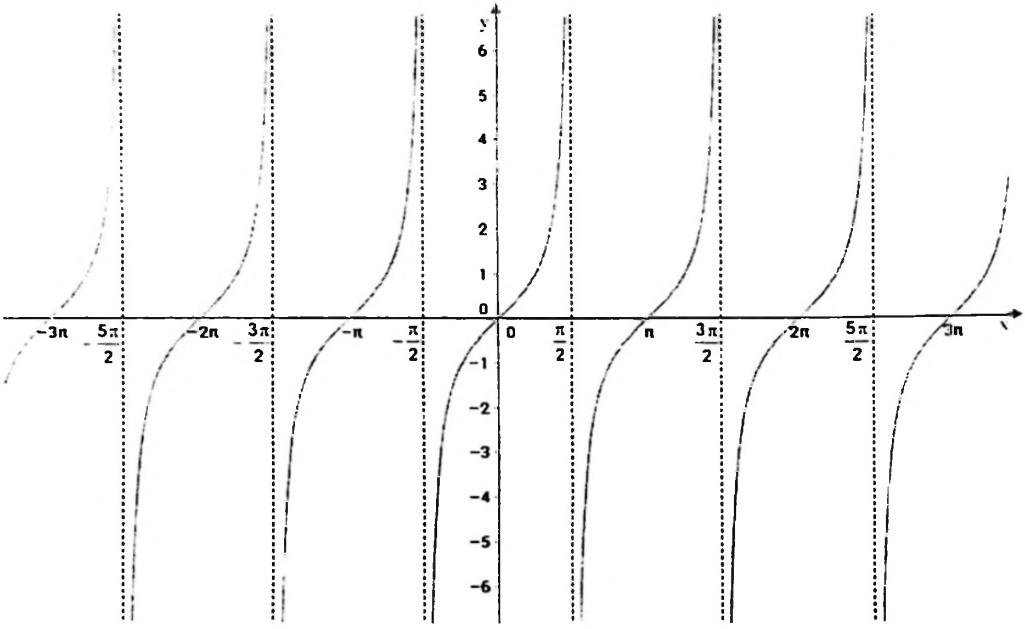
Sinal: A função f(x) = tg x é positiva para x pertencente ao primeiro ou terceiro quadrantes e negativa para x pertencente ao segundo ou quarto quadrantes:

$$f(x) = \text{tg } x > 0 \iff 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$f(x) = \text{tg } x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi$$

Raízes: Como estudado no capítulo sobre equações trigonométricas, as raízes da função f(x) = tg x são da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gráfico: O esboço do gráfico da função f(x) = tg x está dado abaixo:



A curva definida por f(x) = tg x possui nome de **tagentóide**. Note que o traçado do gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

As linhas pontilhadas no gráfico são retas denominadas de assíntotas e são traçadas passando pelos pontos do eixo x em que a função tangente não é definida. As assintotas caracterizam uma aproximação, porém o gráfico da função não pode intersectar a assintota. A ideia é que o gráfico da função se aproxime das assíntotas, nos pontos próximos de $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, de modo que a distância do gráfico a cada assíntota tende a zero.

Período: Observando o gráfico da função f(x) = tg x, verifica-se que tangente é uma função periódica e seus valores se repetem entre duas assíntotas consecutivas, motivo pelo qual o período da função tangente é π, ou seja:

$$tg(x) = tg(x + \pi) = tg(x + 2\pi) = ... = tg(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função f(x) = tg x é crescente apenas quando o domínio da função é um intervalo real entre duas assíntotas consecutivas. Por exemplo, a função $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to IR$, f(x) = tg x é estritamente crescente. Caso o domínio não esteja totalmente contido entre duas assíntotas, a função f(x) = tg x não será crescente. Por exemplo, tome uma função definida como $g:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \to IR$, dada por g(x) = tg x. Repare que, apesar de $\frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$, tem-se $-1 = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, fazendo com que essa função não seja crescente.

Paridade: Como $f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, segue que:

$$tg(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{\cos x} = -tg(x)$$

Portanto, independentemente do quadrante do arco x, tem-se

tg (x) = – tg (– x),

ou seja, f(x) = – f(– x), fazendo com que f(x) = tg x seja uma função **ímpar**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função tangente na forma $f: IR - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to IR$, conclui-se que f(x) = tg x é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função tangente seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo entre duas assíntotas consecutivas, onde a função é estritamente crescente. Por exemplo, fazendo $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to IR$, f(x) = tg x é injetora.

5.4.1. Estudo da Função f(x) = A + B.tg (kx + θ)

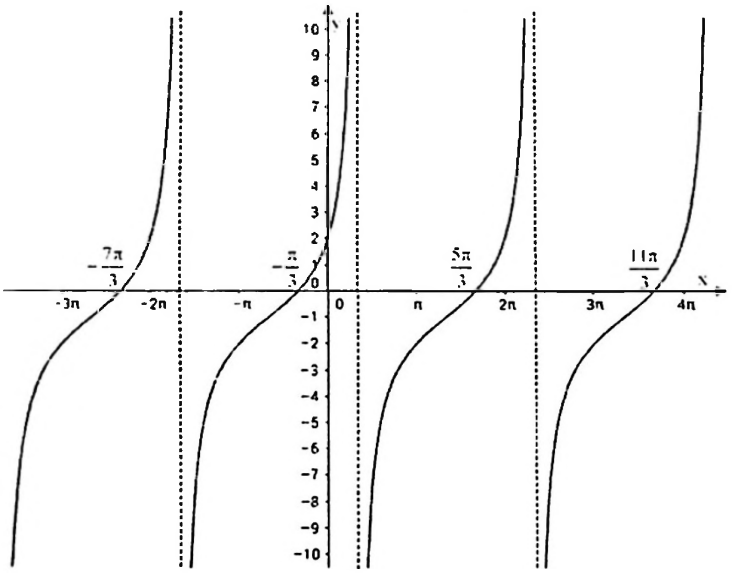
Comparativamente ao estudo detalhado realizado sobre a influência dos valores de A, B, k e θ sobre a função A + B.sen (kx + θ), existem sutis diferenças em relação ao estudo da função A + B.tg (kx + θ). O período ainda continua sendo definido pelo valor de k. Se π é o período da função tg x, **o período de uma função da forma A + B.tg (kx + θ) é** $\frac{\pi}{k}$. Porém, na função A + B.tg (kx + θ), o período ganha uma nova importância, pois coincide com a distância entre duas assíntotas consecutivas.

O valor de θ continua indicando um deslocamento horizontal do gráfico, em relação ao gráfico de tg x. Se $\theta > 0$ o gráfico é deslocado θ radianos para a esquerda e se $\theta < 0$ o gráfico é deslocado para a direita.

No valor de B reside a maior diferença em relação ao estudo da função seno. Enquanto que B definia os valores máximos e mínimos de A + B.sen (kx + θ), no estudo de A + B.tg (kx + θ) o valor de B não tem essa função, uma vez que a função A + B.tg (kx + θ) atinge valores arbitrariamente pequenos e arbitrariamente grandes, ou seja, valores que tendem a menos infinito e mais infinito. No caso da tangente, B influencia no quão rápido a função assume valores altos ou baixos e também influencia no valor das raízes da função A + B.tg (kx + θ).

O valor de A continua fazendo o gráfico sofrer um deslocamento vertical. Se $A > 0$ o deslocamento será para cima e se $A < 0$ deslocamento é para baixo. Note que esse deslocamento também influencia nos valores das raízes da função.

Com essas informações, é possível fazer um esboço do gráfico da função $f(x) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$, onde o período vale $\frac{\pi}{1/2} = 2\pi$.

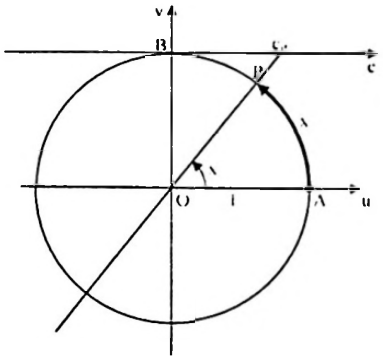


As raízes são determinadas fazendo f(x) = 0:

$$-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

5.5. FUNÇÃO COTANGENTE



Considere um eixo c, com origem no ponto B, paralelo ao eixo u e tangente ao ciclo trigonométrico. Esse eixo é conhecido como **eixo das cotangentes**. O ponto P é a imagem do arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta OP intercepta o eixo c em um ponto de posição c_p.

A função cotangente é definida como $f: \mathbb{R} - k\pi \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x a posição c_p sobre o eixo das cotangentes.

$$f(x) = \text{cotg } x = c_p$$

A partir desta definição pode-se determinar todas as propriedades da função cotangente.

Domínio: O domínio da função f(x) = cotg x é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - k\pi.$$

Imagem: A imagem da função f(x) = cotg x é o conjunto Im(f) = $\mathbb{R}$. Assim, para cada y real, sempre existe um real x de modo cotg x = y.

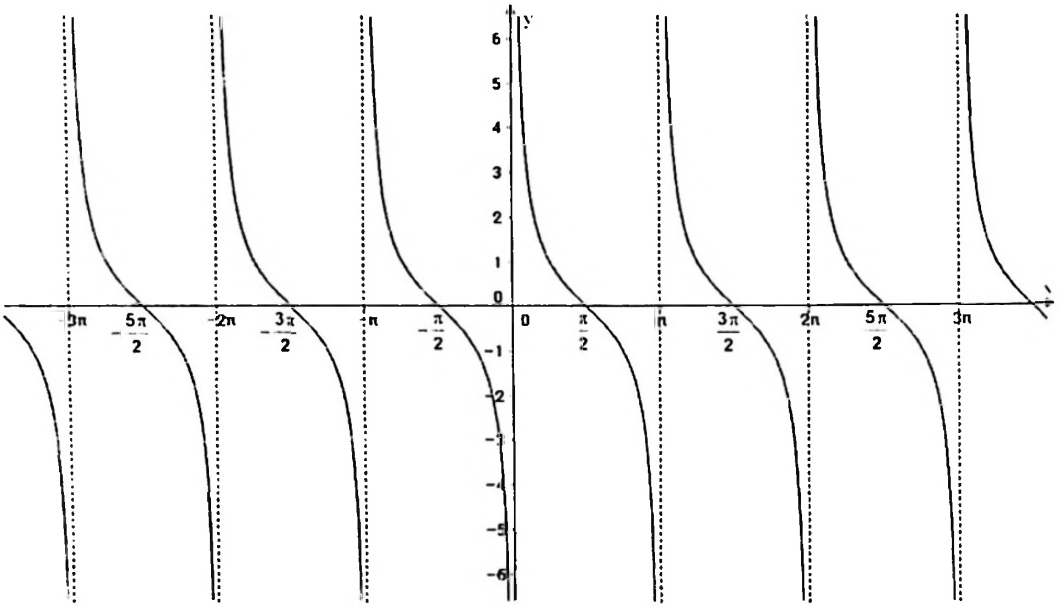
Sinal: A função f(x) = cotg x é positiva para x pertencente ao primeiro ou terceiro quadrantes e negativa para x pertencente ao segundo ou quarto quadrantes:

$$f(x) = \text{cotg } x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$f(x) = \text{cotg } x < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi$$

Raízes: Como estudado no capítulo sobre equações trigonométricas, as raízes da função f(x) = cotg x são da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Gráfico: O esboço do gráfico da função f(x) = cotg x está dado abaixo:



A curva definida por f(x) = cotg x possui nome de **cotangentóide**. Note que o traçado do gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

As assíntotas do gráfico da cotangente são traçadas passando pelos pontos do eixo x tais que $x = k\pi$.

Período: Observando o gráfico da função f(x) = cotg x, verifica-se que cotangente é uma função periódica e seu período é π, ou seja:

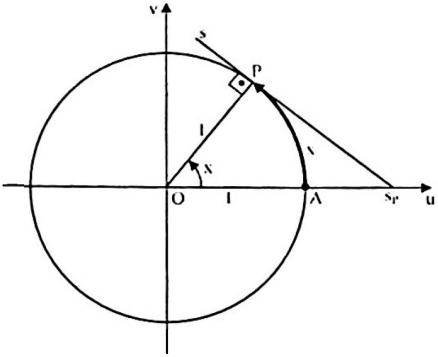
$$\text{cotg}(x) = \text{cotg}(x + \pi) = \text{cotg}(x + 2\pi) = \ldots = \text{cotg}(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\pi$$

Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função f(x) = cotg x é decrescente apenas quando o domínio da função é um intervalo real entre duas assíntotas consecutivas. Por exemplo, a função $f:(0, \pi) \to \mathbb{R}$, f(x) = cotg x, é decrescente. Caso o domínio não esteja totalmente contido entre duas assíntotas, a função f(x) = cotg x não será decrescente.

Paridade: Como $\text{cotg}(-x) = \dfrac{1}{\text{tg}(-x)} = \dfrac{1}{-\text{tg}(x)} = -\text{cotg}(x)$, segue diretamente que f(x) = cotg x é uma função **ímpar**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função cotangente na forma $f: \mathbb{R} - k\pi \to \mathbb{R}$, conclui-se que $f(x) = \cotg\ x$ é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função cotangente seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo entre duas assíntotas consecutivas, onde a função é estritamente crescente. Por exemplo, a função $f:(0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cotg\ x$ é injetora.

5.6. FUNÇÃO SECANTE



O ponto P é a imagem de um arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta s é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja s_P a posição do ponto que é interseção da reta s com o eixo u.

A função secante é definida como $f: \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$ que associa a cada x a posição s_P sobre o eixo u.

$$f(x) = \sec x = s_P$$

A partir desta definição, pode-se determinar todas as propriedades da função secante.

Domínio: O domínio da função $f(x) = \sec x$ é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Imagem: A imagem da função $f(x) = \sec x$ é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R} -]-1, 1[$.

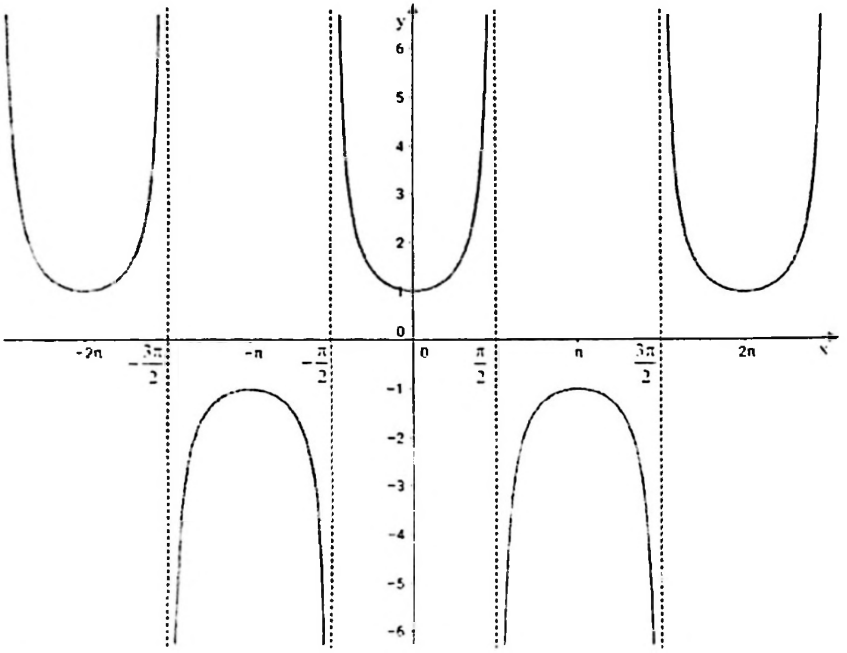
Sinal: A função $f(x) = \sec x$ é positiva para x pertencente ao primeiro ou terceiro quadrantes e negativa para x pertencente ao segundo ou quarto quadrantes:

$$f(x) = \sec x > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$f(x) = \sec x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Raízes: A função $f(x) = \sec x$ não possui raízes.

Gráfico: O esboço do gráfico da função $f(x) = \sec x$ está dado abaixo:



A curva definida por $f(x) = \sec x$ possui nome de **secantóide**. Note que o traçado do gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

As assíntotas do gráfico da secante são traçadas passando pelos pontos do eixo x tais que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Período: Observando o gráfico da função $f(x) = \sec x$, verifica-se que secante é uma função periódica e seu período é 2π.

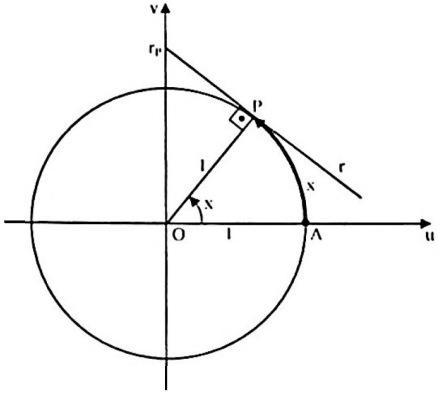
Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função $f(x) = \sec x$ é crescente para x pertencente ao 1º e 2º quadrantes e é decrescente para x pertencente ao 3º e 4º quadrantes:

$$\sec x \text{ é crescente} \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$
$$\sec x \text{ é decrescente} \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

Paridade: Como $\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$, conclui-se que $f(x) = \sec x$ é uma função **par**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função secante na forma f: $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \rightarrow \mathbb{R} -]-1, 1[$ conclui-se que f(x) = sec x é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função secante seja injetora, é necessário restringir o domínio para um quadrante do ciclo trigonométrico, onde a função é estritamente crescente ou decrescente. Por exemplo, fazendo $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = sec x é injetora.

5.7. FUNÇÃO COSSECANTE



O ponto P é a imagem de um arco x sobre a circunferência trigonométrica. A reta r é tangente ao ciclo trigonométrico em P. Seja r_P a posição do ponto que é interseção da reta s com o eixo v.

A função cossecante é definida como $f: \mathbb{R} - k\pi \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, que associa a cada x a posição r_P sobre o eixo v. Assim, pode-se afirmar que:

$$f(x) = \text{cossec } x = r_P$$

A partir desta definição pode-se determinar todas as propriedades da função cossecante.

Domínio: O domínio da função f(x) = cosssec x é o conjunto dos números reais diferentes dos arcos da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - k\pi.$$

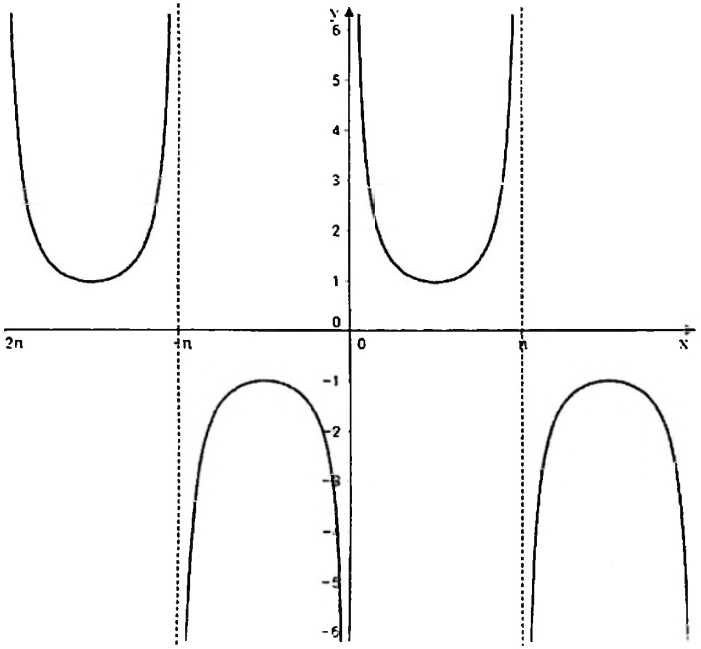
Imagem: A imagem da função f(x) = cossec x é o conjunto $Im(f) = \mathbb{R} -]-1, 1[$.

Sinal: A função f(x) = cossec x é positiva para x pertencente ao primeiro ou segundo quadrantes e negativa para x pertencente ao terceiro ou quarto quadrantes:

$$f(x) = \text{cossec } x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$
$$f(x) = \text{cossec } x < 0 \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

Raízes: A função f(x) = cossec x não possui raízes.

Gráfico: O esboço do gráfico da função f(x) = cossec x está dado abaixo:



A curva definida por f(x) = cossec x possui nome de **cossecantóide**. Note que o traçado do gráfico se estende indefinidamente para a esquerda e para a direita.

As assíntotas do gráfico da cotangente são traçadas passando pelos pontos do eixo x tais que $x = k\pi$.

Período: Observando o gráfico da função f(x) = cossec x, verifica-se que cossecante é uma função periódica e seu período é 2π.

Crescimento e Decrescimento: Observando o gráfico, conclui-se que a função f(x) = cossec x é crescente para x pertencente ao 2° ou 3° quadrantes e é decrescente para x pertencente ao 1° ou 4° quadrantes:

$$\text{cossec } x \text{ é crescente} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{cossec } x \text{ é decrescente} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Paridade: Como $\text{cossec}(-x) = \frac{1}{\text{sen}(-x)} = \frac{1}{-\text{sen}(x)} = -\text{cossec}(x)$, conclui-se que f(x) = cossec x seja uma função **ímpar**.

Injetividade e Sobrejetividade: Definindo domínio e contra domínio da função cossecante na forma f: $IR - k\pi \to IR -]-1, 1[$ conclui-se que f(x) = cossec x é sobrejetora, porém não é injetora. Para que a função cossecante seja injetora, é necessário restringir o domínio para um quadrante do ciclo trigonométrico, onde a função é estritamente crescente ou decrescente. Por exemplo, fazendo $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to IR$, f(x) = cossec x é injetora.

5.8. PERÍODO DA SOMA DE DUAS FUNÇÕES PERIÓDICAS

5.8.1. Teorema: Se uma função h é definida por h(x) = f(x) + g(x), onde f tem período $\frac{p_1}{q_1}$ e g tem período $\frac{p_2}{q_2}$, com $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ e mdc (p_1, q_1) = mdc (p_2, q_2) = 1, então o período de h(x) é $\frac{mmc(p_1, p_2)}{mdc(q_1, q_2)}$.

Demonstração:

Se $\frac{p_1}{q_1}$ é o período de f(x), segue que $f(x) = f\left(x + k\frac{p_1}{q_1}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Se $\frac{p_2}{q_2}$ é o período de g(x), segue que $g(x) = g\left(x + k\frac{p_2}{q_2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Se M = mmc (p_1, p_2), sabe-se que existem h_1 e $h_2 \in \mathbb{Z}$, com mdc $(h_1, h_2) = 1$, de modo que $p_1.h_1 = M$ e $p_2.h_2 = M$. Se N = mdc (q_1, q_2), sabe-se que existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, com mdc $(k_1, k_2) = 1$, de modo que $k_1.N = q_1$ e $k_2.N = q_2$. Note que:

$$h\left(x + \frac{M}{N}\right) = f\left(x + \frac{M}{N}\right) + g\left(x + \frac{M}{N}\right) = f\left(x + \frac{h_1.p_1}{\frac{q_1}{k_1}}\right) + g\left(x + \frac{h_2.p_2}{\frac{q_2}{k_2}}\right) \Rightarrow$$

$$h\left(x + \frac{M}{N}\right) = f\left(x + h_1.k_1\frac{p_1}{q_1}\right) + g\left(x + h_2.k_2\frac{p_2}{q_2}\right) = f(x) + g(x) = h(x)$$

Este resultado demonstra que $\frac{M}{N}$ é período de h(x). Porém, como mdc (h_1k_1, h_2k_2) = 1, conclui-se que $\frac{M}{N}$ é menor valor racional em que $h(x) = h\left(x + \frac{M}{N}\right)$, ou seja, $\frac{M}{N}$ é o período da função h(x).

O resultado deste teorema também é válido para uma quantidade aleatória de funções no somatório. Assim, se f_1 tem período $\frac{p_1}{q_1}$, f_2 tem período $\frac{p_2}{q_2}$, ... e f_n tem período $\frac{p_n}{q_n}$, com $p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, então a função $h(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ é periódica e seu período vale $\frac{mmc(p_1, p_2, ..., p_n)}{mdc(q_1, q_2, ..., q_n)}$.

Este teorema pode ser aplicado para calcular o período da soma de funções trigonométricas. Por exemplo, suponha que $f(x) = sen\left(\frac{45\pi}{98}\right)$ e $g(x) = cos\left(\frac{75\pi}{28}\right)$. O período da função f é $\frac{2\pi}{\frac{45\pi}{98}} = \frac{196}{45}$ e o período da função g é $\frac{2\pi}{\frac{75\pi}{28}} = \frac{56}{75}$. Desta forma, o período da função $h(x) = f(x) + g(x)$ vale $\frac{mmc(196, 56)}{mdc(45, 75)} = \frac{392}{15}$.

Perceba que o teorema anterior é restrito a funções cujos períodos sejam número racionais. Contudo, em funções trigonométricas é muito comum o período ser da forma 2π, $\frac{\pi}{2}$ ou qualquer outro múltiplo de π, que é sabidamente um número irracional. Deste modo, é necessário estender a abrangência do teorema sobre o período da soma de suas funções para o caso em que os períodos sejam múltiplos de um mesmo número irracional.

5.8.2. Teorema: Se uma função h é definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, onde f tem período $\frac{p_1}{q_1}\varphi$ e g tem período $\frac{p_2}{q_2}\varphi$, com φ irracional e $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p_1, q_1) = mdc(p_2, q_2) = 1$, então o período de h(x) é $\frac{mmc(p_1, p_2)}{mdc(q_1, q_2)}\varphi$.

Demonstração:

Se $\frac{p_1}{q_1}\varphi$ é o período de f(x), segue que $f(x) = f\left(x + k\frac{p_1}{q_1}\varphi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Se $\frac{p_2}{q_2}\varphi$ é o período de g(x), segue que $g(x) = g\left(x + k\frac{p_2}{q_2}\varphi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Se M = mmc (p_1, p_2), sabe-se que existem h_1 e $h_2 \in \mathbb{Z}$, com mdc $(h_1, h_2) = 1$, de modo que $p_1.h_1 = M$ e $p_2.h_2 = M$. Se N = mdc (q_1, q_2), sabe-se que existem k_1 e $k_2 \in \mathbb{Z}$, com mdc $(k_1, k_2) = 1$, de modo que $k_1.N = q_1$ e $k_2.N = q_2$. Note que:

$$h\left(x+\frac{M}{N}\varphi\right)=f\left(x+\frac{M}{N}\varphi\right)+g\left(x+\frac{M}{N}\varphi\right)=f\left(x+\frac{h_1.p_1}{\frac{q_1}{k_1}}\varphi\right)+g\left(x+\frac{h_2.p_2}{\frac{q_2}{k_2}}\varphi\right) \Rightarrow$$

$$h\left(x+\frac{M}{N}\varphi\right)=f\left(x+h_1.k_1\frac{p_1}{q_1}\varphi\right)+g\left(x+h_2.k_2\frac{p_2}{q_2}\varphi\right)=f(x)+g(x)=h(x)$$

Este resultado demonstra que $\frac{M}{N}\varphi$ é período de h(x). Porém, como mdc (h_1k_1, h_2k_2) = 1, conclui-se que $\frac{M}{N}$ é menor valor racional em que $h(x)=h\left(x+\frac{M}{N}\varphi\right)$, ou seja, $\frac{M}{N}\varphi$ é o período da função h(x).

Aplicando este teorema é possível determinar o período da soma de funções do tipo sen ax, cos bc ou tg cx, com a, b e c racionais. Por exemplo, considere que $f(x) = \text{sen}\frac{12x}{5}$ e $g(x) = \text{tg}\frac{18x}{35}$. O período da função f é $\frac{2\pi}{\frac{12}{5}}=\frac{5\pi}{6}$ e o período da função g é $\frac{2\pi}{\frac{18}{35}}=\frac{35\pi}{9}$. Desta forma, o período da função h(x) = f(x) + g(x) vale $\frac{\text{mmc}(5, 35)}{\text{mdc}(6, 9)}\pi=\frac{35\pi}{18}$.

5.8.3. Teorema: Se uma função h é definida por h(x) = f(x) + g(x), onde f tem período T_1 e g tem período T_2, a função h será periódica se e somente se $\frac{T_1}{T_2}$ for um número racional.

Demonstração:

Se $\frac{T_1}{T_2}$ for um número racional então T_1 e T_2 são racionais ou múltiplos de um mesmo número racional. Os dois últimos teoremas garantem que h(x) é periódica. Suponhamos agora que h é periódica e seu período é T_3, ou seja, $h(x) = h(x + T_3)$.

Se T_3 é múltiplo de A ou B então todos os períodos vão ser múltiplos racionais um dos outros, onde segue direto a conclusão do teorema. Suponhamos, então, que as funções $f(x + T_3) - f(x)$ e $g(x + T_3) - g(x)$ não são identicamente nulas. Assim:

$$f(x + T_3 + T_1) - f(x + T_1) = f(x + T_3) - f(x)$$
$$g(x + T_3 + T_2) - g(x + T_2) = g(x + T_3) - g(x)$$

Desta forma, a função $f(x + T_3) - f(x)$ é periódica de período $T_1' = T_1/p$, para algum p inteiro maior ou igual a zero. Analogamente, a função $g(x + T_3) - g(x)$ é periódica de período $T_2' = T_2/q$, para algum q inteiro maior ou igual a zero. Por outro lado:

$$f(x + T_3) - f(x) + g(x + T_3) - g(x) = h(x + T_3) - h(x) = 0 \Rightarrow$$
$$f(x + T_3) - f(x) = g(x) - g(x + T_3)$$

Portanto, conclui-se que as funções $f(x + T_3) - f(x)$ e $g(x + T_3) - g(x)$ possuem o mesmo período, ou seja:

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$$

Este teorema permite determinar se a soma de duas funções resulta ou não em na função periódica. Por exemplo, considere a função $h(x) = \text{sen } x + \cos \pi x$. O período da função sen x é 2π e o período da função $\cos \pi x$ é 2. Como $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ não é um número racional, segue, por este teorema, que a função definida por $h(x) = \text{sen } x + \cos \pi x$ não é uma função periódica.

Exercícios Resolvidos

1) (Ciaba-05) O período e o conjunto imagem da função $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right)$ são, respectivamente.

a) $\pi/2$; [1,5 , 2,5] b) π; [– 0,5 , 2] c) 2π; [– 0,5 , 2]
d) $\pi/2$; [– 0,5 , 0,5] e) 2π; [1,5 , 2,5]

Solução: Alternativa E

É conhecido o fato que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$. Assim: $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\text{sen } x$.

Desta forma, o período de f(x) é o mesmo período de sen x, que é 2π.

Além disso: $-1 \le \text{sen } x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\text{sen } x \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}\text{sen } x \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$2 - \frac{1}{2} \le 2 - \frac{1}{2}\text{sen } x \le 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \le 2 - \frac{1}{2}\text{sen } x \le \frac{5}{2}$

Consequentemente, a imagem de f é o conjunto [1,5 , 2,5]

2) (Fuvest-95) Dentre os números a seguir, o mais próximo de sen50° é:
a) 0,2. b) 0,4. c) 0,6. d) 0,8. e) 1,0.
Solução: Alternativa D

Sabe-se que sen $45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707$ e sen $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$.

Como a função f(x) = sen x é crescente no intervalo $0 \leq x \leq 90°$ (intervalo onde se encontra o 50°) e sendo $45° < 50° < 60°$, segue que sen 45° < sen 50° < sen 60°, ou seja, 0,707 < sen 50° < 0,866.
Dos valores apresentados nas alternativas, o único pertencente ao intervalo [0,707 , 0,866] é 0,8.

3) (UFPE-95) Considere a função $f(x) = \text{sen}(x^2 + 2)$, definida para x real. Analise as seguintes afirmações:
1 - f é uma função periódica.
2 - f é uma função par.
3 - f(x) = 0 exatamente para 32 valores distintos de x no intervalo [0, 10].
4 - $f(x) = 2 + \text{sen}^2 x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
5 - A imagem de f é o intervalo [1, 3].
Solução:
1 - Suponhamos que $f(x) = \text{sen}(x^2 + 2)$ é periódica. Assim, existe um $T \neq 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = f(x + T) \Rightarrow \text{sen}(x^2 + 2) = \text{sen}[(x + T)^2 + 2]$
i) $x^2 + 2xT + T^2 + 2 = x^2 + 2 + 2k\pi \Rightarrow 2xT + T^2 = 2k\pi$, ou seja, T depende de x, que é um absurdo, pois T é constante
ii) $x^2 + 2xT + T^2 + 2 = \pi - x^2 + 2 + 2k\pi \Rightarrow 2xT + T^2 = (2k - 1)\pi$, ou seja, T depende de x, que é um absurdo, pois T é constante
Assim, $f(x) = \text{sen}(x^2 + 2)$ não é periódica e a afirmativa é **FALSA**
2 - $f(-x) = \text{sen}[(-x)^2 + 2] = \text{sen}(x^2 + 2) = f(x) \Rightarrow$ f é par $\Rightarrow$
afirmativa **VERDADEIRA**
3 - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = k\pi$
Se $x \in [0, 10]$ então $2 \leq k\pi \leq 102 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \leq k \leq \frac{102}{\pi} \Rightarrow 0,6 < k < 33 \Rightarrow$
existem 32 inteiros possíveis para k, cada um associado a uma solução diferente
afirmativa **VERDADEIRA**
4 - Sabe-se que, de maneira geral, $\text{sen}(A + B) \neq \text{sen}\,A + \text{sen}\,B$
afirmativa é **FALSA**
5 – Independentemente do arco 0, sabe-se que $-1 \leq \text{sen}\,0 \leq 1$, fazendo com que $-1 \leq f(x) \leq 1$
afirmativa é **FALSA**

4) (UFPR-13) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro. Suponha que em um instante t, em segundos, a altura h(t) do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) + 4$$

a) Determine a altura máxima e mínima que o pistão atinge.
b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?
Solução:
a) Sabe-se que os valores que todo seno pode assumir variam entre – 1 e 1. Assim:

$$-1 \le \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) \le 1 \Rightarrow -4 \le 4.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) \le 4 \Rightarrow 0 \le 4.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) + 4 \le 8$$

Deste modo, o valor máximo de h(t) é 8 e o valor mínimo é 0.

b) O período de h(t) vale: $p = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2\pi}{0,05}} = 0,05\ s$

Assim, em um minuto são realizados n ciclos completos, de modo que:

$$n = \frac{60}{0,05} = 1200.$$

3) (AFA-03) Simplificando a expressão

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(4\pi - x) + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right),$$

obtém-se uma nova expressão E. O conjunto domínio, o conjunto-imagem e o período da função f(x) = E são, respectivamente.

a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}, \mathbb{R}, \pi$ b) $\mathbb{R}, [-1, 1], 2\pi$

c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, K \in \mathbb{Z} \}, \mathbb{R}, \pi$ d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, K \in \mathbb{Z} \}, [-1, 1], 2\pi$

Solução: Alternativa A
Desenvolvendo a expressão:

$$E = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(4\pi - x) + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Rightarrow E = -\cos x + \cos x + \text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$$E = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Domínio:

$$\frac{3\pi}{2} - x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -x \neq k\pi - \pi \Rightarrow x \neq -k\pi + \pi \Rightarrow$$

$$x \neq \pi(1 - k) \Rightarrow x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Imagem:: $\Re$ Período: π

6) (AFA-03) Considere a função real definida por $y = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x}$ e as seguintes afirmações:

I – A função é decrescente em todo seu domínio.

II – O gráfico da função apresenta assíntotas nos arcos $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

III – A função é negativa em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

IV – A função admite inversa em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

São verdadeiras somente as afirmações contidas nos itens.

a) I e II
c) III e IV
b) II e III
d) I e IV

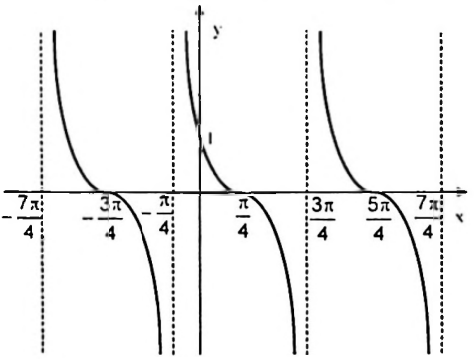
Solução: NÃO HÁ ALTERNATIVA CORRETA

Desenvolvendo y:

$$y = \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2.\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{2}.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto, o esboço do gráfico de y é:



I - Falsa

y é decrescente somente entre duas assíntotas consecutivas, não em todo seu domínio

Por exemplo $\pi > \pi/2$ e $1 = f(\pi) > f(\pi/2) = -1$.

II - Falsa

$-\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ tende a $\pm\infty$ quando $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

III - Falsa

Pelo gráfico, $f(x) > 0$ para $-\pi/4 < x < \pi/4$

IV – Falsa

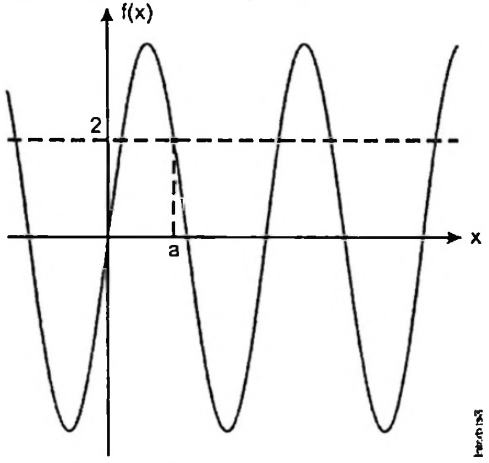
Note que o contra-domínio não foi informado, não sendo, portanto, possível afirmar nada sobre sua sobrejetividade. A informação "função real " significa apenas que a imagem de y é um subconjunto dos reais. Por mais que entre duas assíntotas consecutivas a função seja injetiva, y seria bijetiva em $[0, \pi/2]$ caso o contra-domínio fosse $[-1, 1]$.

Comentário:

Acredita-se que a banca examinadora pretendia que os itens corretos fossem I e IV.

7) (Insper-14) A figura mostra o gráfico da função f, dada pela lei

$$f(x) = (\text{sen } x + \cos x)^4 - (\text{sen } x - \cos x)^4$$



O valor de a, indicado no eixo das abscissas, é igual a

a) $\frac{5\pi}{12}$ b) $\frac{4\pi}{9}$ c) $\frac{3\pi}{8}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

Solução: Alternativa A

A expressão de f pode ser simplificada:

$f(x) = (\text{sen } x + \cos x)^4 - (\text{sen } x - \cos x)^4 = [(\text{sen } x + \cos x)^2]^2 - (\text{sen } x - \cos x)^2]^2 =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{sen } x.\cos x)^2 - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\text{sen } x.\cos x)^2 =$

$= (1 + \text{sen } 2x)^2 - (1 - \text{sen } 2x)^2 = (1 + \text{sen } 2x + 1 - \text{sen } 2x)(1 + \text{sen } 2x - 1 + \text{sen } 2x) =$

$= 4\text{sen } 2x$

Pelo gráfico, a é uma das abscissas corresponde a ordenada y = 2:

$f(a) = 2 \Rightarrow 4\text{sen } 2a = 2 \Rightarrow \text{sen } 2a = \frac{1}{2}$:

i) $2a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{12} + k\pi$ (1)

ii) $2a = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow a = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ (2)

Pelo gráfico, a é o segundo menor valor positivo em que f(x) = 2. Observando as soluções (1) e (2) conclui-se que o segundo menor valor positivo é $a = \frac{5\pi}{12}$.

8) (UFPE-04) O PIB (Produto Interno Bruto, que representa a soma das riquezas e dos serviços produzidos por uma nação) de certo país, no ano 2000 + x, é dado, em bilhões de dólares, por P(x) = 500 + 0,5x + 20cos(πx/6) onde x é um inteiro não negativo.

a) Determine, em bilhões de dólares, o valor do PIB do país em 2004.

b) Em períodos de 12 anos, o PIB do país aumenta do mesmo valor, ou seja, P(x + 12) – P(x) é constante. Determine esta constante (em bilhões de dólares).

Solução:

a) No ano de 2004 tem-se que x vale 4. Assim, o PIB de 2004 vale:

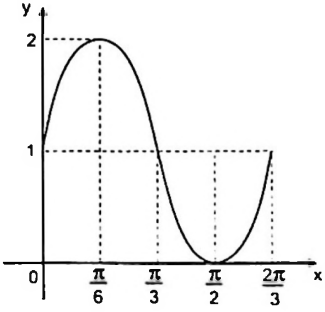
$$P(4) = 500 + 0,5.4 + 20.\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = 500 + 2 + 20.\left(-\frac{1}{2}\right) = 502 - 10 = 492$$

b) P(x + 12) – P(x) =

$$= 500 + 0,5.(x+12) + 20.\cos\left(\frac{(x+12)\pi}{6}\right) - 500 - 0,5.x - 20.\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) =$$

$$= \cancel{500} + \cancel{0,5.x} + 6 + \cancel{20.\cos\left(\frac{x\pi}{6} + 2\pi\right)} - \cancel{500} - \cancel{0,5.x} - \cancel{20.\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)} = 6$$

9) (AFA-05) Sabendo que o gráfico abaixo é da função y = a + sen bx, pode-se afirmar que a + b é um número



a) par. b) primo. c) divisor de 18. d) múltiplo de 7.

Solução: Alternativa A

Note que o gráfico está deslocado 1 unidade para cima, fazendo com que a = 1.

Pelo gráfico, o período da função é $\frac{2\pi}{3}$. Logo:

$$p = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = 3$$

Assim: a + b = 1 + 3 = 4, que é um número par.

10) (ITA-98) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = 2\text{sen } 2x - \cos 2x$$

Então:

a) f é impar e periódica de período π.

b) f é par e periódica de período $\pi/2$.

c) f não é par nem impar e é periódica de período π.

d) f não é par e é periódica de período $\pi/4$.

e) f não é impar e não é periódica.

Solução: Alternativa C

A expressão dada pode ser transformada em um seno da diferença de dois arcos:

$$f(x) = \sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\text{sen } 2x - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2x\right) = \sqrt{5}.\text{sen}(2x - \theta),$$

onde $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$f(-x) = \sqrt{5}\,\text{sen}(-2x - 0) = -\sqrt{5}\,\text{sen}(2x + 0)$ que é diferente de f(x) ou – f(x)

Assim, f não é par e nem ímpar e f é uma função periódica de período π.

11) (ITA-08) O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\text{sen}^2(3x) + \text{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) [-3; 3] e 2π b) [-2, 2] e $\frac{2\pi}{3}$ c) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) [-1,3] e $\frac{\pi}{3}$ e) [-1,3] e $\frac{2\pi}{3}$

Solução: Alternativa C

Sabe-se que $\cos 6x = 1 - 2\text{sen}^2 3x$

Substituindo esta relação em f(x): $f(x) = \text{sen } 6x - \cos 6x$

Multiplicando em cima e em baixo por $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}6x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 6x\right) \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{2}[\cos(\pi/4).\text{sen}6x - \text{sen}(\pi/4).\cos 6x] \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}\text{sen}(6x - \pi/4)$$

Como a imagem da função sen x é [– 1, 1], então a imagem da função f é $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

O período é dado por $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

12) (AFA-15) Considere a função real sobrejetora $f:A\to B$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$. Sobre f é **FALSO** afirmar que

a) O conjunto A é $\left\{x \in IR / x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) f é par.

c) f é injetora.

d) B = {2}

Solução: Alternativa C

Observe que:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} 3x.\cos x - \operatorname{sen} x.\cos 3x}{\operatorname{sen} x.\cos x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(3x - x)}{\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x.\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} x.\cos x}{\operatorname{sen} x.\cos x} = 2$$

Analisando cada alternativa:

a) O domínio A da função é $x \in IR$ tal que sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. ALTERNATIVA VERDADEIRA

b) Para todo x no conjunto $\left\{x \in IR / x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ tem-se f(x) = 2, onde pode-se afirmar que f(x) = f(– x), ou seja, f é par. ALTERNATIVA VERDADEIRA

c) f não é injetora, pois todos os elementos do domínio possuem a mesma imagem. ALTERNATIVA FALSA

d) Para todo x no conjunto $\left\{x \in IR / x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ tem-se f(x) = 2 e como f(x) é sobrejetora segue que o contra domínio da função é B = {2}. ALTERNATIVA VERDADEIRA

13) Verifique se as seguintes funções são periódicas:

a) $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$.

b) $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$.

c) $f(x) = 3\operatorname{sen}(2x) - \cos\left(\frac{9x}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{7}\right)$.

d) $f(x) = 2\operatorname{sen}\frac{25\pi x}{18}\cos\frac{5\pi x}{18}$.

Solução:

a) Suponhamos que $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ é uma função periódica. Assim, para todo $x \geq 0$ deve existir um T tal que $f(x + T) = f(x) \Rightarrow \operatorname{sen}\sqrt{x+T} = \operatorname{sen}\sqrt{x} \Rightarrow$
$\sqrt{x+T} = \sqrt{x} + 2k\pi \Rightarrow x + T = x + 2\sqrt{x}k\pi + 4k^2\pi^2 \Rightarrow T = 2\sqrt{x}k\pi + 4k^2\pi^2$
Assim, T depende do valor de x, que pode assumir qualquer valor real não negativo, que é um absurdo! Logo, $\operatorname{sen}\sqrt{x}$ não é periódica.

b) **1ª solução:**

Note que $f(0) = 1 + 1 = 2$. Se $f(x)$ for periódica, de período T, então existe T tal que $f(T) = \cos(T) + \cos(\sqrt{2}T) = 2$. Como o cosseno varia entre -1 e 1, segue que $\cos(T) = 1$ e $\cos(\sqrt{2}T) = 1$. Logo:

i) $T = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; ii) $\sqrt{2}T = 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Dividindo estas duas expressões: $\frac{\sqrt{2}T}{T} = \frac{2k_2\pi}{2k_1\pi} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}$, que é uma contradição, uma vez que $\frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{2}$ é irracional. Desta forma, a função $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ não é periódica.

2ª solução:

Pelo teorema apresentado no item 5.8.3 deste capítulo, sabe-se que a soma de suas funções periódicas resultará em uma função periódica se a razão entre os períodos for um número racional. Como o período de $\cos x$ é 2π e de $\cos\sqrt{2}x$ é $\sqrt{2}\pi$ e a razão entre esses períodos vale $\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}$, que não é um número racional, segue diretamente que $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ não é uma função periódica.

c) **1ª solução:**

Como não existe o interesse em determinar o menor período e sim analisar se a função é periódica ou não, pode-se encontrar $T \neq 0$ tal que $f(x) = f(x + T)$, sem a preocupação de calcular o menor valor de T. Assim sendo, perceba que:

$$f(x+70\pi) = 3\operatorname{sen}(2x+140\pi) - \cos\left(\frac{9x+630\pi}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3x+210\pi}{7}\right) =$$

$$= 3\operatorname{sen}[2x+70(2\pi)] - \cos\left[\frac{9x}{5}+63(2\pi)\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{3x}{7}+15(2\pi)\right] =$$

$$= 3\operatorname{sen}(2x) - \cos\left(\frac{9x}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{7}\right) = f(x)$$

Assim, 70π é um período de $f(x)$, fazendo com que $f(x)$ seja periódica.

2ª solução:

Sabe-se que o período da função 3sen 2x é $\frac{2\pi}{2} = \pi$. o período da função $\cos\left(\frac{9x}{5}\right)$ é $\frac{2\pi}{\frac{9}{5}} = \frac{10\pi}{9}$ e o período da função $\text{sen}\left(\frac{3x}{7}\right)$ é $\frac{2\pi}{\frac{3}{7}} = \frac{14\pi}{3}$. Como todos os períodos são múltiplos de um mesmo irracional, que é π, então a função f(x) é periódica. É possível determinar o período fundamental da função f(x), que vale:

$$\frac{\text{mmc}(1, 10, 14)}{\text{mdc}(1, 9, 3)}\pi = 70\pi$$

d) Uma maneira de determinar o período de uma função da forma sen ax.cos bx é usando as fórmulas de transformação de soma em produto. Sabe-se que:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2\text{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Assim, para $f(x) = 2\text{sen}\frac{25\pi x}{18}\cos\frac{5\pi x}{18}$ tem-se:

$$\begin{cases} \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{25\pi x}{18} \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{5\pi x}{18} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{5\pi x}{3} \text{ e } B = \frac{10\pi}{9}$$

Logo: $f(x) = 2\text{sen}\frac{25\pi x}{18}\cos\frac{5\pi x}{18} = \text{sen}\frac{5\pi x}{3} + \text{sen}\frac{10\pi x}{9}$.

O período de $\text{sen}\frac{5\pi x}{3}$ é $\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}$ e o período de $\text{sen}\frac{10\pi x}{9}$ é $\frac{2\pi}{\frac{10\pi}{9}} = \frac{9}{5}$.

Portanto, o período de f(x) vale $\frac{\text{mmc}(6, 9)}{\text{mdc}(5, 5)} = \frac{18}{5}$.

14) (Olimpíada do Canadá-75) Uma função f(x) é periódica se existe um número positivo p tal que f(x + p) = f(x) para todo x. Por exemplo, sen x é periódica com período 2π. A função sen (x^2) é periódica? Prove sua resposta.

Solução:

Seja $g(x) = \text{sen } (x^2)$.

Suponhamos que g possua período p: $g(x) = g(x + p) = g(x - p) \Rightarrow$

$\text{sen } (x^2 + p^2 + 2px) = \text{sen } (x^2 + p^2 - 2px) \Rightarrow$

$\text{sen } (x^2 + p^2 + 2px) - \text{sen } (x^2 + p^2 - 2px) = 0 \Rightarrow$

$2.\cos (p^2 + x^2).\text{sen } (2px) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Assim, a igualdade acima somente é válida para p = 0, implicando que g não é periódica.

15) (Olimpíada Internacional de Matemática-77) É definida a função

$$f(x) = 1 - a.\cos x - b.\text{sen } x - A.\cos 2x - B.\text{sen } 2x,$$

onde a, b, A, B são constantes reais. Suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x real. Prove que $a^2 + b^2 \leq 2$ e $A^2 + B^2 \leq 1$.

Solução:

$$a.\cos x + b.\text{sen } x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\text{sen}x\right)$$

Como $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ então existe um ângulo α tal que

$\text{sen}\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Logo: $a.\cos x + b.\text{sen } x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos x.\text{sen}\alpha + \text{sen}x.\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}.\text{sen}(x+\alpha)$,

onde α = arc tg (a/b)

Analogamente: $a.\cos x + b.\text{sen } x = \sqrt{A^2+B^2}.\text{sen}(2x+\beta)$

onde β = arc tg (A/B)

Desta forma: $f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2}\text{sen}(2x+\beta) \geq 0$

$f(x+\pi) = 1 + \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2}\text{sen}(2x+\beta) \geq 0$

Somando as duas inequações: $\sqrt{A^2+B^2}\text{sen}(2x+\beta) \leq 1$ (1)

Como (1) é válida para todo x e em algum momento $\text{sen}(2x + \theta) = 1$, segue que $A^2 + B^2 \leq 1$

$f(x+\pi/4) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2}\text{sen}(2x+\pi/2+\beta) \Rightarrow$

$1 - \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2}\cos(2x+\beta) \geq 0$

$f(x-\pi/4) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x-\pi/4+\alpha) - \sqrt{A^2+B^2}\text{sen}(2x-\pi/2+\beta) \Rightarrow$

$1 - \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\pi/4+\alpha) + \sqrt{A^2+B^2}\cos(2x+\beta) \geq 0$

Somando as duas inequações:

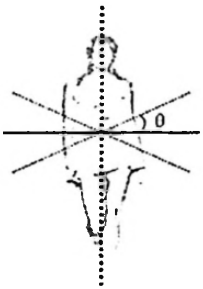
$\sqrt{a^2+b^2}[\text{sen}(x+\alpha+\pi/4) + \text{sen}(x+\alpha-\pi/4)] \leq 2 \Rightarrow$

$\sqrt{a^2+b^2}.2.\text{sen}(x+\alpha).\text{sen}(\pi/4) \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\text{sen}(x+\alpha) \leq \sqrt{2}$

Como, em algum momento, tem-se $\text{sen}(x + \alpha) = 1$: $a^2 + b^2 \leq 2$

Exercícios de Vestibular

1) (UEPA-12) Os desfiles de moda parecem impor implicitamente tanto o "vestir-se bem" quanto o "ser bela" definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ, conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo (t).

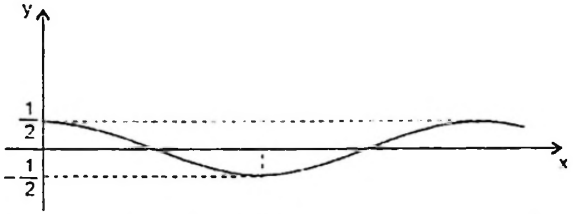


(Fonte: http://www.google.com.br/search?hl=PT – Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto adaptado)

Um modelo matemático que pode representar esse movimento oscilatório do andar feminino é dado por: $\theta(t) = \frac{\pi}{10}\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$. Nestas condições, o valor de $\theta\left(\frac{3}{2}\right)$ é:

a) π/8 b) π/10 c) π/12 d) π/18 e) π/20

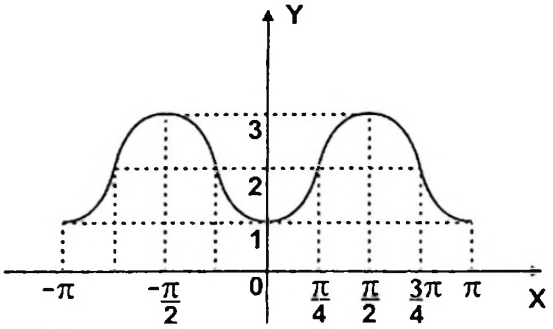
2) (UEFS-10)



O gráfico representa a função real f(x) = acos(bx), em que a e b são constantes não nulas. Sendo P = 5π/2 o período de f, o valor de $\left[f\left(\frac{25}{16}\pi\right)\right]^2$ é:

a) 1/8 b) 1/7 c) 1/5 d) 1/3 e) 1/2

3) (UEPB-10) Uma função f de R em R tem parte de seu gráfico representado abaixo:

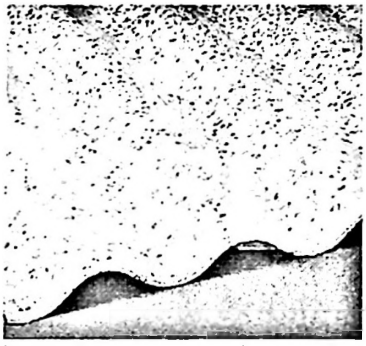


Esta função é definida por:

a) $f(x) = 2 + \cos(2x)$ b) $f(x) = 2 - \cos(2x)$ c) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(2x)$

d) $f(x) = 1 - \cos(2x)$ e) $f(x) = 2 - \cos x$

4) (UEFS-11)



As telhas onduladas de amianto, bastante populares, vêm tendo seu uso proibido em diversos municípios brasileiros, por ser um material cancerígeno e por também poder causar doenças respiratórias. Para substituí-las, podem ser usadas as chamadas ecotelhas — telhas onduladas produzidas a partir da reciclagem de material plástico, como, por exemplo, aparas de tubos de creme dental.

As ecotelhas têm elevada resistência mecânica, bem como à ação dos raios ultravioleta e infravermelho, além de serem econômicas, são 100% impermeáveis. Supondo-se que a curva representativa de uma secção transversal de uma telha ondulada, como a da figura, seja definida por parte da função real $f(x) = 1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{3}\right)$, é correto afirmar que o conjunto-imagem e o período de f(x) são, respectivamente,

A) $[-1, 3]$ e 4π. C) $[-1, 3]$ e 3π. E) $[-3, 3]$ e 2π.

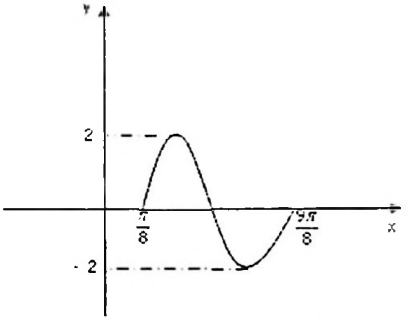
B) $[-3, 1]$ e 4π. D) $[-1, 1]$ e 2π.

5) (UEL-06) Uma bomba de água aspira e expira água a cada três segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Dentre as alternativas a seguir, assinale a expressão algébrica para o volume (y) de água na bomba, em função do tempo (t).

a) $y = 2 + 2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ b) $y = 2 + 2.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ c) $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

d) $y = 3 + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ e) $y = -3 + 2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

6) (UEPA-08) Segundo reportagem da Revista VEJA de 26.07.06, uma onda gigante atingiu a Ilha de Java, na Indonésia. Autoridades locais contaram mais de 500 mortos e 38.000 desabrigados. A reportagem mostra como se originam e quais as causas de formação desses fenômenos da natureza. O formato dessas ondas gigantes pode ser registrado e representado matematicamente, por meio de funções, conforme gráfico abaixo. A função f que melhor representa esse gráfico para $\frac{\pi}{8} \le x \le \frac{9\pi}{8}$, é:



a) $f(x) = 2.\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ b) $f(x) = 2.\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = 2.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ d) $f(x) = 2.\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

e) $f(x) = 2.\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$

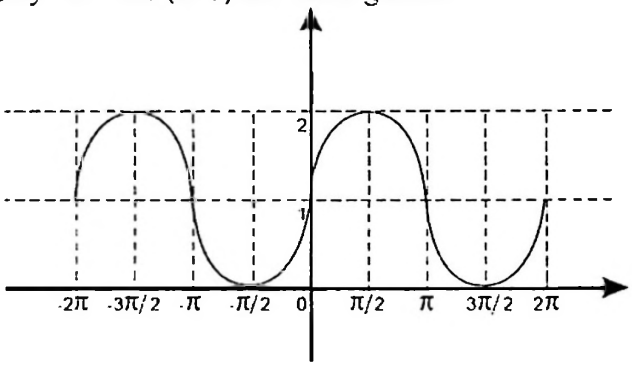
7) (UECE-14) Se f: R→R é a função definida por $f(x) = 2^{\text{sen } x} + 1$, então o produto do maior valor pelo menor valor que f assume é igual a

A) 4,5. B) 3,0. C) 1,5. D) 0.

8) (UFMS-10) Seja uma função trigonométrica definida por $F(x) = 2.\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, onde $x \in \mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Assinale a(s) afirmação(ões) correta(s).

(001) O ponto $(0, \sqrt{2})$ pertence ao gráfico da função F.
(002) A imagem da função F é o intervalo fechado [-1,1].
(004) A função F tem duas raízes no intervalo fechado $[0, \pi]$.
(008) Os valores mínimos de F são assumidos em $x = 3\pi/8 + k.\pi$, com k inteiro.
(016) Os valores máximos de F são assumidos em $x = \pi/5 + k.\pi$, com k inteiro.

9) (UFPA-09) Se $y = a + \cos(x+b)$ tem como gráfico



podemos afirmar que

a) $a = 2$, $b = \pi/2$ b) $a = 1$, $b = -\pi/2$
c) $a = 2$, $b = -\pi/2$ d) $a = 1$, $b = \pi/2$
e) $a = 0$, $b = 0$

10) (UFPB-93) Determine o período da função $f: \Re \to \Re$ definida por

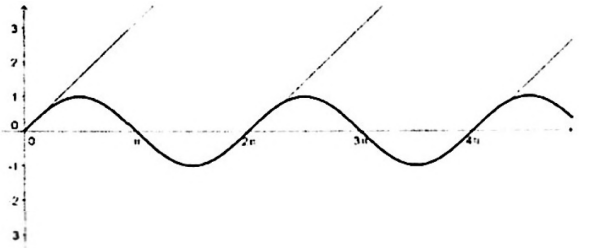
$$f(x) = \cos(7x).\cos(3x) + \text{sen}(7x).\text{sen}(3x).$$

11) (Unifesp-08) Considere a função $y = f(x) = 1 + \text{sen}(2\pi x - \pi/2)$, definida para todo x real.

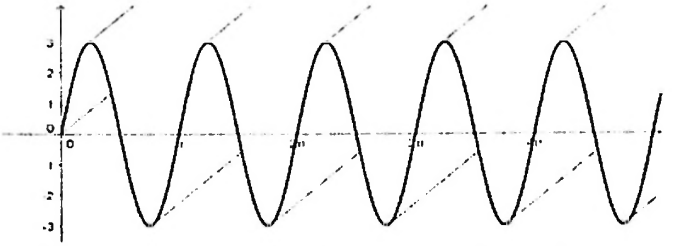
a) Dê o período e o conjunto imagem da função f.
b) Obtenha todos os valores de x no intervalo [0, 1], tais que $y = 1$.

12) (UFPA-10) Um fabricante produz telhas senoidais como a da figura ao lado.

Para a criação do molde da telha a ser fabricada, é necessário fornecer a função cujo gráfico será a curva geratriz da telha. A telha padrão produzida pelo fabricante possui por curva geratriz o gráfico da função y = sen(x) (veja detalhe na figura ao lado).



Um cliente solicitou então a produção de telhas que fossem duas vezes "mais sanfonadas" e que tivessem o triplo da altura da telha padrão, como na figura abaixo.



A curva geratriz dessa nova telha será então o gráfico da função

a) $y = 3.\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ b) $y = 3.\text{sen}(2x)$ c) $y = 2.\text{sen}\left(\frac{1}{3}x\right)$

d) $y = \frac{1}{3}.\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ e) $y = 2.\text{sen}(3x)$

13) (UECE-14) Em relação à periodicidade e à paridade da função f: R→R definida por f(x) = sen x + cos x, pode-se afirmar corretamente que
A) f é periódica e par.
B) f é periódica e impar.
C) f é periódica, mas não é par nem impar.
D) f não é periódica, não é par nem impar.

14) (UFPE-99) Considere a função $f(x) = \text{sen}(\log_2 x)$ definida para todo real positivo x. Podemos afirmar que:
0-0) $f(x)$ possui infinitas raízes no intervalo (0, 1]
1-1) $f(x)$ possui uma única raiz no intervalo (1, 64]
2-2) $f(x)$ não possui raízes no intervalo (64, 128]

3-3) $f(x)$ possui infinitas raízes no intervalo $(128, 10^6]$
4-4) $f(x)$ possui infinitas raízes no intervalo $(10^6, +\infty)$

15) (UFBA-09) Considere a função real $f(x) = A + B\cos(mx + \alpha)$, com $\alpha \in]0, \pi/2[$ e com A e B constantes. Sabendo-se que o período de f é igual a π, $f(0) = 2$, $f(\pi/4) = -1$ e $\operatorname{tg} \alpha = 2$, calcule $f(\alpha/2)$.

16) (FGV-05) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica

$$f(x) = 900 - 800\operatorname{sen}\left(\frac{\pi.x}{12}\right),$$

onde $f(x)$ é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 \leq x \leq 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a
A) 600. B) 800. C) 900. D) 1500. E) 1600.

17) (FGV-05) Em uma cidade freqüentada por viajantes em férias, estima-se que o número de pessoas empregadas dependa da época do ano, e pode ser aproximada pela função:

$$N = 10 + 2\operatorname{sen}(2\pi x)$$

em que, N é o número de pessoas empregadas (em milhares) e $x = 0$ representa o início do ano 2005, $x = 1$ o início do ano 2006 e assim por diante.
O número de empregados atinge o menor valor:
A) No início do 1°- trimestre de cada ano.
B) No início do 2°- trimestre de cada ano.
C) No início do 3°- trimestre de cada ano.
D) No início e no meio de cada ano.
E) No início do 4°- trimestre de cada ano.

18) (FGV-09) Estima-se que, em 2009, a receita mensal de um hotel seja dada (em milhares de reais) por $R(t) = 3000 + 1500.\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, em que $t = 1$ representa o mês de janeiro, $t = 2$ o mês de fevereiro e assim por diante.
A receita de março será inferior à de fevereiro em:
A)R$800000,00 b) R$750000,00
C) R$700000,00 D)R$650000,00
E) R$850000,00

19) (UCS-09) A temperatura média diária em determinada cidade é dada por

$$T(x) = 14.\text{sen}\left[\frac{2\pi}{360}(x-95)\right]+11,$$

em que T é a temperatura em graus centígrados e x é o número de dias decorridos desde o início do ano. De acordo com essa função, a temperatura média diária nessa cidade oscila entre _____ e _____ graus centígrados, sendo que a temperatura média mais alta ocorre no mês de _____. Assinale a alternativa que preenche correta e respectivamente as lacunas acima.

a) -3 25 julho
b) -3 25 janeiro
c) 0 11 janeiro
d) 11 14 dezembro
e) 0 11 dezembro

20) (UCS-10) Durante o movimento oscilatório de um objeto preso à extremidade de uma mola, quando ela é alongada e depois solta, a posição do objeto em qualquer instante t é dada pela função periódica definida por

$$P(t) = A \cdot \text{sen}(Bt + C),$$

em que A, B e C são números positivos, $0 \le C < 2\pi$ e o período é π. Sendo o valor máximo que a função assume igual a 6 em $t = 0$, os valores das constantes A, B e C são, respectivamente,

a) 6, π e π. b) 6, π e $\pi/2$. c) 3, 2 e π.
d) 6, 2π e π. e) 6, 2 e $\pi/2$.

21) (Unifor-12) A conjugação da atração gravitacional entre os corpos do sistema terra-lua-sol é o principal fator responsável pela ocorrência das marés, quando as águas do mar atingem limites máximo e mínimo com determinada regularidade. A altura da maré (em metros) observada em uma praia do litoral nordestino é aproximada pela função: $f(t) = 1,5 + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, em que tempo t é medido em horas e $0 \le t \le 24$. Com base nestes dados, considere as seguintes afirmativas:

(I) Depois das 18h, a maré começa a secar.
(II) Às 6h, a maré atinge altura mínima.
(III) Às 9h, a maré está secando.
(IV) A média entre as alturas máxima e mínima é de 1,5m.
(V) Às 3h, a maré está enchendo.

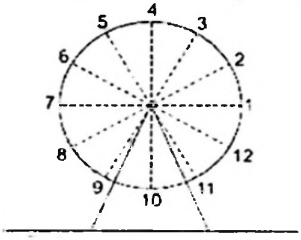
Assinalando V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas, obtém-se a seguinte sequência:

(A) F F V V F (B) V F V F V (C) V V F F V
(D) F F V V V (E) F V F V F

22) (Unifor-12) Considere que as fases da lua sejam regidas aproximadamente pela função $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{12}\right)$ onde f corresponde à fração da superfície lunar visível iluminada no x-ésimo dia de uma observação. Nesse sentido, NÃO é correto afirmar que:
(A) no dia imediatamente anterior ao do início da observação, a lua apresenta 50% de sua face visível iluminada.
(B) no sexto dia, teremos lua cheia.
(C) no segundo dia, teremos 75% de sua face visível iluminada.
(D) no décimo oitavo dia, teremos lua nova.
(E) no quadragésimo quinto dia, teremos lua cheia.

23) (UESPI-06) Em virtude da procura por certo produto ser maior em determinados meses do ano e menor em outros, seu preço, durante todo o decorrer do ano de 2005, variou segundo a equação $N(t) = 120+80.\cos\left(t.\frac{\pi}{6}\right)$, onde N é o preço de uma unidade do produto, em reais, e t é o mês do ano. Com base nesses dados analise as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta: (Dado: considere $\pi \cong 3{,}14$).
1) O valor máximo obtido pela venda de uma unidade do produto foi de R$ 200,00.
2) O pior valor de venda da unidade do produto ocorreu no nono mês.
3) No oitavo mês do ano, o produto foi comercializado por R$ 80,00 a unidade.
Está(ão) correta(s)
A) 1 apenas B) 1 e 2 apenas C) 1 e 3 apenas D) 2 e 3 apenas E) 1, 2 e 3

24) (UEFS-10) Em um parque de diversões, uma roda gigante de raio r = 10m, tendo 12 cadeiras igualmente espaçadas ao longo de seu perímetro, faz uma volta completa em 30 segundos. Além disso, o ponto mais baixo atingido ao longo do percurso circular está a 0,5m do solo. Certo dia, depois de todos os assentos estarem ocupados, o assento 1 se encontrava na posição indicada na figura, quando a roda começa a girar no sentido anti-horário. Sendo a distância desse assento ao solo, t segundos após a roda ter começado a girar, dada pela expressão $D(t) = M + N\,\text{sen}(\omega t)$, $\omega > 0$, é correto afirmar que $M - N$ é igual a



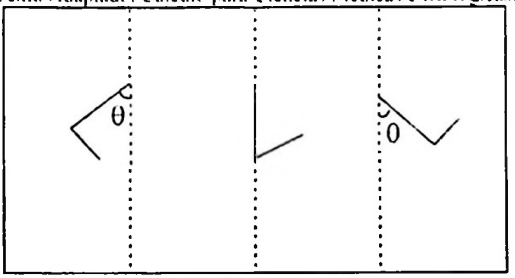
A) cos(5α) B) sen(5α) C) cos(10α) D) sen(10α) E) cos(15α)

25) (UEPA-13) As caminhadas e corridas de rua são atividades incorporadas à cultura esportiva dos brasileiros. Um praticante de corrida popular (cooper) balança cada um de seus braços ritmicamente enquanto corre de acordo com o modelo dado pela expressão:

$$f(t) = \frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right];$$

onde f(t) é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical, e t, tempo em segundos, conforme ilustrado abaixo. Nessas condições o maior ângulo obtido com o movimento cíclico do braço do corredor é:

(Texto Adaptado: Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas. São Paulo: Harbra, 1998)



a) 10° b) 15° c) 20° d) 25° e) 30°

26) (UECE-07) O conjunto-imagem da função $f: R \to R$, definida por

$$f(x) = 2\cos 2x + \cos^2 x,$$

é o intervalo:

A) [-2,1] B) [-2,3] C) [-2,2] D) [-2,0]

27) (UFBA-10) Dadas as funções reais

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 \le x < \pi/2 \\ 1 + \cos x, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \text{ e } g(x) = \begin{cases} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & -\pi/2 \le x < 0 \\ 1 + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & 0 \le x \le \pi/2 \end{cases},$$

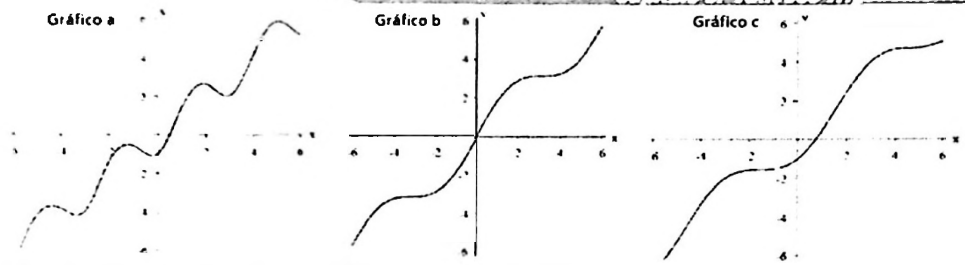
determine x, pertencente ao intervalo $[0, \pi/2[$, tal que $[f(x)]^2 + g(x) - 7/4 = 0$.

28) (UFLA-08) São apresentadas abaixo três funções I, II e III e três gráficos a, b e c. Relacione cada função a seu respectivo gráfico e, a seguir, marque a alternativa que apresenta a seqüência CORRETA.

(I) $f(x) = x - \cos(2x)$

(II) $g(x) = x + \operatorname{sen}(x)$

(III) $h(x) = x - \cos(x)$



(A) I – b , II – a , III – c (B) I – c , II – b , III – a
(C) I – b , II – c , III – a (D) I – a , II – b , III – c

29) (UFPB-09) Em determinado trecho do oceano, durante um período de vinte e quatro horas, a altura H das ondas, medida em metros, variou de acordo com a expressão $H(t) = 2 + (3/2)\text{sen}(\pi t/12)$, onde $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas. A altura das ondas nesse trecho não ultrapassou 2,75 m no horário da(s):

a) 0h às 2h e das 10h às 24h
b) 1h às 3h e das 9h às 23h
c) 2h às 3h e das 8h às 20h
d) 3h às 5h e das 7h às 20h
e) 4h às 5h e das 6h às 20h

30) (UFPB-11) Com o objetivo de aumentar a produção de alimentos em certa região, uma secretaria de agricultura encomendou a uma equipe de agrônomos um estudo sobre as potencialidades do solo dessa região. Na análise da temperatura do solo, a equipe efetuou medições diárias, durante quatro dias consecutivos, em intervalos de uma hora. As medições tiveram início às 6 horas da manhã do primeiro dia (t = 0). Os estudos indicaram que a temperatura T , medida em graus Celsius, e o tempo t , representando o número de horas decorridas após o início das observações, relacionavam-se através da expressão

$$T(t) = 26 + 5.\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

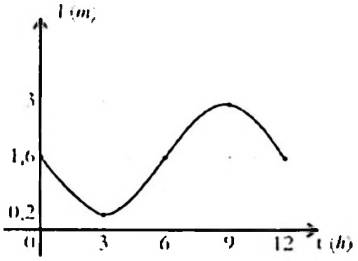
Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:
I. A temperatura do solo, às 6 horas da manhã do primeiro dia, foi de 23,5 °C.
II. A função T(t) é periódica e tem período igual a 24 h.
III. A função T(t) atinge valor máximo igual a 30 °C.
IV. A temperatura do solo atingiu o valor máximo, no primeiro dia, às 14 h.
V. A função T(t) é crescente no intervalo [0,8].

31) (UFPB-12) Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura A das marés, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:

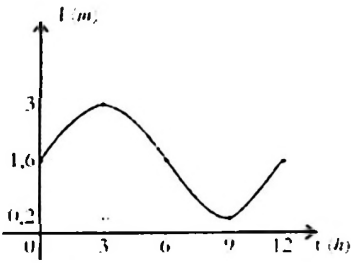
$$A(t) = 1,6 - 1,4.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Nessa função, a variável t representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Nesse contexto, conclui-se que a função A, no intervalo $[0,12]$, está representada pelo gráfico:

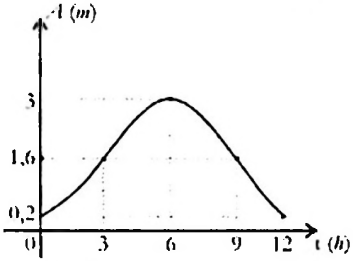
a)



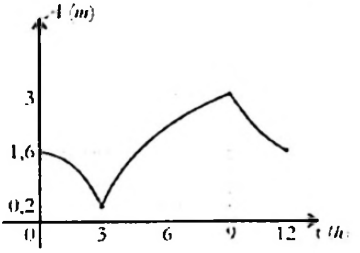
b)



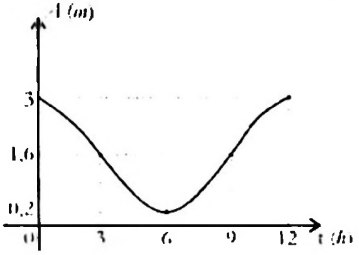
c)



d)



e)



32) (UFPB-13) Com o objetivo de analisar o consumo de água de certa cidade, a companhia de água e esgotos solicitou à sua equipe de engenheiros um estudo sobre a vazão de água nessa cidade. O estudo mostrou que essa vazão $V(t)$, em m^3/h, na hora t, é expressa pela função:

$$V(t) = 1000\left[4 + 2.\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right], \text{ onde } 0 \le t \le 24$$

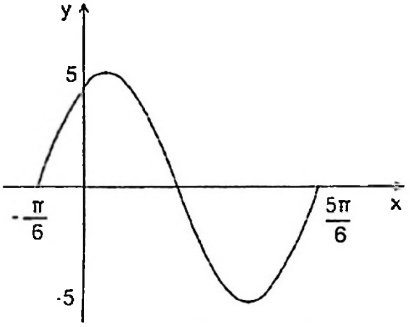
Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas acerca da vazão de água nessa cidade:

I. A vazão mínima é de $3000m^3/h$.

II. A vazão máxima é de $6000m^3/h$.

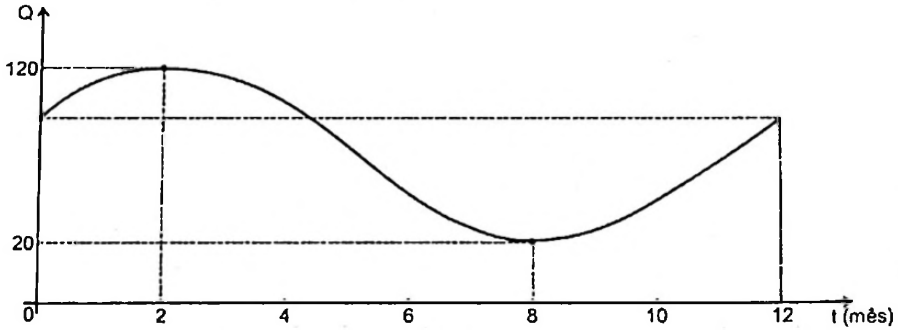
III. A vazão é maior ou igual a 5000m^3/h no horário das 3h às 9h e das 15h às 21h.
IV. A vazão em t = 12h é de 5000m^3/h.
Está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s):
a) II e III b) II e IV c) I, II e III
d) II e) I, II e IV

33) (UFPE-13) Seja f uma função que tem como domínio o conjunto dos números reais e é dada por f(x) = a.sen (w.x + b), com a, w e b constantes reais. A figura abaixo ilustra o gráfico de f, restrito ao intervalo fechado [- π/6, 5π/6] A função tem período π e seu conjunto imagem é o intervalo fechado [- 5, 5].



Determine as constantes a e w e o menor valor positivo de b. Indique $a^2 + w^2 + 3b/\pi$.

34) (UFSM-11)



O gráfico mostra a quantidade de animais que uma certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função Q (t) = a sen (b + ct) + d para descrever essa situação. De acordo com os dados, Q(0) é igual a
A) 100. B) 97. C) 95. D) 92. E) 90.

35) (UFRGS-11) Traçando os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = |\text{sen } x|$ e $g(x) = |\cos x|$, com x variando no conjunto dos números reais de -2π a 2π, no mesmo sistema de coordenadas, o número de interseções é
(A) 7. (B) 8.(C) 9. (D) 10. (E) 12.

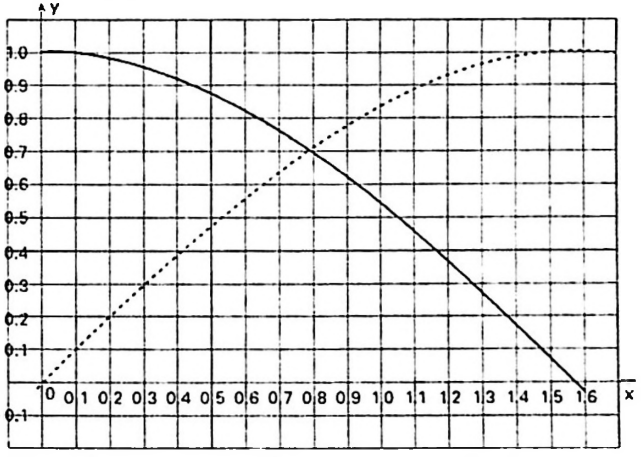
36) (UFRGS-12) O número de interseções da função $f(x) = \text{sen } 5x$ com o eixo das abscissas no intervalo $]-2\pi, 2\pi]$ é
a) 10 b) 14 c) 21 d) 24 e) 27

37) (Insper-08) Um edifício tem a forma de um cilindro circular reto. Há uma escada, na forma de espiral, que envolve o edifício desde o chão até a cobertura. Uma pessoa que sobe essa escada tem seu movimento no espaço tridimensional descrito pelas coordenadas a seguir:

$$x = 20\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right), \quad y = 20\text{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) \text{ e } z = 0{,}1t,$$

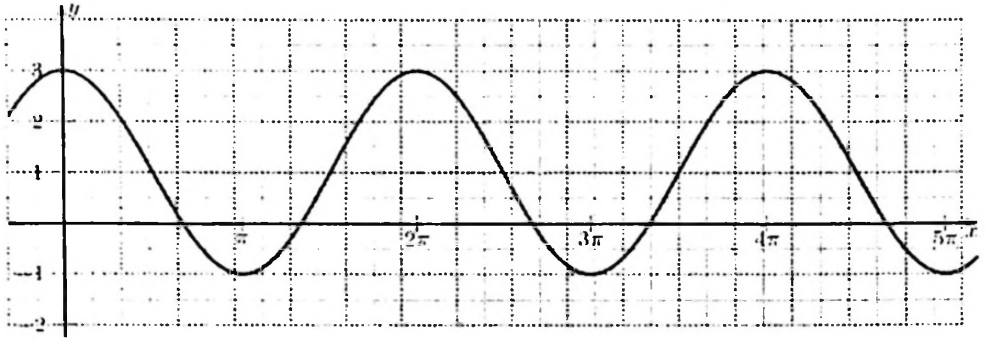
em que t é o número de degraus que a pessoa já subiu, sendo $t = 0$ o nível do chão. Sabendo que cada volta completa em torno do prédio por meio dessa escada equivale a subir um andar e que o prédio tem 20 andares, uma pessoa que sobe do chão à cobertura inicia na altura $z = 0$ e termina na altura
a) $z = 120$. b) $z = 240$. c) $z = 600$. d) $z = 1200$. e) $z = 2400$.

38) (Insper-11) Na figura a seguir, estão representadas partes dos gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$.



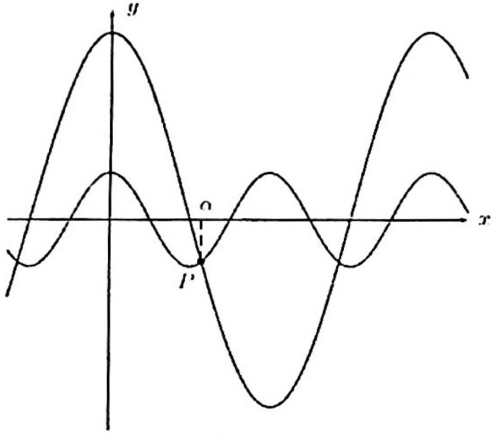
A partir dos gráficos, é correto concluir que a menor solução positiva da equação $\cos(2 \text{ sen } x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vale aproximadamente
a) 0,2. b) 0,3. c) 0,4. d) 0,5 e) 0,6.

39) (Insper-15) A figura abaixo representa o gráfico da função $f(x) = a\cos(x) + b$.



O soma a + b e a diferença b − a são, respectivamente, iguais a
(a) 3 e 1. (b) 1 e − 3. (c) π e 1. (d) − 1 e π. (e) 3 e − 1.

40) (Insper-15) A figura mostra os gráficos das funções reais f e g, dadas, respectivamente, pelas leis $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = 4\cos x$

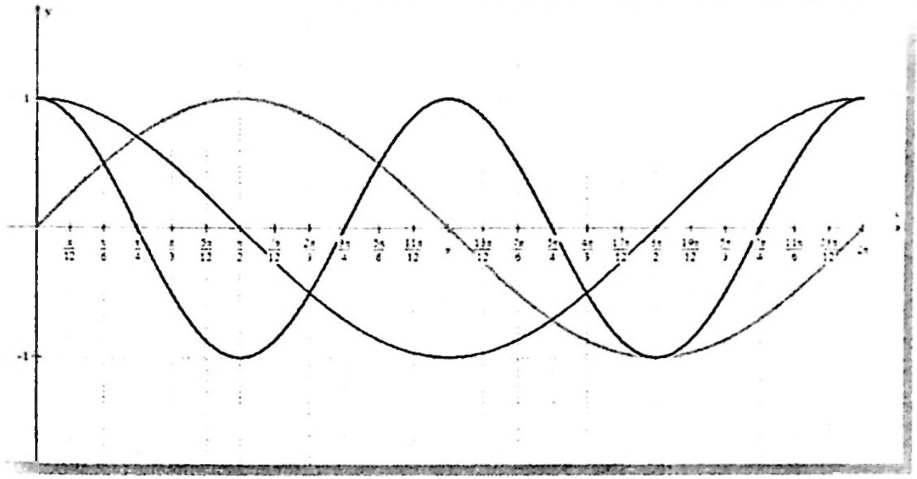


Os dois gráficos interceptam-se no ponto P, de abscissa α. Assim, o valor de $\cos\alpha$ é igual a

a) $1-\sqrt{2}$ b) $1-\sqrt{3}$ c) $1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $1-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $1-\frac{\sqrt{6}}{2}$

O texto seguinte refere-se às duas próximas questões

A figura representa os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \cos 2x$, definidas no intervalo $[0, 2\pi]$.



41) (Insper-16) O valor máximo da função $d(x) = h(x) - g(x)$ é
(a) - 0,5. (b) 0. (c) 1. (d) 1,5. (e) 2.

42) (Insper-16) Sorteando-se aleatoriamente um número real x do intervalo $[0, 2\pi]$, a probabilidade de que ele satisfaça a desigualdade $\cos x \leq \operatorname{sen} x \leq \cos 2x$ é igual a
a) 1/6 b) 4/25 c) 5/24 d) 1/4 e) 9/25

O texto seguinte refere-se às duas próximas questões

Ao longo de um ano, a taxa de câmbio de uma moeda X em relação a uma moeda Y foi dada pela seguinte função:

$$f(t) = 1,625 + 1,25.\cos\left(\pi\frac{(t-3)}{12}\right)$$

sendo t o tempo, dado em meses desde o início do ano. Assim, $t = 9$ indica a taxa no início de outubro, que era de 1,625 unidades da moeda X para uma unidade da moeda Y (note que esse valor da taxa indica que no instante considerado a moeda X era "menos valiosa" que a moeda Y).

43) (Insper-16) Ao longo do ano analisado, a maior taxa de câmbio da moeda X em relação à moeda Y atingida e o instante em que isso ocorreu foram, respectivamente,
(a) 2,625 e início de janeiro. (b) 2,625 e início de março.
(c) 2,875 e início de janeiro. (d) 2,875 e início de abril.
(e) 2,875 e início de junho.

44) (Insper-16) Houve um intervalo de tempo ao longo do ano considerado em que a moeda X deixou de ser "menos valiosa" que a moeda Y. Esse intervalo teve duração de

(a) 5 meses. (b) 4 meses. (c) 3 meses.
(d) 2 meses. (e) 1 mês.

45) (Unifesp-12) A função $D(t) = 12 + (1,6).\cos\left(\frac{\pi(t+10)}{180}\right)$ fornece uma aproximação da duração do dia (diferença em horas entre o horário do pôr do sol e o horário do nascer do sol) numa cidade do Sul do país, no dia t de 2010. A variável inteira t, que representa o dia, varia de 1 a 365, sendo t = 1 correspondente ao dia 1º de janeiro e t = 365 correspondente ao dia 31 de dezembro. O argumento da função cosseno é medido em radianos. Com base nessa função, determine

a) a duração do dia 19.02.2010, expressando o resultado em horas e minutos.

b) em quantos dias no ano de 2010 a duração do dia naquela cidade foi menor ou igual a doze horas.

46) (FGV-01) Uma empresa prevê para os próximos 24 meses (a partir de janeiro de 2001) a quantidade mensalmente vendida de determinado produto através da função:

$$Q = 30 + 4.\text{sen}\left(\frac{\pi.t}{6} + \frac{\pi}{2}\right),$$

onde Q é a quantidade e t vale 1 para janeiro de 2001, t vale 2 para fevereiro de 2001 e assim por diante.

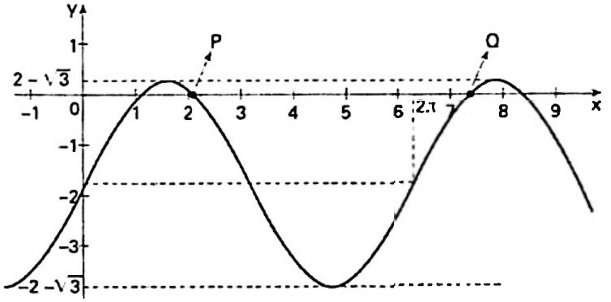
a) Qual o período da função?

b) Para que valores de t a quantidade é máxima? Para que valores de t a quantidade é mínima?

47) (FGV-11) A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0,5x + 3.\text{sen}\frac{\pi x}{6}$, em que x = 1 corresponde a janeiro de 2011, x = 2 corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante. A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é:
(Use a aproximação decimal $\sqrt{3} = 1,7$.)

A) 308,55 B) 309,05 C) 309,55
D) 310,05 E) 310,55

48) (FGV-11) O gráfico indica uma senoide, sendo P e Q dois de seus interceptos com o eixo x.



Em tais condições, a distância entre P e Q é

a) $4\pi/3$ b) $3\pi/2$ c) $5\pi/3$ d) 2π e) $9\pi/4$

49) (FGV-12) Em certa cidade litorânea, verificou-se que a altura da água do mar em um certo ponto era dada por

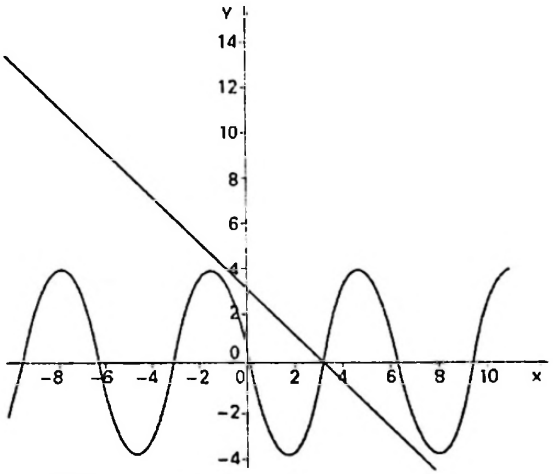
$$f(x) = 4 + 3.\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$$

em que x representa o número de horas decorridas a partir de zero hora de determinado dia, e a altura f(x) é medida em metros. Em que instantes, entre 0 e 12 horas, a maré atingiu a altura de 2,5m naquele dia?

A) 5 e 9 horas B) 7 e 12 horas C) 4 e 8 horas

D) 3 e 7 horas E) 6 e 10 horas

50) (FGV-14) No gráfico, observam-se uma senoide de equação $y = -4\text{sen } x$ e uma reta de coeficiente angular igual a -1, que intersecta a senoide e o eixo x no mesmo ponto do plano cartesiano.

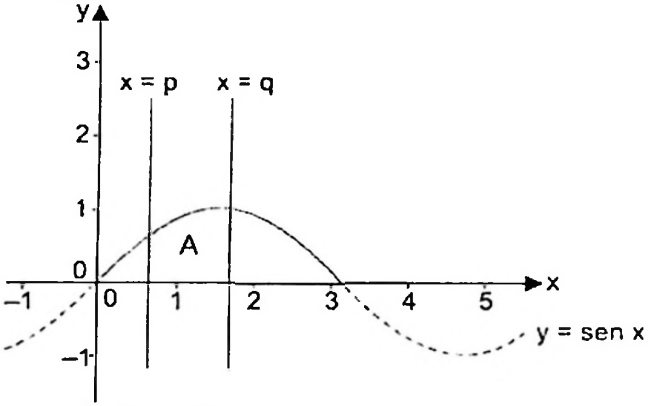


Uma representação algébrica correta da região destacada na figura é

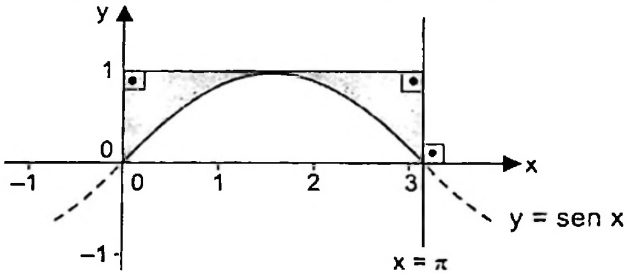
A) $y \leq x - \pi \leq 4\text{sen } x$ B) $y \leq -x + \pi \leq -4\text{sen } x$
C) $4\text{sen } x \leq y \leq x - \pi$ D) $-4\text{sen } x \leq y \leq -x + \pi$
E) $-4\text{sen } x \leq y \leq -x - \pi$

51) (FGV-16) O número de quartos ocupados em um hotel varia de acordo com a época do ano. Estima-se que o número de quartos ocupados em cada mês de determinado ano seja $Q(x) = 150 + 30\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ em que x é estabelecido da seguinte forma: x = 1 representa o mês de janeiro, x = 2 representa o mês de fevereiro, x = 3 representa o mês de março, e assim por diante. Em junho, em relação a março, há uma variação porcentual dos quartos ocupados em
a) – 20% b) – 15% c) – 30% d) – 25% e) – 50%

52) (FGV-16) No intervalo de 0 a π, a função que permite calcular a área A da região limitada pelo eixo x, pelas retas de equações x = p e x = q e pelo gráfico da função definida por y = sen x é dada por A = cos p – cos q.



Com base na informação fornecida, observe a figura a seguir.



A área da região sombreada nessa figura é, aproximadamente, igual a
(A) 2,64. (B) 2,14. (C) 1,86. (D) 1,14. (E) 0,86.

53) (FGV-15) A tabela indica o horário do por do sol em uma cidade hipotética no dia primeiro de cada um dos doze meses de 2013. O horário indicado na tabela (y) é dado em "minutos depois das 18 horas". Por exemplo, em 1.º de janeiro de 2013, o por do sol se deu às 18h02.

Mês	Horário (y)	Mês	Horário
Janeiro	$2 = 2 - 0$	Julho	$2 = 2 - 0$
Fevereiro	$1,5 = 2 - \frac{1}{2}$	Agosto	$2,5 = 2 + \frac{1}{2}$
Março	$1,1 \approx 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	Setembro	$2,9 \approx 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
Abril	$1 = 2 - 1$	Outubro	$3 = 2 + 1$
Maio	$1,1 \approx 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	Novembro	$2,9 \approx 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
Junho	$1,5 = 2 - \frac{1}{2}$	Dezembro	$2,5 = 2 + \frac{1}{2}$

a) Usando a tabela a seguir para os valores de x, faça um esboço do gráfico de y em função de x no intervalo $\frac{\pi}{6} \le x \le 2\pi$.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

b) Determine uma função trigonométrica que forneça y em função de x, cujo gráfico passe por todos os pontos definidos pelas duas tabelas anteriores. Em seguida, use essa função para prever o horário do por do sol quando $x = \frac{\pi}{4}$. Adote: $\sqrt{6} = 2,4$ e $\sqrt{2} = 1,4$

54) (Unesp-13) Sabendo-se que $\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, para quais valores de x a função $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}.\cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \le x \le 2\pi$?

55) (EsPCEx-94) O valor da expressão: $\log_a \text{tg } 1^\circ.\text{tg } 2^\circ \ldots \text{tg } 88^\circ.\text{tg } 89^\circ$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$, é:

a) 0 b) a c) $\ln a$ d) 1

56) (EsPCEx-95) Quanto à função f: $\Re \to \Re$ dada por $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, pode-se afirmar que:

a) tem período π e valor máximo 2
b) tem período 2π e valor máximo 2
c) tem período 4π e valor máximo 2
d) tem período π e valor máximo $\sqrt{2}$
e) tem período 2π e valor máximo $\sqrt{2}$

57) (EsPCEx-98) Dada a função $f(x) = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen} x}$ e o intervalo $I = [0,2\pi]$, pode-se afirmar que:

a) f é definida para todo $x \in I$ e a imagem de f em I é [0,2]

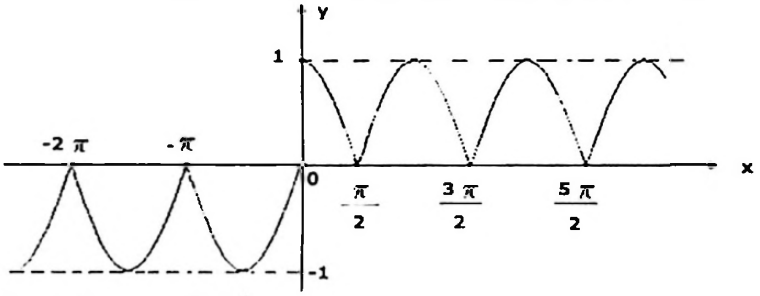
b) f é definida para todo $x \in I \mid x \neq \dfrac{3\pi}{2}$ e a imagem de f em I é [0,2[

c) f não é definida para x = -1 e a imagem de f em I é]-1, 1[

d) f não é definida para $x = \dfrac{\pi}{2}$ e a imagem de f em I é [0, 2[

e) f não é definida para $x = \dfrac{3\pi}{2}$ e a imagem de f em I é [0, 1[

58) (EsPCEx-11) A função real f(x) está representada no gráfico abaixo.



A expressão algébrica de f(x) é:

a) $f(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -|\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\operatorname{sen} x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, & \text{se } x < 0 \\ \cos x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

59) (EsPCEx-14) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\cos\left(\left(\dfrac{t-2}{6}\right)\pi\right)+5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

[A] o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

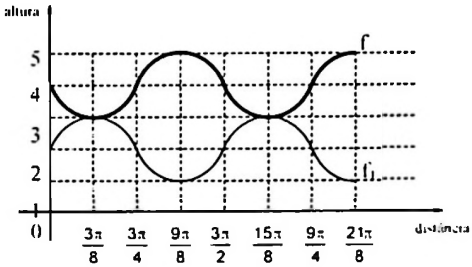
[B] a população atinge seu máximo em t=6.

[C] o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

[D] a população média anual é de 6.000 animais.

[E] a população atinge seu mínimo em t=4 com 6.000 animais.

60) (AFA-02) Em uma apresentação da esquadrilha da fumaça, dois pilotos fizeram manobras em momentos diferentes deixando rastros de fumaça, conforme mostra a figura abaixo.



As funções f_1 e f_2 que correspondem às manobras executadas pelos pilotos são

a) $f_1(x) = 2 - \text{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)$ e $f_2(x) = 4 - \text{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)$

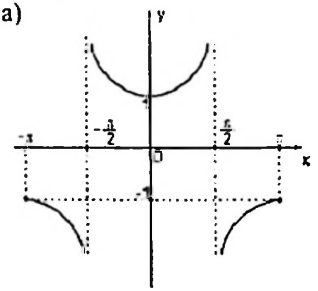
b) $f_1(x) = 2 + \text{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)$ e $f_2(x) = 4 - \text{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)$

c) $f_1(x) = 4 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}x\right)$ e $f_2(x) = 2 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}x\right)$

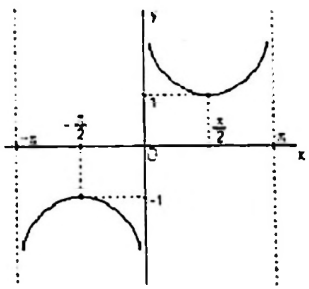
d) $f_1(x) = 1 + \text{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)$ e $f_2(x) = 1 - 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}x\right)$

61) (AFA-04) Seja f: D → IR, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \text{sen}\, x} + \frac{1 + \text{sen}\, x}{\cos x}$. O gráfico que MELHOR representa um período completo da função f é

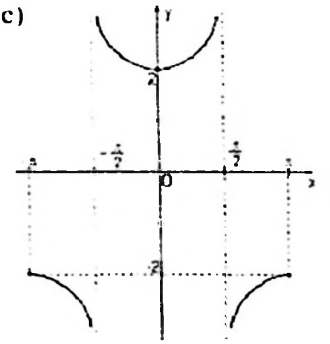
a)



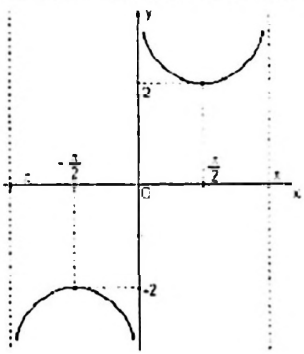
b)



c)



d)



62) (AFA-08) Considere as situações a seguir.

I) Suponha que a passagem de um pingüim, da água para a superfície de uma geleira, possa ser representada como no esquema da Figura 1.

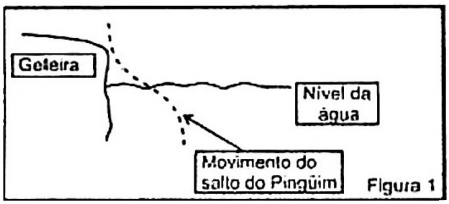


Figura 1

II) Suponha também que uma seqüência de saltos uniformes de uma lebre, possa ser representada como no esquema da Figura 2.

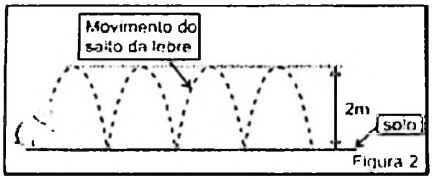


Figura 2

Transportando as situações acima para um plano cartesiano, considere
. o eixo das abscissas coincidindo com o nível da água gelada para o pingüim;
. o eixo das abscissas coincidindo com o solo para a lebre;
. a altura do salto do pingüim e da lebre indicada no eixo das ordenadas.

Tendo por base as situações apresentadas, nas figuras 1 e 2 e ainda a teoria dos gráficos das funções trigonométricas, pode-se relacionar aos saltos um tipo de gráfico dessas funções. Assim sendo, as funções P e L estabelecem os saltos do Pingüim e da Lebre, respectivamente.

A opção que contém funções que podem representar a situação descrita, sabendo-se que a função P está restrita a um único período, é

a) $P(x) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ e $L(x) = 2|\operatorname{sen} x|$

b) $P(x) = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ e $L(x) = 2\operatorname{sen}|x|$

c) $P(x) = \operatorname{tg}(x)$ e $L(x) = 2|\operatorname{sen} 2x|$

d) $P(x) = -2\operatorname{tg}(x)$ e $L(x) = |\operatorname{sen} 2x|$

63) (AFA-10) Sobre a função real f definida por $f(x) = -1 + |6.\operatorname{sen} x.\cos x|$, é **INCORRETO** afirmar que

a) $\operatorname{Im}(f) = [-1,2]$

b) é decrescente para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

c) possui 8 raízes no intervalo $[0, 2\pi]$

d) tem período igual ao período da função real g dada por $g(x) = 2f(x)$

64) (AFA-11) O período da função real f definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π b) π c) $\pi/4$ d) $\pi/2$

65) (AFA-12) Considere A o conjunto mais amplo possível na função real f: A → IR, dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$. Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A = \left\{x \in IR / x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) é periódica com período igual a π

c) é decrescente se $x \in \left\{x \in IR / \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) é ímpar.

66) (AFA-13) Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo

$$f(x) = 3.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.

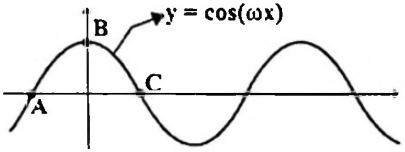
a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.

b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

67) (AFA-14) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = \left|\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\right|$ e $g(x) = 2$, cada uma definida no seu domínio mais amplo possível. Analise as afirmações abaixo.
I) O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$ contém infinitos elementos.
II) No intervalo $[3\pi/4, 5\pi/4]$, a função f é crescente.
III) O período da função f é $p = \pi$
Sobre as afirmações é correto afirmar que
a) apenas III é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) todas são falsas.
d) apenas II e III são verdadeiras.

68) (Ciaba-17) Dado $f(x) = x + a$, $f(g(x)) = \frac{\operatorname{sen} x + a^2 + a}{a+1}$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$. Determine o valor de a.
(a) a = 0 (b) a = 1 (c) a = 2 (d) a = 3 (e) a = 4

69) (Escola Naval-02) Sejam A, B e C os pontos de interseção da curva $y = k.\cos(\omega x)$ com os eixos coordenados conforme a figura abaixo, onde k e são constantes reais. Sabendo que o triângulo de vértices A, B e C tem 3π unidades de área e que $k + \omega - 14 = 0$, o valor de $(k - \omega)$ é:



a) −14 b) −10 c) 10 d) 12

70) (ITA-76) A respeito do produto
$$P = (\operatorname{sen}(bx) + \operatorname{cossec}(bx))(\cos(bx) + \sec(bx))(\operatorname{tg}(bx) + \cot(bx))$$
podemos afirmar que:
a) P é positivo, para todo x real e $b > 0$.
b) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e m em IR.
c) P é negativo para $x = k\pi$ e $b < 0$ ou P é positivo para $x = k\pi$ e $b > 0$, quando $k = 1, 2, ...$
d) P é positivo, quando $bx \neq k\pi/2$, para todo $k \in Z$.
e) nda

71) (ITA-77) Seja $D = \{ x \in R / x \neq \log \frac{n\pi}{2}, \ n = 1, 2, 3, ...\}$. Com respeito à função $f: D \to IR$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que:

a) $f'(x) = 2$ para todo x em D
b) $f'(x) = 3$ para todo x em D
c) $f(x) = e^3$ para todo x em D
d) $f(x)$ não é constante em D
e) n.d.a.

72) (ITA-80) Sobre a função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, podemos afirmar que:
a) é uma função periódica de período 4π.
b) é uma função periódica de período 2π.
c) é uma função periódica de período π.
d) é uma função periódica onde o período pertence ao intervalo $(\pi, 2\pi)$.
e) não é uma função periódica.

73) (ITA-80) Seja $f(t) = 4 + 3\cos(\pi t) + 4\operatorname{sen}(\pi t)$ a função definida em R. Sobre esta função qual das alternativas abaixo é correta?
a) f(t) é função par
b) f(t) é função ímpar
c) o maior valor que f(t) assume é 9
d) o menor valor que f(t) assume é -3
e) o menor valor que f(t) assume é -1/2

74) (ITA-81) Denotemos por $\Re$ o conjunto dos números reais. Seja $g: \Re \to \Re$ uma função não-nula que satisfaz, para todo x e y reais, a relação $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Se $f: \Re \to \Re$ for definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left[\frac{2g(x)}{a}\right]$, $a \neq 0$,

então podemos garantir que:
a) f é periódica com período πa.
b) Para $a = n$ (n natural), temos $f(n) = 2\operatorname{sen}[g(1)]$.
c) Se $g(1) \neq 0$, então $g(1) = f(0)$.
d) Se $g(T) = \pi a$, então T é período de f.
e) Se $g(T) = 2\pi$, então T é período de f.

75) (ITA-82) A função $f:[0, \pi/4] \to [0,1]$ definida por $f(x) = \left(1 + \operatorname{tgx}.\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\cos x$ é uma função:
a) constante
b) sobrejetora e ímpar
c) injetora e ímpar
d) injetora e par
e) sobrejetora e par

76) (IME-11) Seja $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\sqrt[3]{x} + 4$, onde a e b são números reais diferentes de zero. Sabendo que $f(\log_{10}(\log_3 10)) = 5$, o valor de $f(\log_{10}(\log_{10} 10)) = 5$ é:
a) 5 b) 3 c) 0 d) -3 e) - 5

77) (IME-15) A função f: IR→IR é definida por:

$$f(x) = \ln\frac{8 + 3\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x}{8 - 4\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x\cos x}.$$

Marque a opção verdadeira:
(A) f não tem raízes reais (B) f é uma função ímpar
(C) f é uma função par (D) $|f(x)| \leq 1$
(E) f é sobrejetora

Exercícios Gerais

78) Prove que $\text{sen}(\cos x) < \cos(\text{sen}\,x)$ para $0 \leq x \leq \pi/2$.

79) Seja I o intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Determine a função f definida no intervalo [– 1, 1] tal que $f(\text{sen}\,2x) = \text{sen}\,x + \cos x$ e simplifique $f(\text{tg}^2 x)$ para x no intervalo I.

80) As funções sen x e cos x são periódicas de período 2π. Qual o período da função $f(x) = \cos(\text{sen}(x))$?

81) Qual a imagem da função f:IR→IR dada por $f(x) = 3 + 5.\cos x + 3.\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$?

82) Demonstre, usando argumentos trigonométricos, que a função f(x) definida por $f(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$ é periódica.

83) Determine o período mínimo da função $f(x) = \text{sen}\,2016x + \text{sen}\,2018x$.

84) Determine todos os valores de x de modo que a função $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ assume seu valor máximo.

85) Determine o período da função $f(x) = \text{sen}^2(ax + b)$.

86) Determine a imagem da função $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

87) Determine o período da função $f(x) = \cos(x + \operatorname{sen} x)$.

88) Determine o período da função $f(x) = 2.\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$.

89) Determine o período da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.

90) Determine o período da função $f(x) = 4.\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$.

91) Determine o período da função $f(x) = |\operatorname{sen} x| + |\cos x|$.

92) Determine o período da função $f(x) = 2.\operatorname{sen}\left(4\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + 3.\cos(5\pi x)$.

93) Determine o período da função $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}x + \cos\frac{\pi}{3}x + 2.\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}x$.

94) Determine o período da função

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi.262x) + \operatorname{sen}(2\pi.330x) + \operatorname{sen}(2\pi.392x).$$

95) Determine o período da função $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{8x}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{16x}{9}\right)$.

96) Determine o período da função $f(x) = \operatorname{sen}\frac{20x}{7} + \operatorname{sen}\frac{30x}{14}$.

97) Analise se as seguintes funções são periódicas:

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2^x$.

b) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$.

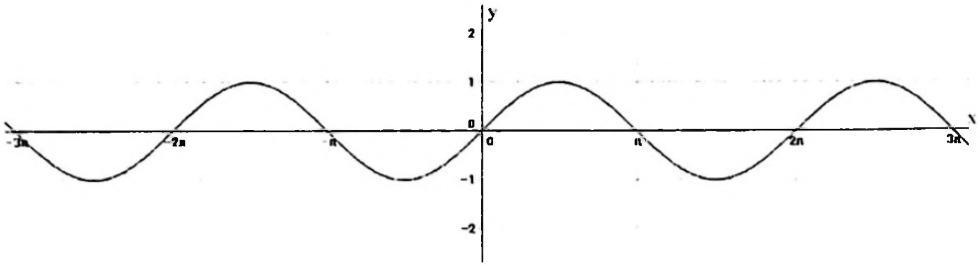
c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$.

d) $f(x) = \cos(x) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Funções Trigonométricas Inversas

6.1. FUNÇÃO ARCO SENO

O gráfico da função seno está representado abaixo:



Como foi analisado no capítulo sobre funções trigonométricas, definindo domínio e contra domínio da função seno na forma f: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, conclui-se que $f(x) = \text{sen } x$ é sobrejetora, porém não é injetora. Neste caso, como a função não é bijetora, $f(x) = \text{sen } x$ não possui inversa.

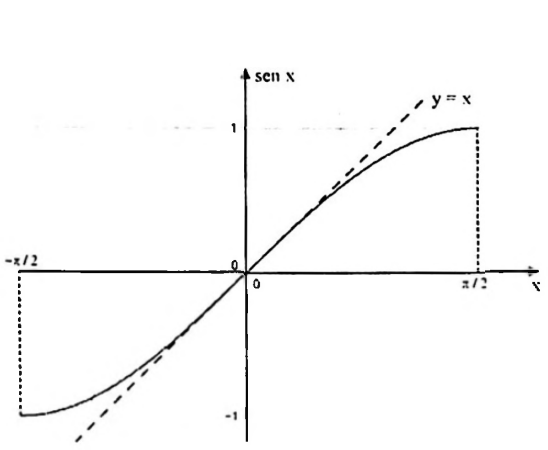
Para que a função seno seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo em que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente. O domínio mais simples em que isso ocorre é para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Desta forma, definindo a função como f: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, segue que $f(x) = \text{sen } x$ é injetora e sobrejetora, implicando que possua inversa.

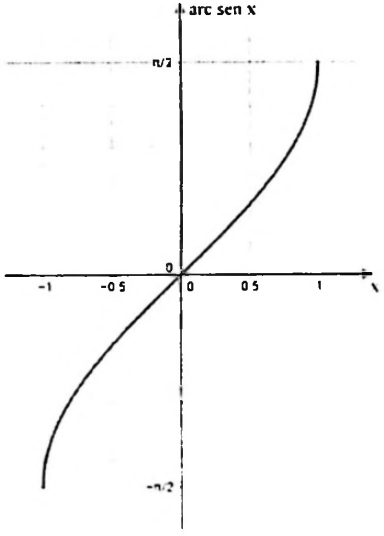
A função f^{-1} é denominada de função ***arco seno***, possuindo domínio $[-1, 1]$ e contra domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim, a função arco seno associa a cada x do domínio de f^{-1}, ou seja, a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que y é um arco cujo seno é x. Simbolicamente indica-se que **y = arc sen x**. Em termos matemáticos:

$$\textbf{sen } y = x \iff y = \textbf{arc sen } x, \text{ com } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Por exemplo, como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ então $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Note, porém, que por mais que $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, **NÃO** se pode afirmar que $\frac{7\pi}{6}$ é igual ao arco seno de $-\frac{1}{2}$, pois $\frac{7\pi}{6}$ não pertence ao contra domínio de arco seno, que é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Dentro deste contra domínio, o arco que possui seno $-\frac{1}{2}$ é $-\frac{\pi}{6}$, fazendo com que $-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

O gráfico da função arco seno pode ser obtido a partir do gráfico da função seno, uma vez que ambos os gráficos são simétricos em relação à reta y = x.



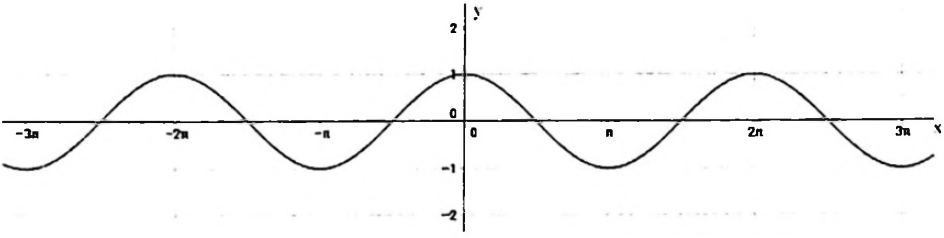


Observando o gráfico da função arco seno, verifica-se que esta função é estritamente crescente em todo o seu domínio. Verifica-se também que a função arco seno é injetora e sobrejetora.

Além disso, é conhecido o fato que a função seno é uma função ímpar, ou seja, se y = sen x então – y = sen (– x) , fazendo com que a função arco seno também seja ímpar, uma vez que **arc sen (– x) = – arc sen x**, para $x \in [-1, 1]$.

6.2. FUNÇÃO ARCO COSSENO

O gráfico da função cosseno está representado abaixo:



Como foi analisado no capítulo sobre funções trigonométricas, definindo domínio e contra domínio da função cosseno na forma f: IR→[– 1, 1], conclui-se ue f(x) = cos x é sobrejetora, porém não é injetora.

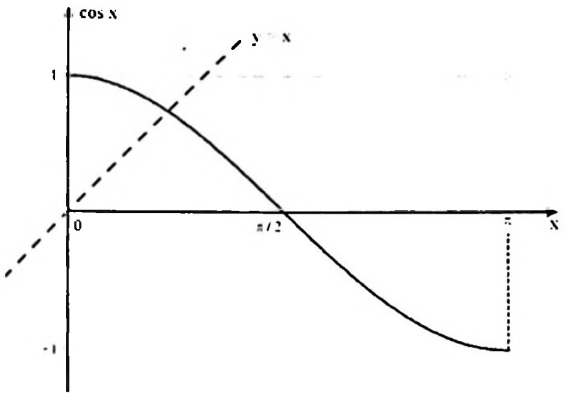
Para que a função cosseno seja injetora, é necessário restringir o domínio para .m intervalo em que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente. O domínio mais simples em que isso ocorre é para x ∈ [0, π]. Desta forma, definindo a função como f: [0, π]→[– 1, 1], segue que f(x) = cos x é injetora e sobrejetora, implicando que possua inversa.

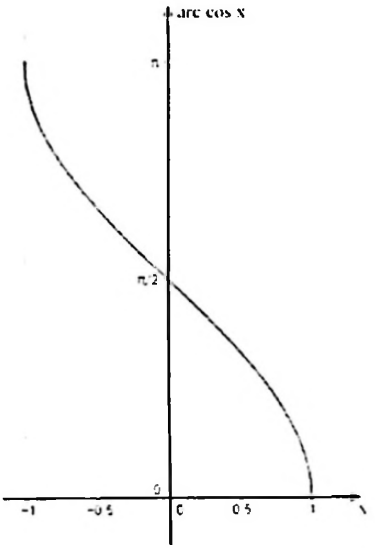
A função f^{-1} é denominada de função ***arco cosseno***, possuindo domínio [– 1, 1] e contra domínio [0, π]. Assim, a função arco cosseno associa a cada x do domínio de f^{-1}, ou seja, a cada x ∈ [– 1, 1] um y ∈ [0, π] tal que y é um arco cujo cosseno é x. Simbolicamente indica-se que **y = arc cos x**. Em termos matemáticos:

$$\cos y = x \iff y = \text{arc cos } x, \text{ com } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [0, \pi]$$

Por exemplo, como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ então $\frac{\pi}{3} = \text{arc sen}\frac{1}{2}$. Note, porém, que por mais que $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, **NÃO** se pode afirmar que $\frac{5\pi}{4}$ é igual ao arco cosseno de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\frac{5\pi}{4}$ não pertence ao contra domínio de arco cosseno, que é [0, π]. Dentro deste contra domínio, o arco que possui cosseno $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $-\frac{3\pi}{4}$, fazendo com que $-\frac{3\pi}{4} = \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

O gráfico da função arco cosseno pode ser obtido a partir do gráfico da função cosseno, uma vez que ambos os gráficos são simétricos em relação à reta y = x.



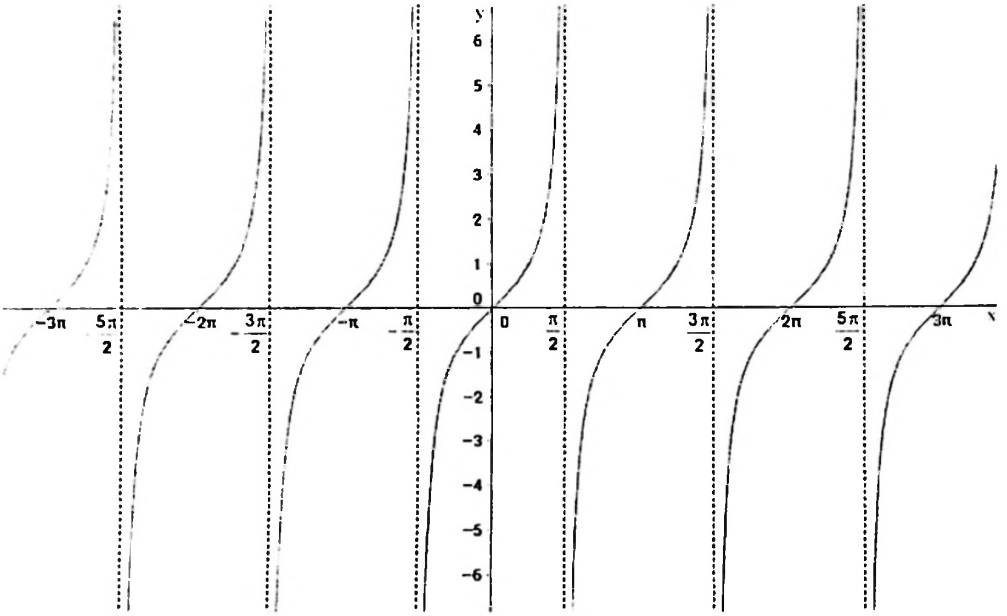


Observando o gráfico da função arco cosseno, verifica-se que esta função é estritamente decrescente em todo o seu domínio. Verifica-se também que a função arco cosseno é injetora e sobrejetora.

Ao contrário da função arco seno, que é sabidamente uma função ímpar, não é possível classificar a função arco cosseno quanto à sua paridade. Por exemplo, sendo $f(x) = \arccos x$, verifica-se que $f(1) = 0$ e $f(-1) = \pi$, onde $f(1) \neq \pm f(-1)$. Deste modo, a função arco cosseno não é par nem ímpar.

6.3. FUNÇÃO ARCO TANGENTE

O gráfico da função tangente está representado abaixo:



Como foi analisado no capítulo sobre funções trigonométricas, definindo domínio e contra domínio da função tangente na forma f: $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \rightarrow \mathbb{R}$, conclui-se que f(x) = tg x é sobrejetora, porém não é injetora. Neste caso, como a função não é bijetora, f(x) = tg x não possui inversa.

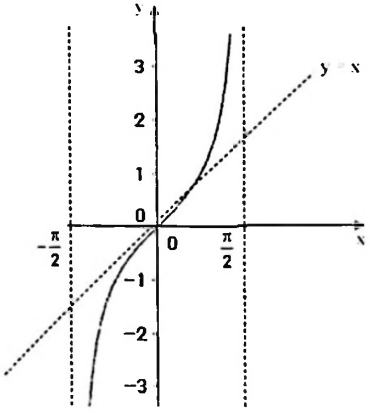
Para que a função tangente seja injetora, é necessário restringir o domínio para um intervalo em que a função é estritamente crescente ou estritamente decrescente. O domínio mais simples em que isso ocorre é para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Desta forma, definindo a função como f: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$, segue que f(x) = tg x é injetora e sobrejetora, implicando que possua inversa.

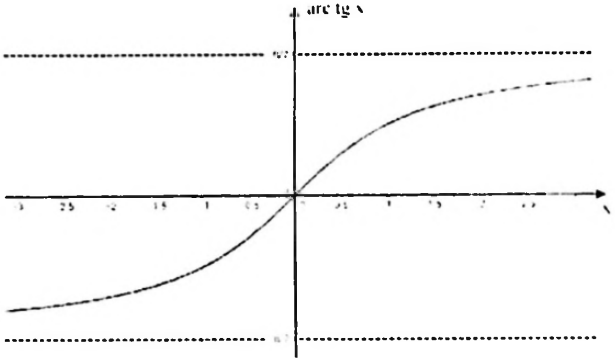
A função f^{-1} é denominada de função ***arco tangente***, possuindo domínio IR e contra domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Assim, a função arco tangente associa a cada x do domínio de f^{-1}, ou seja, a cada $x \in IR$, um $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que y é um arco cuja tangente é x. Simbolicamente indica-se que $y = \text{arc tg } x$. Em termos matemáticos:

$$\text{tg } y = x \Leftrightarrow y = \text{arc tg } x, \text{ com } x \in IR \text{ e } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Por exemplo, como $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ então $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg } 1$. Note, porém, que por mais que $\text{tg}\frac{7\pi}{4} = -1$, **NÃO** se pode afirmar que $\frac{7\pi}{4}$ é igual ao arco tangente de – 1, pois $\frac{7\pi}{4}$ não pertence ao contra domínio de arco tangente, que é $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dentro deste contra domínio, o arco que possui tangente – 1 é $-\frac{\pi}{4}$, ou seja, $-\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}(-1)$.

O gráfico da função arco tangente pode ser obtido a partir do gráfico da função tangente, uma vez que ambos são simétricos em relação à reta y = x.





Observando o gráfico da função arco tangente, conclui-se que arc tg x é:

i) estritamente crescente;

ii) injetora e sobrejetora;

iii) ímpar, ou seja, **arc tg (– x) = – arc tg x**, para $x \in IR$.

6.4. FUNÇÃO ARCO COTANGENTE

A apresentação sobre função arco cotangente será feita de forma mais direta, uma vez que é bastantes semelhante ao da função arco tangente.

Definindo f: $]0, \pi[\to \mathbb{R}$, segue que $f(x) = \text{cotg } x$ é injetora e sobrejetora, implicando que possua inversa. A função f^{-1} é denominada de função ***arco cotangente***. Assim, a função arco cotangente associa a cada x do domínio de f^{-1}, ou seja, a cada $x \in \mathbb{R}$, um $y \in]0, \pi[$ tal que y é um arco cuja cotangente é x. Simbolicamente indica-se que $y = \text{arc cotg } x$. Em termos matemáticos:

$$\text{cotg } y = x \iff y = \text{arc cotg } x, \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in]0, \pi[$$

Por exemplo, como $\text{cotg}\frac{\pi}{4} = 1$ então $\frac{\pi}{4} = \text{arc cotg } 1$. Note, porém, que por mais que $\text{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, NÃO se pode afirmar que $-\frac{\pi}{4}$ é igual ao arco cotangente de – 1, pois $-\frac{\pi}{4}$ não pertence ao contra domínio de arco cotangente, que é $]0, \pi[$. Dentro deste contra domínio, o arco que possui cotangente – 1 é $\frac{7\pi}{4}$, ou seja, $\frac{7\pi}{4} = \text{arc cotg}(-1)$.

6.5. PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

(1) $\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}$

(2) $\text{arc sen } x = \text{arc cos}\sqrt{1 - x^2} = \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

(3) $\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc tg}\frac{x + y}{1 - xy}$, com $xy < 1$

(4) $\text{arc cos}(-x) = \pi - \text{arc cos } x$

(5) Se $\text{arc tg } x + \text{arc tg } y + \text{arc tg } z = \pi$, então $x + y + z = xyz$

(6) $\text{arc sen}\sqrt{x} + \text{arc sen}\sqrt{1 - x} = \frac{\pi}{2}$

(7) Se $\text{arc sen } x + \text{arc sen } y = \frac{\pi}{2}$ então $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$

Demonstrações:

(1) Seja A = arc sen x, ou seja, sen A = x, para $x \in [-1, 1]$ e $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $\cos A = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, tem-se que:

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \text{arc sen } x + \text{arc cos}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right] = A + \frac{\pi}{2} - A = \frac{\pi}{2}$$

(2) Seja A = arc sen x, ou seja, sen A = x, para $x \in [-1, 1]$ e $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como A pertence ao 1º ou 4º quadrantes, onde o cosseno é positivo, segue que $\cos A = \sqrt{1 - x^2}$, ou seja, $A = \text{arc cos}\sqrt{1 - x^2}$. Deste modo:

$A = \text{arc sen } x = \text{arc cos}\sqrt{1 - x^2}$

Além disso: $\text{tg } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$: $A = \text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sen } x$

(3) Sejam arc tg x = A e arct tg y = B, ou seja, tg A = x e tg B = y.

Assim: $\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A.\text{tg } B} = \frac{x + y}{1 - xy} \Rightarrow A + B = \text{arc tg } \frac{x + y}{1 - xy}$

(4) Se A = arc cos (– x), então cos A = – x. Desde que x = – cos A = cos (π – A), então π – A = arc cos x, implicando que A = π – arc cos (– x)

(5) Sejam A = arc tg x, B = arc tg y e C = arc tg z.

$$A + B = \pi - C \Rightarrow \text{tg}(A + B) = \text{tg}(\pi - C) \Rightarrow \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A.\text{tg } B} = -\text{tg } C \Rightarrow$$

$$\frac{x + y}{1 - xy} = -z \Rightarrow x + y = -z + xyz \Rightarrow x + y + z = xyz$$

(6) Sabe-se que arc sen t + arc cos t = $\frac{\pi}{2}$ e que $\text{arc sen } t = \text{arc cos}\sqrt{1 - t^2}$

Fazendo $t = \sqrt{x}$: arc sen $\sqrt{x}$ + arc cos $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ e $\text{arc sen}\sqrt{x} = \text{arc cos}\sqrt{1 - x}$

Logo: $\text{arc sen}\sqrt{x} + \text{arc sen}\sqrt{1 - x} = \text{arc sen}\sqrt{x} + \text{arc cos}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$

(7) Sejam A = arc sen x e B = arc sen y, ou seja, sen A = x e sen B = y, onde A e B pertencem ao 1º ou 4º quadrantes do ciclo trigonométrico, onde o cosseno é positivo. Assim: $\cos A = \sqrt{1 - \text{sen}^2 A} = \sqrt{1 - x^2}$ e $\cos B = \sqrt{1 - \text{sen}^2 B} = \sqrt{1 - y^2}$.

Como $A + B = \frac{\pi}{2}$, então sen (A + B) = 1 $\Rightarrow$ sen A.cos B + sen B.cos A = 1 $\Rightarrow$

$x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$.

6.6. EQUAÇÕES COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Seja f(x) uma função trigonométrica que envolva apenas operações com funções trigonométricas inversas. Resolver a equação f(x) = 0 significa encontrar todos os números reais r tais que f(r) = 0. O conjunto S onde os elementos são todos os $r \in \mathbb{R}$ tais que f(r) = 0 é denominado de conjunto solução da equação trigonométrica inversa.

Por exemplo, suponha que deseja-se encontrar todos os números x reais tais que $\arccos x + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}$. Sejam $A = \arccos x$ e $B = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$. Neste caso, tem-se que $\cos A = x$ e $\operatorname{sen} B = \frac{x}{2}$. Como B pertence ao 1º ou 4º quadrantes, onde o cosseno é positivo, tem-se que $\cos B = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 B} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

$$A + B = \frac{\pi}{6} \Rightarrow A = \frac{\pi}{6} - B \Rightarrow \cos A = \cos\left(\frac{\pi}{6} - B\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos B + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} B \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \frac{1}{2}\frac{x}{2} \Rightarrow 3x = 2\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \Rightarrow 3x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$$

$x = 1$ ou $x = -1$

Como foi necessário elevar ao quadrado a equação obtida, é obrigatória testar as raízes encontradas na equação original:

i) $x = 1 \Rightarrow \arccos 1 + \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ x = 1 é solução;

ii) $x = -1 \Rightarrow \arccos(-1) + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow$

x = − 1 não é solução;

Assim, o conjunto solução da equação $\arccos x + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}$ é S = {1}.

Exercícios Resolvidos

1) Se $\alpha = 3.\text{arc sen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, então cos 2α é:

a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Solução:

Como o contra domínio da função arco seno é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, segue que $\text{arc sen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Assim, $\alpha = -\pi$, ou seja, cos 2α = cos $(-2\pi) = 1$.

2) O valor da $\text{tg}\left(\text{arc sen}\frac{(2\sqrt{2})}{3}\right)$ é:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Solução: Alternativa D

Seja $A = \text{arc sen}\frac{(2\sqrt{2})}{3}$, ou seja, $\text{sen } A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, onde $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deseja-se calcular o valor de tg A. Como o cos A > 0 para $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, segue que $\cos A = \sqrt{1-\text{sen}^2 A} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$.

Assim: $\text{tg } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

3) Calcule o valor de $y = \text{sen}\left(\text{arc cos}\frac{1}{2} + \text{arc sen}\frac{1}{3}\right)$

Solução:

Sejam A = arc cos 1/2 e B = arc sen 1/3, ou seja, cos A = 1/2 e sen B = 1/3

Como $A \in [0, \pi]$ e $B \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então sen A > 0 e cos B > 0:

$\text{sen } A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos B = \sqrt{1-\text{sen}^2 B} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo: $y = \text{sen}(A+B) = \text{sen } A.\cos B + \text{sen } B.\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}+1}{6}$

4) Se $\text{arc tg}(x+2) + \text{arc tg } x = \frac{3\pi}{4}$, x^2 vale:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Solução:

Sejam $A = \text{arc tg}(x+2)$ e $B = \text{arc tg } x$, fazendo com que $\text{tg } A = x+2$ e $\text{tg } B = x$.

$$A + B = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \text{tg}(A+B) = \text{tg}\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A.\text{tg } B} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{x+2+x}{1-(x+2)x} = -1 \Rightarrow 2x+2 = x^2+2x-1 \Rightarrow x^2 = 3$$

5) Determine o domínio de cada função:

a) $y = \text{arc sen}\left(\sqrt{2x-3}\right)$

b) $y = \text{arc sen}\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)$

Solução:

a) Como o domínio da função arco seno é o intervalo $[-1, 1]$: $-1 \le \sqrt{2x-3} \le 1$.
Como qualquer raiz quadrada é maior ou igual a 0 e a raiz quadrada de um número $k \in [0, 1]$ também pertence ao intervalo $[0, 1]$:

$$0 \le 2x-3 \le 1 \Rightarrow 3 \le 2x \le 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \le x \le 2$$

b) Como o domínio da função arco seno é o intervalo $[-1, 1]$: $-1 \le \frac{1+x^2}{2x} \le 1$

i) $\frac{1+x^2}{2x} \ge -1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{2x} + 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{1+x^2+2x}{2x} \ge 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{x} \ge 0 \Rightarrow$

$x > 0$ ou $x = -1$ (1)

ii) $\frac{1+x^2}{2x} \le 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{2x} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-2x}{2x} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \le 0 \Rightarrow$

$x < 0$ ou $x = 1$ (2)

Fazendo a interseção da solução (1) com a (2) segue que $S = \{-1, 1\}$.

6) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\sec\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{1+e^x}-\operatorname{arctg}(1-e^x)\right]=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Então:

a) $S=\varnothing$ b) $S=R$ c) $S\subset[1,2]$ d) $S\subset[-1,1]$ e) $S=[-1,2[$

Solução: Alternativa D

i) $A=\operatorname{arc\,tg}\,1/(1+e^x)$ $B=\operatorname{arc\,tg}\,(1-e^x)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}A=1/(1+e^x)$ $\operatorname{tg}B=1-e^x$

ii) $\sec^2(A-B)=5/4$ $\Rightarrow$ $1+\operatorname{tg}^2(A-B)=5/4$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}^2(A-B)=1/4$

iii) $\operatorname{tg}(A-B)=1/2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{1+\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B}=\pm\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\dfrac{1}{1+e^x}-(1-e^x)}{1+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}=\pm\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1-1+e^{2x}}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad e^{2x}=\pm 1\quad\Rightarrow\quad x=0$$

7) (ITA-03) Encontre todos os valores de $a\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x, $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1+\dfrac{e^x}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1-\dfrac{e^x}{2}\right)=a$, admite soluções.

Solução:

Sejam $\alpha=\sqrt{2}-1+\dfrac{e^x}{2}$ e $\beta=\sqrt{2}-1-\dfrac{e^x}{2}$.

Como $\alpha+\beta=a$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}a$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}a$ $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}+\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}}{1-\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{e^{2x}}{4}\right]}=\operatorname{tg}a\quad\Rightarrow\quad\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)+\frac{e^{2x}}{4}}=\operatorname{tg}a\quad\Rightarrow$$

$$2(\sqrt{2}-1)=2(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}a+\frac{e^{2x}}{4}.\operatorname{tg}a\quad\Rightarrow\quad\frac{e^{2x}}{4}.\operatorname{tg}a=2(\sqrt{2}-1)(1-\operatorname{tg}a)\quad\Rightarrow$$

$$e^{2x}=8(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}a}-1\right)$$

Como $e^{2x}>0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\operatorname{tg}a}>1$ $\Rightarrow$ $0<\operatorname{tg}a<1$ $\Rightarrow$ $0<a<\dfrac{\pi}{4}$

8) (ITA-04) Considerando as funções arc sen: $[-1,+1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e arc cos: $[-1, +1] \to [0, \pi]$, assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

Solução: Alternativa B

Seja $\text{sen } x = \frac{3}{5}$ com $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$.

Analogamente, $\cos y = \frac{4}{5}$ com $y \in [0,\pi] \Rightarrow \text{sen } y = \frac{3}{5}$

Assim, $\cos(\text{arc sen}\frac{3}{5} + \text{arc cos}\frac{4}{5}) = \cos(x + y) = \cos x.\cos y - \text{sen } x.\text{sen } y \Rightarrow$

$\cos(\text{arc sen}\frac{3}{5} + \text{arc cos}\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{25}$

9) (ITA-10) A equação em x,

$$\text{arc tg}\,(e^x + 2) - \text{arc cotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right) = \frac{\pi}{4}, x \in R \setminus \{0\}$$

a) admite infinitas soluções, todas positivas.
b) admite uma única solução, e esta é positiva.
c) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$
d) admite apenas soluções negativas.
e) não admite solução.

Solução: Alternativa B

A equação dada é idêntica a: $\text{arc tg}\,(e^x + 2) - \text{arc tg}\,\frac{\left(e^{2x}-1\right)}{e^x} = \frac{\pi}{4}$

Logo: $\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta} = 1 \Rightarrow \frac{\left(e^x + 2\right) - \frac{\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}}{1 + \left(e^x + 2\right)\frac{\left(e^{2x}-1\right)}{e^x}} = 1$

Chamando $e^x = y > 0$, tem-se: $\frac{(y+2) - \frac{\left(y^2-1\right)}{y}}{1 + \frac{(y+2)\left(y^2-1\right)}{y}} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{y^2+2y-y^2+1}{y+(y+2)(y^2-1)}=1 \Rightarrow y^3+2y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2+y-3)=0 \Rightarrow$$

$y_1=-1$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ e $y_3=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<0$

Como $y>0$, a única solução será $y=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\cong 1{,}3 \Rightarrow e^x=1{,}3 \Rightarrow x>0$

10) (IME-14) Seja $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real definida por $f(x)=x^2-\pi x$. Sejam também a, b, c e d números reais tais que: $a=\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, $b=\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$, $c=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ e $d=\text{cotg}^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$. A relação de ordem, no conjunto dos reais, entre as imagens f(a), f(b), f(c) e f(d) é

a) f(b) > f(a) > f(d) > f(c) b) f(d) > f(a) > f(c) > f(d) c) f(d) > f(a) > f(b) > f(c)
d) f(a) > f(d) > f(b) > f(c) e) f(a) > f(b) > f(d) > f(c)

Solução: Alternativa D

Observe que $f(x)=x^2-\pi x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2-\frac{\pi^2}{4}$. Como $\frac{\pi^2}{4}$ é constante, quando maior o valor de $\left|\frac{\pi}{2}-x\right|$, maior será o valor de f(x). Note que $a\in 1^o\,Q$, $b\in 1^o\,Q$, $c\in 2^o\,Q$ e $d\in 2^o\,Q$. Como a função tg x é crescente para $0\le x\le \pi/2$ e $\left|\frac{\pi}{2}-x\right|<\frac{\pi}{2}$ para x = a, b, c e d, a relação de ordem de f(x) coincide com a relação de ordem de $\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$.

$$a=\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \text{sen}\,a=\frac{1}{3} \Rightarrow \cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{cotg}\,a=2\sqrt{2}$$

$$b=\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow \text{tg}\,b=\frac{5}{4} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\text{cotg}\,b=\frac{4}{5}$$

$$c=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \cos c=-\frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}\,c=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\text{cotg}\,c=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d=\text{cotg}^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) \Rightarrow \text{cotg}\,d=-\frac{5}{4} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-d\right)=\text{cotg}\,d=-\frac{5}{4}$$

Comparando os módulos dos valores calculados conclui-se que

$$\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\right|>\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-d\right)\right|>\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right|>\left|\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-c\right)\right| \Rightarrow f(a)>f(d)>f(b)>f(c)$$

11) Resolva a equação: arc sen x = 2.arc tg x.

Solução:

Seja A = arc tg x $\Rightarrow$ tg A = x $\Rightarrow$ $tg^2 A = x^2$ $\Rightarrow$ $\sec^2 A - 1 = x^2$ $\Rightarrow$

$\sec^2 A = x^2 + 1$ $\Rightarrow$ $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e $\operatorname{sen} A = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

arc sen x = 2.arc tg x $\Rightarrow$ sen (arc sen x) = sen (2.arc tg x) $\Rightarrow$

$x = \operatorname{sen} 2A = 2.\operatorname{sen} A.\cos A = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\Rightarrow$ $x\sqrt{x^2+1} = x$ $\Rightarrow$ $x(\sqrt{x^2+1} - 1) = 0$

i) x = 0 é raiz;

ii) $\sqrt{x^2+1} = 1$ $\Rightarrow$ x = – 1 ou x = 1 são raízes

Assim: S = {– 1, 0, 1}

12) (Olimpíada J. I. R. MacKnight-79) Resolva:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{23}{36}\right).$$

Solução:

$$\underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{A} + \underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)}_{B} = \underbrace{\text{arc tg}\left(\frac{23}{36}\right)}_{C} \Rightarrow B = C - A \Rightarrow$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{tg } C - \text{tg } A}{1 + \text{tg } C.\text{tg } A} \Rightarrow \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{\dfrac{23}{36} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1 + \dfrac{23}{36}\dfrac{x-1}{x+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{\dfrac{23(x+1) - 36(x-1)}{\cancel{36(x+1)}}}{\dfrac{36(x+1) + 23(x-1)}{\cancel{36(x+1)}}} = \frac{23x + 23 - 36x + 36}{36x + 36 + 23x - 23} = \frac{59 - 13x}{13 + 59x} \Rightarrow$$

$(2x - 1)(13 + 59x) = (2x + 1)(59 - 13x)$ $\Rightarrow$

$118x^2 + 33x - 13 = -26x^2 - 105x + 59$ $\Rightarrow$ $144x^2 - 72x + 18 = 0$ $\Rightarrow$

$8x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ não existe x real que satisfaça a equação.

1) (UEPB-12) Dado que $y = \cos\left(\text{arc sen}\,\frac{2}{3}\right)$, temos que

a) y = 3 b) y = 4/3 c) y = 1/9 d) y = 3/2 e) y = 1/3

2) (Mack-79) A equação $\text{arc sen}\sqrt{x} + \text{arc cos}\sqrt{x} = \pi/2$ tem:
a) somente uma solução b) somente duas soluções
c) somente três soluções d) somente quatro soluções
e) infinitas soluções

3) (Mack-82) O conjunto imagem da funções definida por y = cos (arc tg x) é:
a)]– 1, 0[b)]0, 1] c) [0, 1[d)]0, 1[e) [0, 1]

4) (UFF-10) Nos itens abaixo, arc cos denota a função inversa da função cosseno restrita ao intervalo [0, π] e arc tg denota a função inversa da função tangente restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Calcule $\text{arccos}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$.

b) Calcule sen(arc tg(- 1)).

c) Verifique que $\text{sen}(\text{arc cos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

5) (Escola Naval-90) O cos (2arc sen 1/3) é igual a :
a) 5/9 b) $4\sqrt{2}/9$ c) 2/3 d) 7/9 e) 8/9

6) (Escola Naval-98) Seja x = arc cos3/5, $x \in [0, \pi]$. Então sen 2x é igual a:
a) 24/25 b) 4/5 c) 16/25 d) 6/5 e) 2/5

7) (Escola Naval-13) Considerando a função f(x) = cos x, $0 \le x \le \pi$, é inversível, o valor de $\text{tg}\left(\text{arc cos}\,\frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ b) $-\frac{4}{25}$ c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

8) (Unifei-10) Mostre que $2.\text{arc tg}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{arc tg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

9) (Ciaba-09) Considerando-se a função clássica f(x) = arc sen x e a sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de fog e gof são
a) iguais.
b) diferentes, mas o de fog está contido no de gof.
c) diferentes, mas o de gof está contido no de fog.
d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
e) diferentes e de intersecção vazia.

10) (Ciaba-12) O gráfico da função $f(x)=\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)-\frac{\pi}{5}\right]\left[-x-\frac{\pi}{7}\right]$ intercepta o eixo x nos pontos de coordenadas:

a) $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{5},0\right)$ b) $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5},0\right)$

c) $\left(\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5},0\right)$ d) $\left(0,-\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$

e) $\left(0,\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,-\frac{\pi}{5}\right)$

11) (AFA-99) O valor real que satisfaz a equação arc sen x + arc sen 2x = $\frac{\pi}{2}$, para x pertencente ao intervalo (0, 1), é

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12) (AFA-02) Analise as alternativas seguintes e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

I - O período e o conjunto-imagem da função f: IR → IR definida por $f(x)=\frac{1}{4}.\operatorname{sen} x.\cos x$ são, respectivamente, 2π e $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

II - A função y = 2 arc cos 4x tem por domínio o conjunto de todos os valores de x pertencentes a $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

III - Para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, o valor de $(\operatorname{tg}^2 x + 1).(\operatorname{sen}^2 x - 1)$ é −1

A opção que corresponde à classificação acima é
a) F – V – F b) V – V – F
c) F – F – V d) V – F – V

13) (Escola Naval-87) cotg (arc cotg 2 + 5π/6) =

a) $-8-5\sqrt{3}$ b) $\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$ c) $8-5\sqrt{3}$ d) $2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $2-\sqrt{3}$

14) (Escola Naval-99) Considere a expressão M = sen (2y + x) onde x, u ∈ [0, π], o valor de M para $y = \text{arc cos}\frac{3}{\sqrt{13}}$ e $x = \text{arc tg}\frac{\sqrt{12}}{2}$ é de:

a) $\frac{6+\sqrt{13}}{13}$ b) $\frac{10+2\sqrt{3}}{13}$ c) $\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$ d) $\frac{8+\sqrt{3}}{26}$ e) $\frac{16+3\sqrt{3}}{26}$

15) (Escola Naval-12) Qual o valor da expressão $\sqrt{\text{cossec}^2\,\pi x + \text{cotg}\frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\text{arc tg}\,x + \text{arc tg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto IR − {1}?

a) $\sqrt{3}$ b) − 1 c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

16) (Escola Naval-14) Sabendo que log x representa o logaritmo de x na base 10, qual é o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{\text{arc cos}^3\left(\log\frac{x}{10}\right)}{\sqrt{4x-x^3}}$.

a)]0, 2[b) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ c)]0, 1] d) [1, 2[e) $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$

17) (ITA-71) A igualdade $\frac{\cos x}{2} = \cos\frac{x}{2}$ é verificada para:

a) Para qualquer valor de x;

b) Para qualquer valor de $x \neq n\pi/2$ onde n = 0, ±1, ±2, ...;

c) Para $x > 2\text{arc cos}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

d) Para nenhum valor de x

e) Para x = 2 arc cos (cos 60° − cos 30°).

18) (ITA-72) Para todo α e β, $|\beta| < 1$, a expressão tg (arc tg α + arc sen β) é igual a:

a) $-\dfrac{\beta+\alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta-\sqrt{1-\beta^2}}$ b) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+\sqrt{1-\beta^2}}$ c) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\sqrt{1-\beta^2}-1}$

d) $\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}(\alpha-\beta)}{\alpha\beta-1}$ e) nda

19) (ITA-72) Seja θ = arc sen b/a, com $|a| > |b|$. Então 2θ vale:

a) 2θ = arc (2sen b/a)
b) 2θ = arc sen $2b/a$
c) 2θ = arc sen $(2a/\sqrt{b^2-a^2})$
d) 2θ = arc sen $(2b/a^2)(\sqrt{a^2-b^2})$
e) nda

20) (ITA-83) A solução da equação *arc tg* x + *arc tg* $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\pi}{4}$ definida no conjunto los reais diferentes de – 1 é:

a) 1 b) 1/2 c) 1/2 e 1 d) 2 e) 2 e 1

21) (ITA-84) Sendo z = cos [arc tg $(a^2 + b^2)$ + arc cotg $(a^2 + b^2)$], podemos afirmar que:

a) z = 0
b) z = 1
c) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
d) $z = \cos(a^2 + b^2)$, se $a^2 + b^2 \leq 1$
e) é impossível determinar o valor de z.

22) (ITA-86) Seja k uma constante real e considere a equação em x $\operatorname{arcsen}\dfrac{1+x^2}{2x} = k$, sendo $x \neq 0$. Então podemos afirmar que:

a) Para cada $k \in \Re$, a equação admite uma única solução.
b) Para cada $k \in \Re$, a equação admite duas soluções.
c) Existe $k \in \Re$ tal que a equação admite uma infinidade de solução.
d) Não existe $k \in \Re$ tal que a equação admita solução.
e) Existe $k \in \Re$ tal que a equação admite uma única solução.

23) (ITA-87) Seja a um número real não nulo, satisfazendo $-1 \leq a \leq 1$. Se dois ângulos agudos em um triângulo são dados por arc sen a e arc sen $1/a$ então o seno trigonométrico do terceiro ângulo desse triângulo é:

a) 1/2 b) 1/3 c) $\sqrt{3}/2$ d) 1 e) $\sqrt{2}/2$

24) (ITA-88) O conjunto imagem da função f: $[0, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = \arccos[(3x - 1)/2]$ é:

a) $\{0, \pi/4, 2\pi/3\}$ b) $[0, \pi]$ c) $[\pi/4, 3\pi/4]$

d) $[0, 2\pi/3]$ e) $[0, \pi/2]$

25) (ITA-91) Se $a \in \Re$ com $a > 0$ e $\text{arc sen}\ \frac{a-1}{a+1}$ está no primeiro quadrante, então o valor de $\text{tg}\left[\text{arc sen}\ \frac{a-1}{a+1} + \text{arc tg}\ \frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$ é:

a) $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$ b) $\frac{a\sqrt{a}}{3a+1}$ c) $\frac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$ d) $\frac{2a}{3a+1}$ e) n.d.a.

26) (ITA-12) Seja $S = \left\{x \in R \,|\, \text{arc sen}\left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}$. Então,

A ( ) $S = \varnothing$. B ( ) $S = \{0\}$. C ( ) $S = R^{*} \setminus \{0\}$.

D ( ) $S = R$. E ( ) $S = R$.

27) (IME-65) Calcular x na equação: $\text{arc sen}\ x + \text{arc sen}\ x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

28) (IME-65) Calcular o menor valor de x positivo, em graus, que satisfaz a igualdade $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$.

29) (IME-66) Calcular: $\text{arc tg}\ \frac{1}{7} + 2.\text{arc tg}\ \frac{1}{3}$.

30) (IME-70) Verifique se $\text{arc sen}\ \sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc tg}\ \sqrt{\frac{1}{m}}$.

31) (IME-71) Determine os valores de x que satisfaçam a equação:

$$\text{arc sen}\ (\sqrt{3}\,x) = \text{arc sen}\ 2x - \text{arc sen}\ x\ .$$

32) (IME-79) Achar os valores de x que satisfazem a equação

$$\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \text{arcsen}(\cos x).$$

33) (IME-80) Determine x na equação $\frac{1}{2}\text{arctgx} = \text{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

34) (IME-90) a) Obtenha a expressão para tg 3α em função de tg $\alpha = x$.

b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação:

$$x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0$$

onde m é um número real dado.

35) (IME-99) Determine θ sabendo-se que:

(i) $\frac{1-\cos^4\theta}{1-\cos^4\theta} \cdot \frac{1+\text{ctg}^2\theta}{1+\text{tg}^2\theta} = \frac{2}{3}$;

(ii) $0 < \theta \leq 2\pi$ radianos

36) (IME-10) O valor da expressão

$$y = \text{sen}\left[\text{arc sen}\left(\frac{1}{a^2-1}\right) + \text{arc cos}\left(\frac{1}{a^2-1}\right)\right],$$

onde a é um número real e $a \in (-1, 0)$, é:

a) -1 b) 0 c) 1/2 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1

37) (IME-11) O valor de x que satisfaz a equação

$$\text{sen (arc cotg (1 + x))} = \text{cos (arc tg (x))}:$$

a) 3/2 b) 1/2 c) 1/4 d) $-1/2$ e) $-3/2$

38) (IME-12) Seja arc sen x + arc sen y + arc sen z = $\frac{3\pi}{2}$, onde x, y e z são números reais pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Determine o valor de

$$x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$$

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Exercícios Gerais

39) Prove que:

a) arc tg x – arc tg y = arc tg $\frac{x-y}{1+xy}$, $xy > -1$

b) $\text{arc tg } x + \text{arc tg } y + \text{arc tg } z = \text{arc tg } \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

c) $\text{arc cotg } x + \text{arc cotg } y = \text{arc cotg } \dfrac{xy-1}{y+x}$

d) $\text{arc cotg } x - \text{arc cotg } y = \text{arc cotg } \dfrac{xy+1}{y-x}$

40) Prove que:

a) $\text{arc tg}\dfrac{1}{2} + \text{arc tg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\text{arc tg}\dfrac{1}{2} + \text{arc tg}\dfrac{1}{5} + \text{arc tg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\text{arc tg}\dfrac{1}{3} + \text{arc tg}\dfrac{1}{5} + \text{arc tg}\dfrac{1}{7} + \text{arc tg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

d) $\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{sx}{yz}} + \text{arc tg}\sqrt{\dfrac{sy}{zx}} + \text{arc tg}\sqrt{\dfrac{sz}{xy}} = \pi$, onde $s = x + y + z$.

e) $\text{arc tg}\dfrac{a-b}{1+ab} + \text{arc tg}\dfrac{b-c}{1+bc} = \text{arc tg } a - \text{arc tg } c$

f) $\text{arc tg}\dfrac{a-b}{1+ab} + \text{arc tg}\dfrac{b-c}{1+bc} + \text{arc tg}\dfrac{c-a}{1+ca} = 0$

g) $\text{arc tg } x + \text{arc cotg}(x+1) = \text{arc tg}(x^2+x+1)$

h) $\text{arc tg } 1 + \text{arc tg } 2 + \text{arc tg } 3 = 2[\text{arc tg } 1 + \text{arc tg } 1/2 + \text{arc tg } 1/3]$

41) Prove que:

a) $2.\text{arc sen } x = \text{arc sen } 2x\sqrt{1-x^2}$

b) $2.\text{arc cos } x = \text{ar cos } (2x^2-1)$

c) $2.\text{arc tg } x = \text{arc tg } \dfrac{2x}{1-x^2}$

d) $2.\text{arc tg } x = \text{arc sen } \dfrac{2x}{1+x^2}$

e) $3.\text{arc sen } x = \text{arc sen } (3x-4x^3)$

f) $3.\text{arc cos } x = \text{arc cos } (4x^3-3x)$

g) $3.\text{arc tg } x = \text{arc tg } \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

42) Prove as igualdades:

a) $2.\text{arc tg}\frac{2}{3}+\text{arc cos}\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$

b) $3.\text{arc sen}\frac{1}{4}+\text{arc cos}\frac{11}{16}=\frac{\pi}{2}$

c) $2.\text{arc tg}\frac{1}{3}+\text{arc tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

d) $\text{arc sen}\frac{4}{5}+\text{arc sen}\frac{5}{13}+\text{arc sen}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

e) $4.\text{arc tg}\frac{1}{5}-\text{arc tg}\frac{1}{70}+\text{arc tg}\frac{1}{99}=\frac{\pi}{4}$

f) $4.\text{arc tg}\frac{1}{5}-\text{arc tg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$

43) Calcule x na igualdade: $\text{arc tg}(7x-1)=\text{arc sec}(2x+1)$

44) Sejam $\alpha=\text{arc sen}\left(\frac{4}{5}\right)$ um arco no segundo quadrante e $\beta=\text{arc tg}\left(\frac{-4}{3}\right)$ um arco no quarto quadrante. Calcule o valor da expressão $25.\cos(\alpha+\beta)$.

45) Demonstre que:

arc sen (1/3) + arc cos (1/3) + arc tg (1/3) + arc cot (1/3) = π

46) Prove que $\text{arc tg}\frac{n}{n+1}+\text{arc tg}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

47) Mostre que $\text{arcsen}\left(\frac{x-3}{3}\right)+2.\text{arccos}\sqrt{\frac{x}{6}}=\frac{\pi}{2}$, $(3\le x\le 6)$.

48) Prove que arc sen [cos (arc sen x)] + arc cos [sen (arc cos x)] = $\frac{\pi}{2}$.

49) Prove que:

a) tg^3 (arc tg 2) + cotg^2 (arc cotg 3) = 17.

b) $\text{sen}^2\left(\text{arc sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos^3\left(\text{arc cos}\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$.

c) sec^2 (arc tg 2) + cotg^2 (arc cotg 3) = 15.

50) Prove que se $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}=\frac{\pi}{2}$ então $x=\sqrt{ab}$.

51) Se $\operatorname{arc\cos}\frac{x}{a}+\operatorname{arc\cos}\frac{y}{b}=\theta$, então prove que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\theta+\frac{y^2}{b^2}=\operatorname{sen}^2\theta$.

52) Prove que $\cos\left(2.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}\right)=\operatorname{sen}\left(4.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$.

53) Prove que $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x\right)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{cotg}x)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{cotg}^3 x)=0$.

54) Calcule o valor de:

a) $\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}-2.\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}\right)$

b) $\operatorname{sen}\left(2.\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}\right)$

c) $\cos\left(3.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$

d) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccos}\frac{1}{3}\right)$

e) $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$

f) cotg (arc tg 2 + arc tg 5)

g) $\operatorname{sen}\left\{2.\operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{3}.\cos\left(2.\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]\right\}$

h) $\operatorname{arc\,sen}\left(\cos\frac{9\pi}{11}\right)+\operatorname{arccos}\left(\operatorname{sen}\frac{12\pi}{11}\right)$

i) $\operatorname{arc\,tg}4+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{9}{2}$

j) $16.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-4.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$

k) arc tg 8 + arc tg 5 + arc tg 2

l) $\cos\left(2.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\operatorname{sen}\left(2.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$

m) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ac}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}$.

55) Demonstre que:

a) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p+q} + \operatorname{arc\,tg}\frac{q}{p^2+pq+1}$

b) $2.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + 2.\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} = \frac{\pi}{4}$

c) $2.\operatorname{arc\,cotg}5 + \operatorname{arc\,cotg}7 + 2.\operatorname{arc\,cotg}8 = \frac{\pi}{4}$

d) $\operatorname{arc\cos}\left(\frac{\cos x + \cos y}{1+\cos x.\cos y}\right) = 2.\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)$

56) Se $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right) = \theta$, prove que $x^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

57) Resolva a equação $3.\operatorname{arc\,sen}\frac{2x}{1+x^2} - 4.\operatorname{arc\cos}\frac{1-x^2}{1+x^2} + 2.\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{3}$.

58) Resolva a equação $\operatorname{arc\,sen} x - 2.\operatorname{arc\cos} x = \frac{\pi}{4}$.

59) Resolva a equação $\operatorname{arc\cos}(x\sqrt{7}) + \operatorname{arc\cos} x = \frac{\pi}{2}$.

60) Resolva a equação $\operatorname{arc\,cotg}(x) - \operatorname{arc\,cot}(x+2) = \frac{\pi}{12}$

61) Resolver a equação $\operatorname{arc\cos}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arc\cos} x + \operatorname{arc\cos}\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

62) Resolver a equação $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} 2x = \operatorname{arc\cos} x$.

63) Resolver a equação $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x = \operatorname{arc\,tg} 7x$.

64) Se $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} 2x + \operatorname{arc\,sen} 3x = \pi/2$, calcule o valor de $\frac{x^3}{7} + \frac{x^2}{6}$.

65) Resolva as seguintes equações:

a) $\text{arc tg } 2x + \text{arc tg } 3x = \frac{\pi}{4}$

b) $\text{arc tg } (x-1) + \text{arc tg } x + \text{arc tg } (x+1) = \text{arc tg } 3x$

c) $\text{arc tg}\frac{1}{1+2x} + \text{arc tg}\frac{1}{4x+1} = \text{arc tg}\frac{2}{x^2}$

d) $\text{arc tg}\frac{1}{4} + 2.\text{arc tg}\frac{1}{5} + \text{arc tg}\frac{1}{6} + \text{arc tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$

66) Determine o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \frac{\text{arc sen } x}{\text{arc cos } x}$.

67) Determine o domínio e o conjunto imagem da função

$f(x) = \text{sen (arc cos } x).\cos(\text{arc sen } x)$.

68) Determine o domínio e o conjunto imagem da função

$f(x) = f(x) = \frac{1}{4}\text{arc cossec}(x^2 - 2x)$.

69) Determine a imagem da função $g(x) = \left|\frac{2}{3}\text{arc sen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6}\right|$.

70) Determine a imagem da função $f(x) = \text{arc sen}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$.

71) Determine a imagem da função $f(x) = \cos(\text{arc tg (sen (arc cot } x)))$.

72) Determine, em função de x, uma expressão para

$f(x) = \text{sen (arc sen } x - \text{arc cos } 2x)$, $-1 < x < 0$.

73) Calcule o valor de $S = \text{arc tg}\frac{1}{2} + \text{arc tg}\frac{3}{4} + \text{arc tg}\frac{6}{7} + \ldots + \text{arc tg}\frac{2n-1}{2n}$.

74) Calcule o valor de

$$S = \text{arc tg}\frac{1}{1+1+1^2} + \text{arc tg}\frac{1}{1+2+2^2} + \text{arc tg}\frac{1}{1+3+3^2} + \ldots + \text{arc tg}\frac{1}{1+n+n^2}$$

Inequações Trigonométricas

7.1. INTRODUÇÃO

Considere f(x) e g(x) duas expressões que envolvem apenas operações com funções trigonométricas. Uma inequação trigonométrica é qualquer expressão do tipo $f(x) > g(x)$ ou $f(x) \geq g(x)$. De modo a simplificar a análise, serão considerados os casos de $>$ ou $<$. Caso o sinal de desigualdade seja $\geq$ ou $\leq$, a análise é idêntica, bastando trocar $>$ por $\geq$ e $<$ por $\leq$.

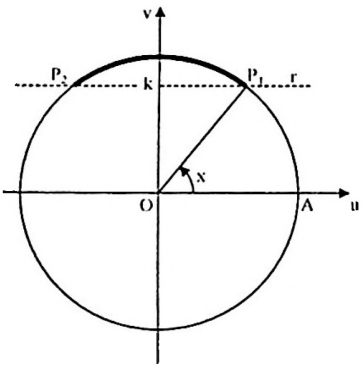
O conjunto solução de uma inequação trigonométrica do tipo $f(x) > g(x)$ é o conjunto dos arcos θ tais que a inequação é satisfeita, ou seja, $f(\theta) > g(\theta)$.

De maneira geral, as inequações trigonométricas são dadas, originalmente, com várias operações com funções trigonométricas que, depois da devida manipulação algébrica, se reduzem a resolver uma das inequações fundamentais (k é um número real):

$$\text{sen } x > k$$
$$\text{sen } x < k$$
$$\cos x > k$$
$$\cos x < k$$
$$\text{tg } x > k$$
$$\text{tg } x < k$$

Devido à importância destas inequações fundamentais, suas soluções serão estudadas nos itens que seguem.

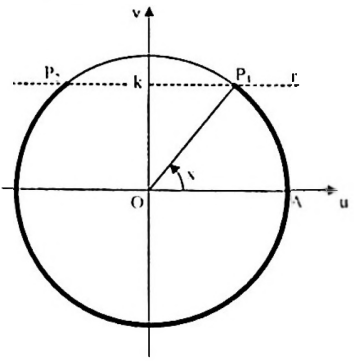
7.2. sen x > k



Marca-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência $\overset{\frown}{P_1P_2}$, sobre o ciclo trigonométrico, que está acima da reta r. Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ são solução da inequação sen x > k. Deste modo, identificando o arco x de modo que x = arc sen k, o conjunto solução da inequação sen x > k é

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \text{arc sen } k + 2k\pi < x < \pi - \text{arc sen } x + 2k\pi\}$$

7.3. sen x < k



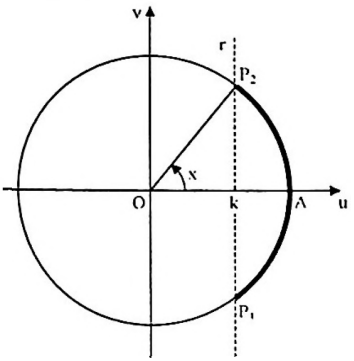
Marca-se no eixo v o ponto de ordenada k. Uma reta horizontal r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência $\overset{\frown}{P_1P_2}$, sobre o ciclo trigonométrico, que está abaixo da reta r. Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ são solução da inequação sen x < k. Deste modo, identificando o arco x de modo que x = arc sen k, o conjunto solução da inequação sen x < k é

$$S = \{x \in IR / 2k\pi \leq x < \text{arcsen}\, k + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi - \text{arcsen}\, k + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, é possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo real:

$$S = \{x \in IR / -\pi - \text{arccos}\, k + 2k\pi < x < \text{arccos}\, x + 2k\pi\}$$

7.4. cos x > k



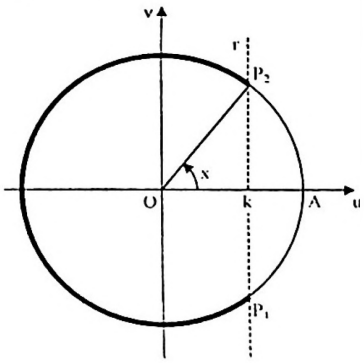
Marca-se no eixo u o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência $\overset{\frown}{P_1P_2}$, sobre o ciclo trigonométrico, que está à direita da reta r. Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ são solução da inequação cos x > k. Deste modo, identificando o arco x de modo que x = arc cos k, o conjunto solução da inequação cos x > k é

$$S = \{x \in IR / 2k\pi \leq x < \text{arccos}\, k + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2\pi - \text{arccos}\, k + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

De maneira equivalente, utilizando arcos negativos, é possível escrever o conjunto solução em apenas um intervalo real:

$$S = \{x \in IR / -\text{arccos}\, k + 2k\pi < x < \text{arccos}\, x + 2k\pi\}$$

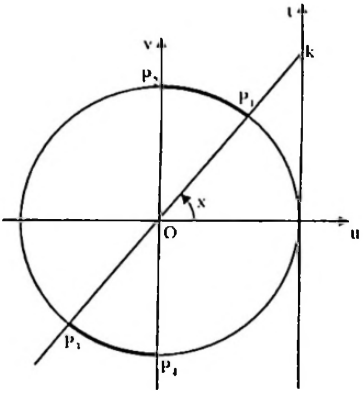
7.5. cos x < k



Marca-se no eixo u o ponto de abscissa k. Uma reta vertical r é traçada passando por este ponto. Esta reta intersecta o ciclo trigonométrico em dois pontos, P_1 e P_2. Considere o arco de circunferência $\overset{\frown}{P_1P_2}$, sobre o ciclo trigonométrico, que está à esquerda da reta r. Todos os arcos do ciclo trigonométrico que pertencem a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ são solução da inequação cos x < k. Deste modo, identificando o arco x de modo que x = arc cos k, o conjunto solução da inequação cos x < k é

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \arccos k + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos x + 2k\pi\}$$

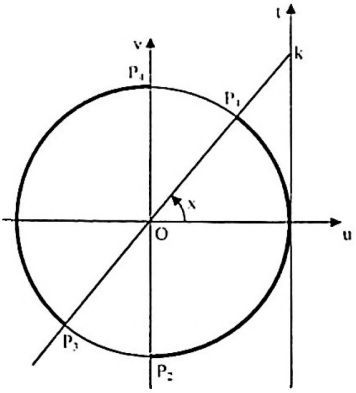
7.6. tg x > k



Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em P_1 e P_3. O arco x é identificado no ciclo trigonométrico de modo que x = arc tg k. Sejam P_2 e P_4 os pontos onde o ciclo corta o eixo v, conforme ilustra a figura ao lado. A solução da inequação tg x > k é o conjunto dos arcos x que pertencem à união entre $\overset{\frown}{P_1P_2}$ e $\overset{\frown}{P_3P_4}$, ou seja,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / \operatorname{arctg} k + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \pi + \operatorname{arctg} k + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}.$$

7.7. tg x < k



Marca-se sobre o eixo t das tangentes o ponto com posição igual a k. A reta que passa por este ponto e o ponto O corta o ciclo trigonométrico em P_1 e P_3. O arco x é identificado no ciclo trigonométrico de modo que x = arc tg k. Sejam P_2 e P_4 os pontos onde o ciclo corta o eixo v, conforme ilustra a figura ao lado. A solução da inequação tg x < k é o conjunto dos arcos x que pertencem à união entre $\overset{\frown}{P_2P_1}$ e $\overset{\frown}{P_4P_3}$, ou seja,

$$S=\left\{x\in IR\,/\,-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<arctgk+2k\pi \quad ou \quad \frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\pi+arctgk+2k\pi\right\}.$$

Exercícios Resolvidos

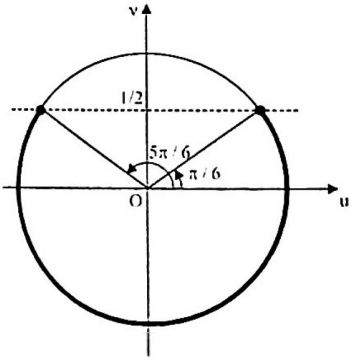
1) (UFRGS-96) No intervalo real [0, π/2], o conjunto solução da desigualdade sen x.cos x ≤ 1/4 é

a) [0, π/15] b) [0, π/12] c) [0, π/10] d) [0, π/8] e) [0, π/6]

Solução: Não há alternativa correta

Multiplicando os dois membros da inequação por 2:

$$2.\text{sen}\,x.\cos x<\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,2x\le\frac{1}{2}$$



A figura ao lado mostra todos os ângulos que possuem seno menor ou igual a 1/2. Assim, a solução da inequação $\text{sen}\,2x\le\frac{1}{2}$ é:

$$0\le 2x\le\frac{\pi}{6}\cup\frac{5\pi}{6}\le 2x<2\pi \quad \Rightarrow$$

$$0\le x\le\frac{\pi}{12}\cup\frac{5\pi}{12}\le x<\pi$$

Fazendo a interseção com $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ obtém-se como conjunto solução $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

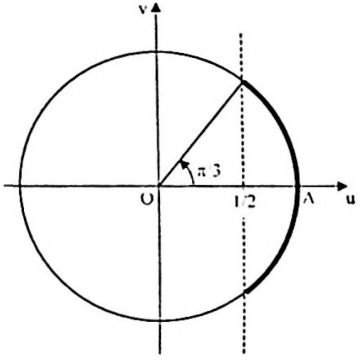
2) (Unesp-14) O conjunto solução (S) para a inequação $2\cos^2 x + \cos 2x > 2$, em que $0 < x < \pi$, é dado por:

a) $S = \left\{x \in (0,1) \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$ b) $S = \left\{x \in (0,1) \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in (0,1) \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$ d) $S = \left\{x \in (0,1) \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

e) $S = \{x \in (0,1)\}$

Solução: Alternativa A



Sabe-se que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Isolando $2\cos^2 x$ em função de $\cos 2x$:

$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$

Substituindo esse resultado na inequação original:

$\cos 2x + 1 + \cos 2x > 2 \Rightarrow \cos 2x > \frac{1}{2}$

Sabe-se que $\frac{\pi}{3} = \arccos\frac{1}{2}$. Deste modo, a solução da inequação $\cos 2x > \frac{1}{2}$ vale:

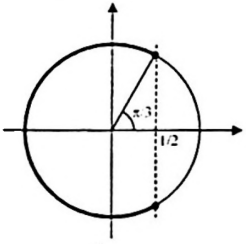
$0 \le 2x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} < 2x < 2\pi \Rightarrow$

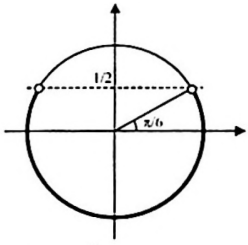
$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$

3) (AFA-95) Sejam U e V conjunto-solução das inequações $2.\cos x \le 1$ e $2.\text{sen } x < 1$, respectivamente, no intervalo $0 \le x \le 2\pi$. Então $U \cap V$ é o intervalo:

a) $\frac{\pi}{3} < x \le \frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3} < x \le 2\pi$ c) $\frac{5\pi}{6} < x \le \frac{5\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3} < x \le 2\pi$

Solução: Alternativa C





As figuras ao lado mostram as soluções das inequações $\cos x \le \frac{1}{2}$ e $\text{sen } x < \frac{1}{2}$, a saber:

$\cos x \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$

$\text{sen } x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$

Fazendo a interseção desses dois intervalos encontra-se $\frac{5\pi}{6} < x \le \frac{5\pi}{3}$.

4) (ITA-08) Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x):

$x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$, admita apenas raízes reais simples.

Solução:

Seja $y = x^2$: $y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \operatorname{tg}\alpha = 0$ (1)

Para que na equação original tenhamos raízes reais simples a equação (1) deve possuir $\Delta > 0$ e raízes positivas, logo:

i) $\Delta = (2\sqrt[4]{3})^2 - 4.1.\operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{3} - 4.\operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$

Assim para $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, temos $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ (2)

ii) $\frac{2\sqrt[4]{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 4.\operatorname{tg}\alpha}}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha} > 0 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha} < \sqrt[4]{3} \Rightarrow$

$\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (3)

Fazendo a interseção entre (2) e (3): $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right[$.

5) (ITA-06) Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade:

$$\log_{\cos x}(4\operatorname{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

Solução:

Condição de Existência: $4\operatorname{sen}^2 x - 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}$ ou $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \overset{x\in(-\pi/2,\ \pi/2)}{\Rightarrow} -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ (I)

Condição de Existência: $4 - \sec^2 x > 0 \Rightarrow \cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2} \overset{x\in(-\pi/2,\ \pi/2)}{\Rightarrow} -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ (II)

Desenvolvendo a inequação: $\log_{\cos x}\left(4\operatorname{sen}^2 x - 1\right) - \log_{\cos x}\left(4 - \sec^2 x\right) > 2 \Leftrightarrow$

$$\log_{\cos x}\left(\frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4 - \sec^2 x}\right) > \log_{\cos x}\cos^2 x \Leftrightarrow \frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1 - 4\cos^2 x + 1}{4 - \sec 2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(-4)\cos(2x)}{4 - \sec^2 x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(2x)}{4 - \sec^2 x} > 0$$

Como $4 - \sec^2 x > 0$, pela condição de existência, deve-se impor que $\cos 2x > 0$.

Já que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), 2x \in (-\pi; \pi)$.

Neste intervalo, cos 2x > 0 quando $2x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ (III)

Portanto, a solução é dada pela interseção dos intervalo (I), (II) e (III):

$S = \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

6) (ITA-12) Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que

$$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0.$$

Solução:

Inicialmente, deve-se impor que $0 < \text{tg}(\theta) \neq 1$. Como $\theta \in [0, 2\pi]$, conclui-se que θ deve pertencer ao conjunto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (I)

Além disso, tem-se que $e^{\text{sen}(\theta)} > 0, \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, a inequação dada equivale a:

$\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq \log_{\text{tg}(\theta)} 1$. Podem ocorrer dois casos:

a) $\text{tg}(\theta) > 1$. Com as condições de existência, em (I), conclui-se que:

$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (II)

$e^{\text{sen}(\theta)} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow \text{sen}(\theta) \geq 0$

Com a condição em (II), isso equivale a $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (*)

b) $0 < \text{tg}(\theta) < 1$. Agora, a inequação dada resulta em:

$e^{\text{sen}(\theta)} < 1 = e^0 \Leftrightarrow \text{sen}(\theta) < 0$ (III)

Como $0 < \text{tg}(\theta) < 1$, de (I) conclui-se que

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$. Com a condição (III): $\theta \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ (**)

Portanto, a partir das possibilidades destacadas em (*) e (**), o conjunto solução da inequação dada é: $S = \left\{\theta \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < \theta < \frac{5\pi}{4}\right\}$

7) (ITA-14) Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente,

$$\frac{2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1}{\cos x - 1} < 0 \text{ e } \text{tg}\, x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\,\text{cotg}\, x)\text{cotg}\, x.$$

Solução:

I) Inicialmente será analisada a inequação $\frac{2\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1}{\cos x - 1} < 0$

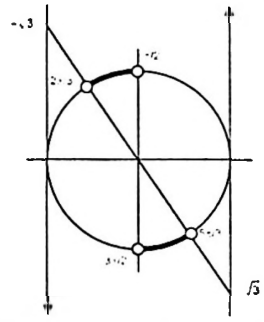
Como $\cos x - 1 < 0$ para qualquer $x \in]\,0,\, 2\pi\,[$ e $\cos x$ deve ser diferente de 1, tem-se que $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0 \Rightarrow (2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x > 1/2 \Rightarrow$

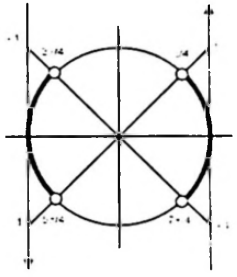
$x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ (1)

II) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x}\right).\frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < \left(\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2 x}\right) \Rightarrow$

$(\operatorname{tg}^2 x - 1).(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) < 0$, pois $\operatorname{tg}^2 x > 0$.

Estudando o sinal de ambas para tg x encontraremos: $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$ ou $-1 < \operatorname{tg} x < 1$.





Com a análise do ciclo trigonométrico concluímos que:

$\operatorname{tg} x < -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$ ou $x \in \left]\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right[$ (2)

$-1 < \operatorname{tg} x < 1 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ ou $x \in \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[$ ou $x \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[$ (3)

Fazendo a intersecção de (1) com (2)$\cup$(3):

$x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right[$

8) (ITA-04) Determine os valores reais do parâmetro **a** para os quais existe um número real **x** satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

Solução:

Para que exista solução real para a inequação devemos ter:

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Assim, existe um arco y $(0 \leq y \leq 2\pi)$ de modo que $x = \operatorname{sen} y$. Desta forma:

$\sqrt{1-x^2} \geq a - x \Rightarrow \sqrt{1-(\operatorname{sen} y)^2} \geq a - \operatorname{sen} y \Rightarrow \sqrt{\cos^2 y} \geq a - \operatorname{sen} y \Rightarrow$

$a \leq |\cos y| + \operatorname{sen} y \Rightarrow a \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|\cos y| + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y\right)$.

Se $\cos y \geq 0$ temos que $a \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right) \Rightarrow a \leq \sqrt{2}.\text{sen}\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$

Se $\cos y < 0$ temos que $a \leq \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}y\right) \Rightarrow a \leq \sqrt{2}.\text{sen}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$

Como $-1 \leq \text{sen } y \leq 1$, então temos, nos dois casos, que $a \leq \sqrt{2}$.

9) (IME-09) Resolva a seguinte inequação, para $0 \leq x < 2\pi$:

$$\frac{3\text{sen}^2x + 2\cos^2 x + 4\text{sen}x - \left(1+4\sqrt{2}\right)\text{sen}x\cos x + 4\cos x - 2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{2\text{sen}x - 2\sqrt{2}\text{sen}x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Solução:

$$\frac{3\text{sen}^2x+2\cos^2 x+4\text{sen}x-\left(1+4\sqrt{2}\right)\text{sen}x\cos x+4\cos x-4-4\sqrt{2}-4\text{sen}x+4\sqrt{2}\text{sen}x\cos x-4\cos x+2\sqrt{2}}{2\text{sen}x-2\sqrt{2}\text{sen}x\cos x-\sqrt{2}+2\cos x} > 0$$

$$\frac{\text{sen}^2x + 2 - \text{sen}x\cos x - 2}{2\text{sen}x\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} = \frac{\text{sen}x\left(\text{sen}x - \cos x\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\text{sen}x - 1\right)\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

	0	π/4	π/2	3π/4	π	5π/4	7π/4	2π
sen x		+	+	+	+	-	-	-
senx-cosx		-	+	+	+	+	-	-
$\sqrt{2}$ sen x - 1		-	+	+	-	-	-	-
$1 - \sqrt{2}\cos x$		-	+	+	+	+	+	-
Produto		-	+	+	-	+	-	+

$$S = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$$

Exercícios de Vestibular

1) (UEPB-11) Sendo f uma função definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, $0 \leq x \leq 4\pi$, então f(x) é positiva, quando:

a) $0 < x < 6\pi$ b) $0 < x < 4\pi$ c) $-\pi \leq x \leq 2\pi$
d) $-\pi < x < \pi$ e) $0 < x < 2\pi$

2) (UFBA-07) Dadas as funções $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, determine para quais valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) \geq g(x)$.

3) (UFRGS-10) As soluções da desigualdade $2.\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x > 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$, são os valores de x tais que:

a) $x \geq \pi/6$ b) $\pi/6 < x < 5\pi/6$
c) $x < \pi/6$ ou $x > 5\pi/6$ d) $\pi/6 < x < 5\pi/6$ ou $\pi < x < 2\pi$
e) $5\pi/6 < x < 2\pi$

4) (Fuvest) No intervalo $[0, \pi/2]$, determine o conjunto solução da inequação
$\operatorname{sen} 2x - \cos x > 0$.

5) (Mackenzie-02) Um intervalo que contém soluções de $\operatorname{sen} 2x > 2.\operatorname{sen} x$ é:

a) $[0, \pi/4]$ b) $[\pi/4, \pi/2]$ c) $[\pi/2, 3\pi/4]$
d) $[3\pi/4, \pi]$ e) $[\pi, 5\pi/4]$

6) (Unirio-02) Resolva a sentença $2.\cos^2 x - 3.\cos x + 1 \leq 0$, sendo $[0, 2\pi[$

7) (UEPB-11) A equação $2x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha = 0$, com $0 \leq \alpha \leq \pi$, não admite soluções reais, se:

a) $0 < \alpha < 2\pi/3$ b) $\pi/6 < \alpha < \pi$ c) $\pi/6 < \alpha < 5\pi/6$
d) $0 < \alpha < \pi/2$ e) $\pi/3 < \alpha < \pi/2$

8) (UFPA-09) Uma rampa de skate plana com inclinação α em relação à horizontal tem base b e altura h. Sabendo que $h = \frac{3}{4}b$, em relação a α, podemos afirmar que

a) $0 < \alpha < \pi/8$ b) $\pi/8 < \alpha < \pi/6$ c) $\pi/8 < \alpha < \pi/5$
d) $\pi/4 < \alpha < \pi/3$ e) $\pi/3 < \alpha < \pi/2$

9) (UFPB-03) No estudo de trigonometria, Maria e João se depararam com as seguintes desigualdades:

I. $cos(-20°) < cos(35°)$

II. $sen(20°) < sen(35°)$

III. $cos(-20°) < sen(-35°)$

Está(ão) correta(s) apenas:

a) I b) II c) III d) I e II e) I e III

10) (FEI-14) O conjunto solução da inequação $|2\cos x| < 1$, para $0 \le x < 2\pi$, é:

a) $\left\{\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$ b) $\left\{\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{9\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{6} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

11) (Insper-08) A seqüência

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{1}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), ..., \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), ..., \cos\left(\frac{\pi}{2008}\right)\right)$$

possui x termos maiores do que 0,6. Portanto,

a) x = 2008. b) x = 2005. c) x = 2003.

d) x = 6. e) x = 3.

12) (FGV-10) a) Construa o gráfico das funções $f(x) = 2 + \text{sen } x$ e $g(x) = 2 + \cos 2x$ para $0 \le x \le 2\pi$.

b) Admita que f(x) e g(x) indiquem as cotações das ações das empresas F e G na bolsa de valores de São Paulo no intervalo de horas $0 \le x \le 2\pi$ (x = 0 indica 12h00, e $x = 2\pi \approx 6{,}28$ indica, aproximadamente, 18h17). Determine algebricamente (equações e/ou inequações) o intervalo de horas, com $0 \le x \le 2\pi$, em que a cotação das ações da empresa F foi maior ou igual à cotação das ações da empresa G.

13) (Unicamp-87) Ache os valores de x, com $0° < x < 360°$, tais que

$$2.\cos^2 x + 5 \text{ sen } x - 4 > 0 .$$

14) (Fuvest-98) a) Expresse sen 3α em função de sen α;

b) Resolva a inequação sen $3\alpha > 2.\text{sen } \alpha$ para $0 < \alpha < \pi$.

15) (Fuvest-03) Determine os valores de x no intervalo $]0, 2\pi[$ para os quais:

$$\cos x \ge \sqrt{3}.\text{sen } x + \sqrt{3}$$

16) (EsPCEx-02) Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w, ambos pertencentes ao 1° quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) [0°, 15°] b) [15°, 30°] c) [30°, 45°]
d) [45°, 60°] e) [60°, 90°]

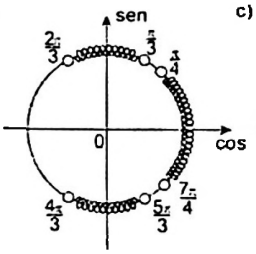
17) (AFA-98) O conjunto-solução da inequação $\frac{1}{4} < \text{sen } x.\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, para $0 \leq x \leq \pi$, é

a) $\{x \in R / \frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{6}\}$. b) $\{x \in R / \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{3}\}$.

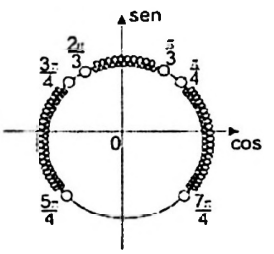
c) $\{x \in R / \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\}$. d) $\{x \in R / \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}\}$.

18) (AFA-12) Sendo $x \in [0, 2\pi]$, a interpretação gráfica no ciclo trigonométrico para o conjunto solução da inequação $-8.\text{sen}^4 x + 10.\text{sen}^2 x - 3 < 0$ é dada por

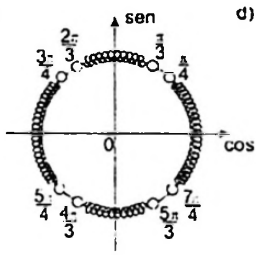
a)



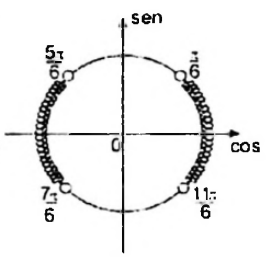
c)



b)



d)



19) (Escola Naval-87) O conjunto das soluções da inequação $\cos^4 x - 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x + 1 \leq 0$ é:

a) $\varnothing$ b) $\Re$ c) $\{2k\pi | k \in z\}$
d) $\{k\pi | k \in z\}$ e) $\{(2k+1)\pi | k \in z\}$

20) (Escola Naval-97) Se $x \in [0, 2\pi]$, o conjunto solução de

$$\frac{\sqrt{3}}{9} \leq \frac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x} < 1.$$

a) $\{x \in \Re / x \in [\pi/6, \pi/3[\cup [7\pi/6, 4\pi/3[\}$

b) $\{x \in \Re / x \in]\pi/4, \pi/3] \cup]5\pi/4, 4\pi/3]\}$

c) $\{x \in \Re / x \in [\pi/6, \pi/4[\cup [7\pi/6, 5\pi/4[\}$

d) $\{x \in \Re / x \in [\pi/4, \pi/3[\cup [5\pi/4, 4\pi/3[\}$

e) $\{x \in \Re / x \in]\pi/6, \pi/4] \cup]7\pi/6, 5\pi/4]\}$

21) (Escola Naval-10) Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{-1 + 2\operatorname{sen} x}{1 + 2\operatorname{sen} x}}$ no universo $[0, 2\pi]$ e o conjunto da inequação $\frac{1}{\operatorname{cossec} x} - \frac{1}{\sec x} > 0$ para $0 < x < \pi$, com $x \neq \frac{\pi}{2}$. Pode-se afirmar que B – A é igual a

a) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right[$ b) $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ c) $\varnothing$

d) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right[$ e) $\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$

22) (ITA-68) Determinar a, $0 \leq a \leq \pi$, para que a equação

$$(2\cos^2 a)x^2 - (4\cos a)x + 4\cos^2 a - 1 = 0,$$

tenha soluções reais.

23) (ITA-76) A inequação $4.\operatorname{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\operatorname{sen} x + \sqrt{2} < 0$ tem uma solução x, tal que:

a) $45° < x < 60°$ b) $0 < x < 30°$ c) $35° < x < 45°$

d) $60° < x < 75°$ e) nda

24) (ITA-80) No intervalo $\pi < x < 2\pi$, quais são os valores de k que satisfazem a inequação $(\log_e k)^{\operatorname{sen} x} > 1$?

a) Para todo $k > e$ b) Para todo $k > 2$ c) Para todo $k > 1$

d) Para todo $1 < k < e$ e) Para todo $0 < k < e$

25) (ITA-83) Dado o polinômio P definido por $P(x) = \text{sen}\,\theta - (\text{tg}\,\theta)x + (\sec^2\theta)x^2$, os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que P admita somente raízes reais são:

a) $0 \le \theta \le \pi/2$ b) $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$

c) $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ ou $3\pi/2 < x \le 2\pi$ d) $0 \le x \le 3\pi/2$

e) $\pi/2 \le x < 3\pi/2$

26) (ITA-86) Seja $a \in \Re$, $0 < a < 1$ e f uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{(a^{x^2} - a^2)^{1/2}}{\cos(2\pi x) + 4.\cos(\pi x) + 3}$$

Sobre o domínio A desta função podemos afirmar que:

a) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cap Z \subset A$ d) $\{x \in \Re : x \notin Z \text{ e } x \ge \sqrt{2}\} \subset A$

b) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap Z$ e) $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

c) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset A$

27) (ITA-88) Sobre a equação $\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 2\,\text{sen}\,6x$, podemos afirmar que:

a) apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \pi/4$

b) apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \pi/2$

c) apresenta uma raiz no intervalo $\pi/2 < x < \pi$

d) apresenta uma raiz no intervalo $\pi < x < 3\pi/2$

e) não apresenta raízes reais

28) (ITA-00) Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\text{sen}(2x) - \text{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) > 0$$

é o intervalo definido por

(A) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ (E) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

29) (ITA-04) O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\alpha = 0$ são todas reais, é:

a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

30) (ITA-06) Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi / 2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade.

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec(x)\geq 0.$$

a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$ d) $\pi/6$ e) $\pi/12$

31) (IME) Resolva: $4\operatorname{sen}^2 x - 2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen} x + \sqrt{2} < 0$

32) (IME-88) Resolva, no intervalo $[0, 2\pi]$: $\dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x - \sqrt{2}} \geq 0$.

33) (IME-89) Resolva a seguinte desigualdade: $\dfrac{\cos 2x - \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2$ para $0 \leq x \leq \pi$.

Exercícios Gerais

34) Resolver as seguintes inequações, para $x \in [0, 2\pi]$:

a) $\operatorname{sen} 2x > \cos x$. b) $\operatorname{sen} x > \cos^2 x$.

c) $8.\operatorname{sen}^2 x + 2.\operatorname{tg} x - \sec^2 x \leq 0$. d) $\cos^2 2x + \cos^2 x \leq 1$.

e) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2}{\cos 2x + 3.\cos x - 1} > 0$.

35) Resolva as inequações:

a) $\cos 3x + \sqrt{3}\operatorname{sen} 3x < -\sqrt{2}$. b) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x} < 0$.

c) $2.\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} + \cos 2x < 0$. d) $\operatorname{tg}^3 x + 3 > 3.\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$.

e) $\dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x} < 0$. f) $5.\operatorname{sen}^2 x - 3.\operatorname{sen} x.\cos x - 36.\cos^2 x > 0$.

g) $\operatorname{sen} 4x + \cos 4x.\operatorname{cotg} 2x > 1$. h) $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x < \dfrac{7}{16}$.

i) $4.\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} 2x.\operatorname{sen} 3x > \operatorname{sen} 4x$. j) $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3.\operatorname{tg} x$.

k) $3.\cos^2 x.\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x < \dfrac{1}{2}$. l) $\dfrac{\cos x + 2.\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2.\cos^2 x - 1} > 1$.

Desigualdades Trigonométricas

8.1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foi apresentada toda a teoria necessária para encontrar o conjunto solução de inequações trigonométricas. Do ponto de vista da linguagem, as palavras "inequação" e "desigualdade" são sinônimas. Contudo, neste livro será feita uma sutil diferenciação entre as mesmas. Será classificada como "inequação" a expressão do tipo $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ onde deseja-se determinar os valores de x que satisfazem a inequação, ou seja, quando é solicitado o conjunto solução da inequação. Normalmente a inequação é em apenas uma variável. Será classificada como "desigualdade" a expressão do tipo $f(x, y, z, ...) > 0$ ou $f(x, y, z, ...) < 0$ onde deseja-se demonstrar sua validade para todos os possíveis valores das variáveis x, y, z, ... pertencentes a um determinado domínio.

Uma exemplo de inequação é a expressão $2.\cos x - \sqrt{3} < 0$, onde deseja-se encontrar seu conjunto solução, ou seja, os valores de x que satisfazem tal inequação. Por outro lado, um exemplo de desigualdade é, sendo A, B e C ângulos de um triângulo, $\cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$, onde deseja-se demonstrar que tal desigualdade sempre é válida para $A + B + C = \pi$.

Observe os exemplos seguintes para entender as principais técnicas que serão usadas nas demonstrações das desigualdades trigonométricas.

8.2. MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA

A demonstração de desigualdades utilizando apenas a manipulação algébrica consiste em aplicar apenas operações algébricas, principalmente a fatoração, para reduzir a expressão original a uma outra expressão equivalente mais simples, onde é possível identificar seu valor máximo ou mínimo. Nos exemplos seguintes será possível observar a aplicação da manipulação algébrica na demonstração de desigualdades trigonométricas.

Exercícios Resolvidos

1) Demonstre que, se A e B são arcos do 1º quadrante do ciclo trigonométrico, então $\text{sen}\frac{A+B}{2} \geq \frac{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B}{2}$.

Solução:

Se A + B está no 2º quadrante então sen (A + B) é negativo, fazendo com que a desigualdade seja trivial. Suponhamos então que A + B está no 1º quadrante.

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \Rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}} = \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{Como } \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \le 1 \text{ então } \frac{\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}} \le 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{A+B}{2} \ge \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{2}$$

2) Seja α e β dois ângulos de modo que $\operatorname{tg}\alpha = n.\operatorname{tg}\beta$. Prove que:

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) \le \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

Solução:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{(n-1)\operatorname{tg}\beta}{1+n\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{n-1}{\operatorname{cotg}\beta + n\operatorname{tg}\beta} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{cotg}\beta + n\operatorname{tg}\beta)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{cotg}\beta - n\operatorname{tg}\beta)^4 + 4n}$$

Como $(\operatorname{cotg}\beta - n\operatorname{tg}\beta)^2 \ge 0$ então $(\operatorname{cotg}\beta - n\operatorname{tg}\beta)^2 + 4n \ge 4n$, onde segue que

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) \le \frac{(n-1)^2}{4n}$$

3) Demonstre que, se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

a) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

b) $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

c) $\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$.

Solução:

Se A, B e C são ângulos de um triângulo então $A + B + C = \pi$.

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \cos C = 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$

Como $0 \le \cos\frac{A-B}{2} \le 1$ segue que:

$\cos A + \cos B + \cos C \leq 2\operatorname{sen}\frac{C}{2} + \cos C = 2\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}$

Fazendo $\operatorname{sen}\frac{C}{2} = x$ tem-se $\cos A + \cos B + \cos C \leq -2x^2 + 2x + 1 = \frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Como $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ então $\frac{3}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$

Deste modo, conclui-se que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

b) $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \operatorname{sen}\frac{C}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2} =$

$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} =$

$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{A-B+C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{-A+B+C}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos C}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right] - \frac{1-\cos C}{4} = \frac{1}{4}(\cos B + \cos A) - \frac{1-\cos C}{4} =$

$= \frac{-1 + \cos A + \cos B + \cos C}{4}$

Do item anterior sabe-se que $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Assim: $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{4} - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

c) $\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} = \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2} =$

$= \frac{3 - (\cos A + \cos B + \cos C)}{2}$

Como $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ então:

$\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{2} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

4) (Ciaba-11) Sejam x, y e z números reais positivos onde $x + y = 1 - z$, e sabendo-se que existem ângulos α e β onde $x = \cos^2\alpha.\cos^2\beta$ e $y = \cos^2\alpha.\text{sen}^2\beta$, é correto afirmar que o valor mínimo da expressão $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-2\sqrt{2}.\frac{z}{x+y}$ é:

a) 6 b) $6+2\sqrt{2}$ c) 12 d) $9+2\sqrt{2}$ e) $12+2\sqrt{2}$

Solução: Alternativa E

Observe que $x + y = \cos^2\alpha.\cos^2\beta + \cos^2\alpha.\text{sen}^2\beta = \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta) = \cos^2\alpha$

Assim: $z = 1 - (x + y) = 1 - \cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$

Deste modo, a expressão que se deseja calcular o valor mínimo pode ser escrita apenas em função de $\text{tg}\alpha$ e $\text{tg}\beta$:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-2\sqrt{2}.\frac{z}{x+y}=\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}+\frac{2}{\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta}+\frac{3}{\text{sen}^2\alpha}-2\sqrt{2}\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\sec^2\alpha\sec^2\beta+2\sec^2\alpha\,\text{cossec}^2\beta+3\,\text{cossec}^2\alpha-2\sqrt{2}\,\text{tg}^2\alpha=$$

$$=(1+\text{tg}^2\alpha)(1+\text{tg}^2\beta)+2(1+\text{tg}^2\alpha)\left(1+\frac{1}{\text{tg}^2\beta}\right)+3\left(1+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}\right)-2\sqrt{2}\,\text{tg}^2\alpha=$$

$$=1+\text{tg}^2\alpha+\text{tg}^2\beta+\text{tg}^2\alpha\,\text{tg}^2\beta+2+2\,\text{tg}^2\alpha+\frac{2}{\text{tg}^2\beta}+2\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\beta}+3+\frac{3}{\text{tg}^2\alpha}-2\sqrt{2}\,\text{tg}^2\alpha=$$

$$=6+3\left(\text{tg}^2\alpha+\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}\right)+\left(\text{tg}^2\alpha\,\text{tg}^2\beta-2\sqrt{2}\,\text{tg}^2\alpha+2\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\beta}\right)+\left(\text{tg}^2\beta-\frac{2}{\text{tg}^2\beta}\right)=$$

$$=6+3\left[\left(\text{tg}\alpha-\frac{1}{\text{tg}\alpha}\right)^2+2\right]+\left(\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta-\sqrt{2}\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}\right)^2+\left(\text{tg}\beta-\frac{\sqrt{2}}{\text{tg}\beta}\right)^2+2\sqrt{2}$$

Como todo quadrado perfeito é maior ou igual a zero segue que:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-2\sqrt{2}.\frac{z}{x+y}\geq 6+6+2\sqrt{2}=12+2\sqrt{2}$$

A igualdade ocorre quando todos os quadrados perfeitos forem iguais a zero. Isso ocorre quando:

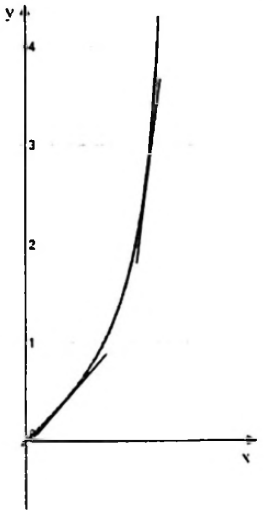
i) $\text{tg}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;

ii) $\text{tg}^2\beta = \sqrt{2} \Rightarrow \text{tg}\beta = \pm\sqrt[4]{2} \Rightarrow \beta = \text{arc tg}\sqrt[4]{2} + 2k\pi$ ou $\beta = \text{arc tg}\left(-\sqrt[4]{2}\right) + 2k\pi$

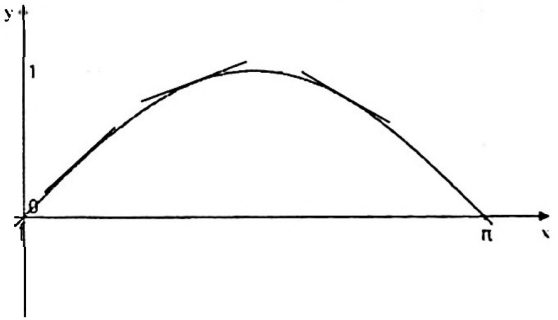
8.3. USANDO A DESIGUALDADE DE JENSEN

Antes de definir a desigualdade de Jensen é necessário introduzir os conceitos de função de côncava e função convexa.

8.3.1. Função Convexa: Uma função é classificada como convexa quando seu gráfico está acima de qualquer tangente a um de seus pontos. Por exemplo, a função $f(x) = tg\ x$ é convexa no intervalo $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.



8.3.2. Função Côncava: Uma função é classificada como côncava quando seu gráfico está abaixo de qualquer tangente a um de seus pontos. Por exemplo, a função $f(x) = \text{sen } x$ é convexa no intervalo $0 \leq x \leq \pi$.



8.3.3. Desigualdades de Jensen: Seja f: (a, b)→IR uma função **convexa** em todo o intervalo (a, b). Então, para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ é válido que:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$$

Se f for uma função côncava em todo o intervalo (a, b), segue que

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$$

Acompanhe os exemplos seguintes para entender melhor a aplicação da desigualdade de Jensen na demonstração de desigualdades trigonométricas.

Exercícios Resolvidos

1) Demonstre que, se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

a) $\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C \geq 3\sqrt{3}$, com ΔABC acutângulo.

Solução:

Se A, B e C são ângulo de triângulo então $0 < A, B, C < \pi$. Como para $x \in (0, \pi)$ a função $f(x) = \text{sen } x$ é uma função côncava, segue que:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\text{sen } A+\text{sen } B+\text{sen } C}{3} \leq \text{sen}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\text{sen } A+\text{sen } B+\text{sen } C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

b) Como ΔABC é acutângulo então $0 < A, B, C < \pi/2$. Como para $x \in (0, \pi/2)$ a função $f(x) = \text{tg } x$ é uma função convexa, segue que:

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \geq f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\text{tg } A+\text{tg } B+\text{tg } C}{3} \geq \text{tg}\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } A+\text{tg } B+\text{tg } C \geq 3\sqrt{3}$$

8.4. USANDO A DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

8.4.1. Desigualdade Entre as Médias Aritmética e Geométrica: Dados $n > 1$ reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, Então:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

ocorrendo a igualdade se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forem todos iguais.

Exercícios Resolvidos

1) Seja ABC um triângulo acutângulo. Prove que $\text{tg A.tg B.tg C} \geq 3\sqrt{3}$.

Solução:

Como A, B e C são ângulos de um triângulo: $A + B = \pi - C \Rightarrow$

$$\text{tg}(A + B) = \text{tg}(\pi - C) \Rightarrow \frac{\text{tg A} + \text{tg B}}{1 - \text{tg A.tg B}} = -\text{tg C} \Rightarrow$$

$$\text{tg A} + \text{tg B} = -\text{tg C} + \text{tg A.tg B.tg C} \Rightarrow \text{tg A} + \text{tg B} + \text{tg C} = \text{tg A.tg B.tg C} \quad (1)$$

Se ΔABC é acutângulo então tg A, tg B, tg C > 0. Assim, pode-se aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\text{tg A} + \text{tg B} + \text{tg C} \geq 3\sqrt[3]{\text{tg A.tg B.tg C}}$$

Usando a expressão (1): $\text{tg A.tg B.tg C} \geq 3\sqrt[3]{\text{tg A.tg B.tg C}} \Rightarrow$

$$(\text{tg A.tg B.tg C})^3 \geq 3(\text{tg A.tg B.tg C}) \Rightarrow \text{tg A.tg B.tg C} \geq 3\sqrt{3}$$

2) Se A, B e C são os ângulos de um triângulo então prove que

$$\text{sen A.sen B.sen C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Solução:

No item sobre a aplicação de desigualdade de Jensen foi demonstrado que, se A, B e C são ângulos de um triângulo: $\text{sen A} + \text{sen B} + \text{sen C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (1).

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e pelo resultado (1):

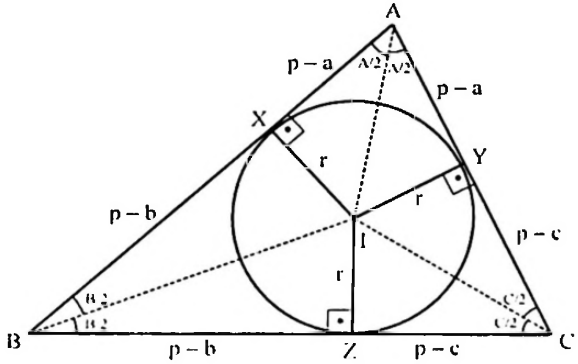
$$\sqrt[3]{\text{sen A.sen B.sen C}} \leq \frac{\text{sen A} + \text{sen B} + \text{sen C}}{3} \overset{(1)}{\leq} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\text{sen A.sen B.sen C} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \Rightarrow \text{sen A.sen B.sen C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

8.5. SUBSTITUIÇÕES GEOMÉTRICAS

Nos problemas que envolvem ângulos de um triângulo é possível utilizar a ferramenta de substituições geométricas, que consiste em substituir senos, cossenos e tangentes de ângulos de um triângulo por expressões contendo medidas do triângulo (lados, alturas, medianas, inraio, ...) ou a área do triângulo. Depois de realizadas as substituições geométricas, a desigualdade trigonométrica se transformará em uma desigualdade algébrica, que deverá ser demonstrada utilizando as desigualdades clássicas ou mesmo por pura manipulação algébrica.

Abaixo serão demonstradas as expressões mais usuais que poderão ser utilizadas para realizar as substituições geométricas.



A figura ao lado ilustra a configuração de um triângulo ABC, onde são traçadas as três bissetrizes dos ângulos, que se encontram no incentro I, centro da circunferência inscrita em ABC. Os pontos X, Y e Z são os pontos de tangência dos lados do triângulo com a circunferência inscrita.

Sabe-se que $S = pr$, onde S é a área e p o semi perímetro de ABC. Além disso, pela fórmula de Heron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Observando o triângulo AIY segue que:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Calculando $\cos\frac{A}{2}$:

$$\sec^2\frac{A}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = 1 + \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \frac{bc}{p(p-a)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{bc}{p(p-a)} \Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Determinando $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{A}{2}}=\sqrt{1-\frac{p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{bc-p(p-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

O valor de sen A pode ser determinado pela expressão do arco duplo:

$$\operatorname{sen} A=2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}=\frac{2S}{bc}.$$

Uma substituição geométrica para o cosseno pode ser obtida usando a lei dos cossenos:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A \Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Também podem ser utilizadas expressões que relacionem as funções trigonométricas com a área e os raios das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo:

$$\operatorname{sen} A=\frac{(a+b+c)r}{bc},\quad \operatorname{sen} A=\frac{a}{2R}$$

As expressões encontradas para o ângulo A podem ser generalizadas para os outros ângulos de ABC:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\quad \operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\operatorname{sen} A=\frac{2S}{bc},\quad \operatorname{sen} B=\frac{2S}{ac},\quad \operatorname{sen} C=\frac{2S}{ab}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\operatorname{sen} A=\frac{(a+b+c)r}{bc},\ \operatorname{sen} B=\frac{(a+b+c)r}{ac},\ \operatorname{sen} C=\frac{(a+b+c)r}{ab}$$

$$\operatorname{sen} A=\frac{a}{2R},\ \operatorname{sen} B=\frac{b}{2R},\ \operatorname{sen} C=\frac{c}{2R}$$

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}=\frac{\sqrt{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{4}=\frac{\sqrt{4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^2+b^2+c^2)^2}}{4}$$

Exercícios Resolvidos

1) Prove que, se A, B e C são ângulos de um triângulo: $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Solução:

Utilizando as substituições geométricas já demonstradas:

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$c = 2p - a - b = (p-a) + (p-b) \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \Rightarrow c \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$$

Analogamente: $b \ge 2\sqrt{(p-a)(p-c)}$ e $a \ge 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$

Multiplicando essas três desigualdades: $abc \ge 8(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow$

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \le 8 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

') Prove que, se A, B e C são ângulos de um triângulo:

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C \le \frac{9}{4}.$$

olução:

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \frac{4S^2}{b^2c^2} + \frac{4S^2}{a^2c^2} + \frac{4S^2}{a^2b^2} = \frac{4S^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2c^2}$$

Uma expressão para a área de um triângulo em função de seus lados é:

$$S^2 = \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{16}$$

Substituindo na equação original:

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \frac{[2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)](a^2 + b^2 + c^2)}{4a^2b^2c^2}$$

Desta forma, uma desigualdade equivalente à original é:

$$\frac{[2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)](a^2 + b^2 + c^2)}{4a^2b^2c^2} \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$9a^2b^2c^2 + a^6 + b^6 + c^6 + a^4b^2 + a^4c^2 + a^2b^4 + a^2c^4 + b^4c^2 + b^2c^4 \ge$$

$$\ge 2a^4b^2 + 2a^4c^2 + 2a^2b^4 + 2a^2c^4 + 2b^4c^2 + 2b^2c^4 + 6a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^6 + 2b^6 + 2c^6 + 6a^2b^2c^2 \ge 2a^4b^2 + 2a^4c^2 + 2a^2b^4 + 2a^2c^4 + 2b^4c^2 + 2b^2c^4 \Leftrightarrow$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] \ge 0$$

Esta última expressão é evidentemente válida, fazendo com que seja verdade a desigualdade $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C \leq \frac{9}{4}$.

3) (Olimpíada da Alemanha-87) Com as notações habituais para os triângulos (r, raio do incírculo; S, área do triângulo), demonstrar que

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} \geq \frac{27r}{8S}.$$

Solução:

Utilizando a fórmula $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ juntamente com a lei dos cossenos:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4abc}$$

Analogamente: $\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{a^2+c^2-b^2+2ac}{4abc}$ e $\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4abc}$

Substituindo:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}{4abc} = \frac{(a+b+c)^2}{4abc} = \frac{p^2}{abc}$$

Como a área de um triângulo é dada por S = pr:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{p^2 r}{abcS}$$

Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \Rightarrow \quad p^3 \geq \frac{27}{8}abc.$$

Desta forma, conclui-se que: $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} \geq \frac{27r}{8S}$

8.6. SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Suponha que você tenha em mãos uma desigualdade algébrica tradicional, composta, de maneira geral, de três variáveis. Se as variáveis dessa desigualdade guardarem certas condições, é possível substituí-las por variáveis trigonométricas, como seno, cosseno e tangente. Verifique nos exemplos seguintes como utilizar esta técnica.

Exercícios Resolvidos

1) Encontre o valor máximo da expressão:

$$xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Solução:

Para que esta expressão faça sentido:

$1 - x^2 \geq 0$ e $1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$ e $y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$

Assim, existem os ângulos α e β, $(0 \leq \alpha, \beta \leq \pi)$ tais que $x = \cos\alpha$ e $y = \cos\beta$

$$P = xy + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} =$$

$$= \cos\alpha.\cos\beta + \cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta} + \cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} =$$

$$= \cos\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta + \cos\beta.\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha + \beta\right) \leq \sqrt{2}$$

2) (Olimpíada da Coréia do Sul-98) Para os números reais positivos a, b, c com $a + b + c = abc$, mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2},$$

e determine quando vale a igualdade.

Solução:

Fazendo a substituição $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$ e $c = \operatorname{tg} C$ tem-se que $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C$, que é a condição necessária e suficiente para que A, B e C sejam ângulos de um triângulo: $0 < A, B, C < \pi/2$ e $A + B + C = \pi$.

O lado esquerdo da desigualdade se transforma em:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{\sec^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{\sec^2 C}} =$$

$$= |\cos A| + |\cos B| + |\cos C|$$

Uma vez que a função $f(x) = |\cos x|$ é uma função côncava para $0 < x < \pi/2$, pela desigualdades de Jensen:

$$|\cos A| + |\cos B| + |\cos C| \le 3\cos[(A+B+C)/3] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

3) (Olimpíada dos Estados Unidos-01) Sejam a, b, c números reais não negativos tais que $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Demonstre que $ab + bc + ac - abc \le 2$.

Solução:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) = 1$$

Sabe-se que uma condição necessária e suficiente para que A, B e C sejam ângulos de um triângulo é $\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} = 1$. Deste modo, pode-se fazer as seguintes substituições trigonométricas:

$$a = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2},\ b = 2\operatorname{sen}\frac{B}{2} \text{ e } c = 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

Antes de fazer a substituição trigonométrica, sendo $abc = 4 - (a^2 + b^2 + c^2)$ e substituindo na desigualdade original, sobra que $ab + bc + ac + a^2 + b^2 + c^2 \le 6 \Rightarrow$

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} \le 6$$

Observe que:

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2\sqrt{\operatorname{sen} A \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{sen} B \operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

Pela desigualdades entre as médias:

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \le \operatorname{sen} A \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{sen} B \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{sen} A \operatorname{cotg}\frac{A+C}{2} + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}$$

Analogamente:

$$4\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \operatorname{sen} B \operatorname{cotg}\frac{A+B}{2} + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg}\frac{A+C}{2} \text{ e}$$

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le \operatorname{sen} A \operatorname{cotg}\frac{A+B}{2} + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}$$

Desta maneira:

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \le$$

$$\le (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B)\operatorname{cotg}\frac{A+B}{2} + (\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)\operatorname{cotg}\frac{B+C}{2} + (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C)\operatorname{cotg}\frac{A+C}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} + 2\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{C+A}{2} =$$

$$= \cos A + \cos B + \cos B + \cos C + \cos C + \cos A = 2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= 6 - 4\left(\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{C}{2}\right) \Rightarrow$$

$$4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{B}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{C}{2} \le 6$$

que é equivalente a desigualdade original.

4) (Olimpíada da Rússia-01) Sejam a e b números reais tais que $0 < a, b \le 1$. Prove que:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

Solução:

Como a e b são números reais satisfazendo $0 < a, b \le 1$, então existem ângulos x e y, com $0 < x, y \le 45°$, tais que $a = \operatorname{tg} x$ e $b = \operatorname{tg} y$. Assim, o membro esquerdo da desigualdade fica na forma:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{1}{\sec x} + \frac{1}{\sec y} = \cos x + \cos y$$

O membro direito se transforma em:

$$\frac{2}{\sqrt{1+ab}} = \frac{2}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y}} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{\cos x.\cos y + \operatorname{sen} x.\operatorname{sen} y}{\cos x.\cos y}}} = 2\sqrt{\frac{\cos x.\cos y}{\cos(x-y)}}$$

Assim, a desigualdade original se converte em:

$$\cos x + \cos y \le 2\sqrt{\frac{\cos x.\cos y}{\cos(x-y)}} \Rightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x.\cos y \le \frac{4\cos x.\cos y}{\cos(x-y)} \Rightarrow$$

$$\cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x.\cos y] \le 4\cos x.\cos y$$

Logo, demonstrar a desigualdade original é equivalente a demonstrar esta última desigualdade. Note agora que:

$$\cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y] = \frac{\cos(x-y)[\cos 2x + \cos 2x + 2]}{2} =$$

$$= \cos(x-y)[\cos(x-y).\cos(x+y) + 1]$$

Como $\cos(x-y) \le 1$ então:

$$\cos(x-y)[\cos(x-y).\cos(x+y) + 1] \le \cos(x+y) + \cos(x-y) \Rightarrow$$

$$\cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y] \le 2\cos x.\cos y \quad (1)$$

Ainda pelo fato de $\cos(x-y) \le 1$ tem-se que:

$$\cos(x-y)[2\cos x.\cos y] \le 2\cos x.\cos y \quad (2)$$

Somando as desigualdades (1) e (2) segue que:

$$\cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x.\cos y] \le 4\cos x.\cos y$$

Exercícios Gerais

1) Demonstrar que $\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}2\alpha.\operatorname{sen}3\alpha < \frac{3}{4}$.

2) Sabe-se que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Prove que

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{sen}\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n .$$

3) Demonstre que:
a) $\operatorname{tg} x > x$, $0 < x < \pi/2$.
b) $\operatorname{tg}\alpha - \alpha < \operatorname{tg}\beta - \beta$, se $0 < \alpha < \beta < \pi/2$.
c) $\alpha - \operatorname{sen}\alpha < \beta - \operatorname{tg}\beta$ se $0 < \alpha < \beta < \pi/2$.

4) Demonstre que $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \geq 1 + \operatorname{cotg}\alpha$, se $0 < \alpha < \pi$.

5) Demonstre que:
a) $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta < 1$ se α e β são os valores dos ângulos agudos de um triângulo obtusângulo.
b) $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta > 1$ se α e β são os valores dos ângulos de um triângulo acutângulo.

6) Demonstre que $\cos\alpha + \cos\beta > \cos\gamma$ se $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$.

7) Demonstre que, se $0 < \alpha < \pi/2$ e $0 < \beta < \pi/2$:
a) $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$;
b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}$.

8) Demonstre que, se $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta < \pi/2$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

9) Demonstre que:
a) $\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}$;
b) $\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$;

c) $\text{sen}^8 \alpha + \cos^8 \alpha \geq \frac{1}{8}$;

d) $\text{sen}^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq 1$.

10) Prove que, se $0 < \alpha < \pi/2$:

a) $\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha \geq 2$;

b) $\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha > \text{sen}\ \alpha + \cos \alpha$.

11) Prove que, se $0 < \alpha < \pi$ e $0 < \beta < \pi$:

a) $\text{sen}\ (\alpha + \beta) \leq \text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta$;

b) $\cos (\alpha - \beta) \leq \cos \alpha + \text{sen}\ \beta$.

12) Demonstre que $3(\text{tg}^2 \alpha + \text{cotg}^2 \alpha) - 8(\text{tg}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha) + 10 \geq 0$

13) Demonstre que $\text{sen}\ 2\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha.\cos 8\ \alpha.\cos 16\ \alpha \leq \frac{1}{16}$.

14) Se $a, b, c \in (0, \pi/2)$, demonstre que $\text{sen}\ (a + b + c) < \text{sen}\ a + \text{sen}\ b + \text{sen}\ c$.

15) Demonstre que $\cos \alpha + 2\text{sen}\ \alpha > 1$ se $0 < \alpha \leq \pi/2$.

16) Prove que $\cos (\alpha + \beta).\cos (\alpha - \beta) \leq \cos^2 \alpha$.

17) Demonstre que $\frac{1}{\text{sen}^4 \alpha} + \frac{1}{\cos^4 \alpha} \geq 8$.

18) Demonstre que $|\text{sen}\ n\alpha| \leq n|\text{sen}\ \alpha|$.

19) Demonstre que $\frac{\text{cossec}^2 x - \text{tg}^2 x}{\text{cotg}^2 x + \text{tg}^2 x - 1} \leq \frac{5}{3}$.

20) Prove que, se $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\text{cotg}\ x - \text{cotg}\ 4x > 2$.

21) Demonstre que $\frac{a - b\cos x}{\text{sen}\ x} \geq \sqrt{a^2 - b^2}$, quando $a > b$.

22) Demonstre que $\frac{1}{3} \leq \text{tg}\ 3x.\text{cotg}\ x \leq 3$.

23) Demonstre que $17 - 2\sqrt{2} \leq \operatorname{tg} 3x . \operatorname{cotg}^3 x \leq 17 + 2\sqrt{2}$

24) Mostre que o máximo e o mínimo valor de

$$a.\cos^2 x + 2b.\operatorname{sen} x.\cos x + c.\operatorname{sen}^2 x$$

são as raízes de $(x - a)(x - c) = b^2$.

25) Prove que, se $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$:

a) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma \geq 1$;

b) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$.

26) Demonstre que, em um triângulo ABC:

a) $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$;

b) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$;

c) $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$;

d) $\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$;

e) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$;

f) $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

g) $\operatorname{cossec} \frac{A}{2} + \operatorname{cossec} \frac{B}{2} + \operatorname{cossec} \frac{C}{2} \geq 6$;

h) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$;

i) $\cos A . \cos B . \cos C \leq \frac{1}{8}$;

j) $\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

k) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

l) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$;

m) $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C \leq \frac{9}{4}$;

n) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$;

o) $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

p) $\frac{1}{\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C} + \frac{1}{\operatorname{sen} C.\operatorname{sen} A} \geq 4$;

q) $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1$.

27) Prove que, se ABC é um triângulo acutângulo, $\operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}$.

28) Demonstrar que, se $A + B + C = \pi/2$, então $\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geq 1$

29) Seja ABC um triângulo. Prove que:

$$4(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)^3 \geq 27(\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C).$$

30) Se ABC é um triângulo acutângulo, prove que:

$$(\cos A + \cos B)^2 + (\cos B + \cos C)^2 + (\cos C + \cos A)^2 \leq 3.$$

31) Em um triângulo ABC acutângulo, prove que:

$$\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2} \geq \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.$$

Exercícios de Olimpíada

32) Prove que um triângulo ABC de circunraio R e área S satisfaz

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{9R^2}{4S}.$$

Dica: Faça $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$ e $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$

33) Para todos os números reais α, β e γ, prove que:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta).\operatorname{sen}^2(\beta+\gamma) \geq 4\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta.\operatorname{sen}\gamma.\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma).$$

34) Sejam a, b e c números reais. Prove que

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Dica: Faça $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{tg} y$ e $c = \operatorname{tg} z$.

35) (Olimpíada da China-01) Seja ABC um triângulo e seja x um número real não negativo. Prove que

$$a^x\cos A + b^x\cos B + c^x\cos C \le \frac{1}{2}(a^x + b^x + c^x).$$

Dica: Aplique a desigualdade de Chebyshev.

36) Se r é o inraio e R o circunraio de ΔABC, prove que $R \ge 2r$.
Dica: Prove que $\cos A + \cos B + \cos C \ge 1 + r/R$

37) Prove que em todo triângulo ABC de área S a seguinte desigualdade é válida:

$$\frac{ab + bc + ca}{4S} \ge \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}.$$

38) Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Sejam $x = \operatorname{sen} 2A$, $y = \operatorname{sen} 2B$ e $z = \operatorname{sen} 2C$. Se $s = \frac{x + y + z}{2}$, mostre que

$$s(s - x)(s - y)(s - z) \ge 0.$$

39) (Olimpíada da Estônia-95) Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC e α, β e γ os ângulos opostos a esses lados. Se r é o inraio do triângulo mostre que:

$$a.\operatorname{sen}\alpha + b.\operatorname{sen}\beta + c.\operatorname{sen}\gamma \ge 9r.$$

40) Prove que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, se $x + y + z = xyz$.
Dica: Faça $x = \operatorname{tg} A$, $y = \operatorname{tg} B$ e $z = \operatorname{tg} C$.

41) Prove que $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$, se $0 < x, y, z < 1$ e $xy + yz + zx = 1$.
Dica: Faça $x = \operatorname{tg} A/2$, $y = \operatorname{tg} B/2$ e $z = \operatorname{tg} C/2$.

42) (Olimpíada da Moldávia-00) Determine o valor *máximo* do produto xy se os números reais x e y satisfazem a relação: $y(1 + x^2) = x\left(\sqrt{1 - 4y^2} - 1\right)$.

Dica: Faça $2y = \operatorname{sen} A$ e $x = \operatorname{tg} B$

43) (Olimpíada da Romênia-02) Se a, b e c são números reais no intervalo (0, 1), mostre que $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.
Dica: Faça $a = \cos^2 x$, $b = \cos^2 y$ e $c = \cos^2 z$

44) Sejam a, b e c números reais positivos tais que a + b + c = 1. Prove que:

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}\geq 6.$$

Dica: Faça a substituição $a = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$, $b = tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}$ e $c = tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$.

45) (Olimpíada Nórdica-04) Sejam a, b, c os lados e R o circunraio de um triângulo. Prove que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{R^2}$.

Dica: Faça a = 2Rsen A, b = 2Rsen B e c = 2Rsen B

46) Se xy + xz + yz = 1, prove que

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}\leq\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}.$$

Dica: Faça x = tg A/2, y = tg B/2 e z = tg C

47) Prove que se x, y, z >0 satisfazem a condição x + y + z = xyz, então

$$xy+xz+yz\geq 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}.$$

48) Sejam a, b e c números reais positivos com a, b, c ∈ (0, 1) tais que ab + ac + bc = 1. Prove que:

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right)$$

Faça: a = tg A/2, b = tg B/2 e c = tg C

49) Sejam R e r o circunraio e o inraio de ΔABC. Prove que

$$\frac{\cos A}{sen^2 A}+\frac{\cos B}{sen^2 B}+\frac{\cos C}{sen^2 C}\geq\frac{R}{r}.$$

Dica: Use a lei dos cossenos, lei dos senos e S = pr para encontrar uma desigualdade algébrica equivalente.

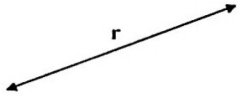
Geometria de Posição e Poliedros

9.1. POSTULADOS

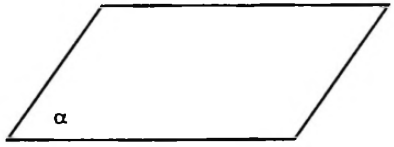
Axiomas (ou postulados) são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria. Os conceitos primitivos de geometria espacial, como ponto, reta e plano, não têm definição, mas podemos representá-los graficamente:

a) Ponto

b) Reta



c) Plano



Observação: Espaço é o conjunto de todos os pontos.

A notação usada por Hilbert (1862-1943) e normalmente adotada de forma geral, é a seguinte:

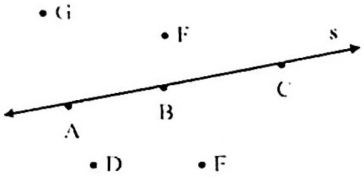
- Os pontos são indicados por letras maiúsculas (A, B, C etc.).
- As retas são indicadas por letras minúsculas (r, s, t etc.).
- Os planos são indicados por letras gregas (α, β, γ etc.).

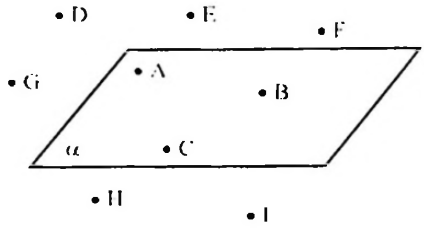
9.1.1. Postulado de Existência

Existem pontos, retas e planos;

Em cada reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos;

Em cada plano, bem como fora dele, existem infinitas retas, e conseqüentemente, infinitos pontos.





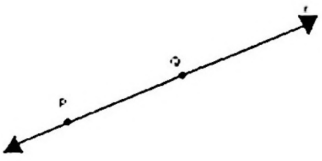
$$\begin{cases} A \in s; B \in s; C \in s \\ D \notin s; E \notin s; F \notin s \end{cases}$$

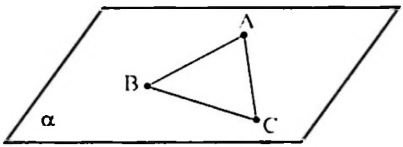
$$\begin{cases} A \in \alpha; B \in \alpha; C \in \alpha \\ E \notin \alpha; F \notin \alpha; G \notin \alpha \end{cases}$$

9.1.2. Postulados de Determinação

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles;

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

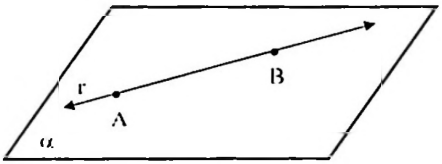




$r = \overleftrightarrow{PQ}\ (P \neq Q)$

9.1.3. Postulado da Inclusão

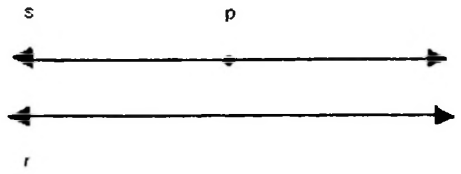
Se uma reta tem 2 pontos distintos em um plano, então ela está contida no plano.



$$\left.\begin{array}{l} A \neq B \\ A \in r; B \in r \\ A \in \alpha; B \in \alpha \end{array}\right\} r \subset \alpha$$

9.1.4. Postulado das Paralelas

Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.



9.1.5. Postulado da Separação

Uma reta r contida em um plano α divide esse plano em duas regiões chamadas semiplanos.

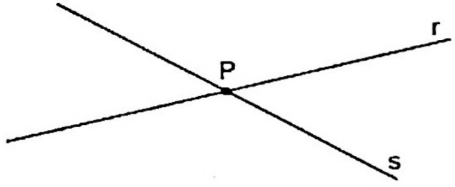
Um plano α divide o espaço em duas regiões chamadas semiespaços.

9.2. DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS

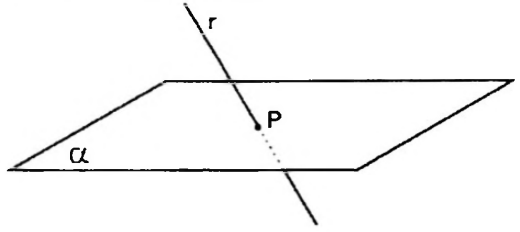
9.2.1. Determinação de um ponto

Um ponto fica determinado:

I - Pelo cruzamento de duas retas concorrentes.



II - Pelo cruzamento de uma reta com um plano.

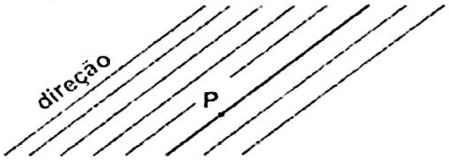


9.2.2. Determinação de uma reta

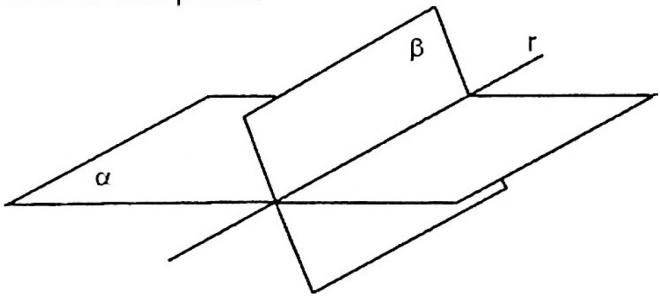
Uma reta fica determinada:

I - Por dois pontos distintos.

II - Por um ponto e uma direção.



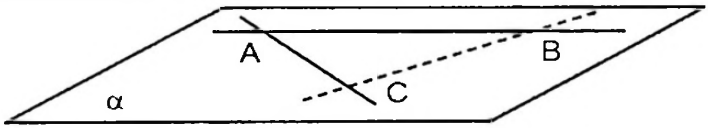
III - Pelo cruzamento de dois planos.



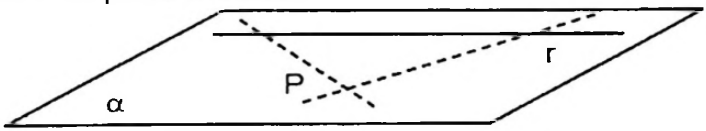
9.2.3. Determinação de um plano

Um plano fica determinado:

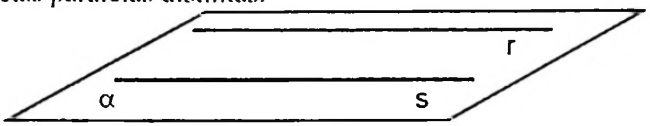
I - Por três pontos distintos não colineares.



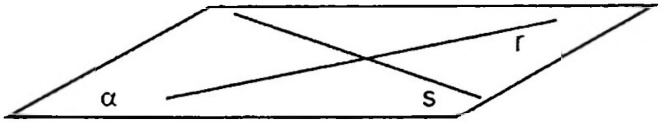
II - Por uma reta e um ponto fora dela.



III - Por duas retas paralelas distintas.



IV - Por duas retas concorrentes.



9.3. POSIÇÕES RELATIVAS

9.3.1. Ponto e reta

As posições relativas que um ponto e uma reta podem assumir são:

I - O ponto está contido na reta

$P \cap r = P$

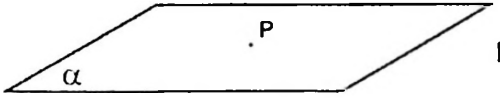
II - O ponto está fora da reta

$P \cap r = \emptyset$

9.3.2. Ponto e plano

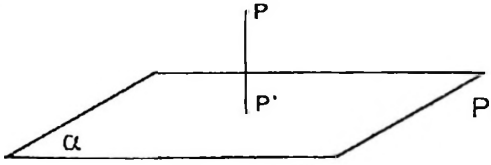
As posições relativas que um ponto e um plano podem assumir são:

I - O ponto está contido no plano



$P \cap \alpha = P$

II - O ponto está fora do plano



$P \cap \alpha = \emptyset$

9.3.3. Reta e reta

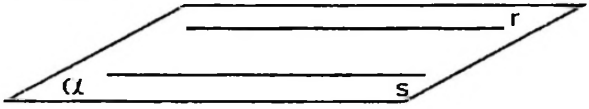
9.3.3.1. Retas coplanares

Duas retas são ditas coplanares se existe um plano que as contém. As posições relativas que duas retas coplanares podem assumir são:

I - Duas retas paralelas coincidentes

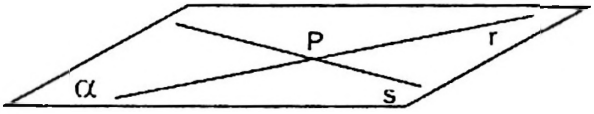
$r \cap s = r$ (ou s)

II - Duas retas paralelas distintas



$r \cap s = \emptyset$

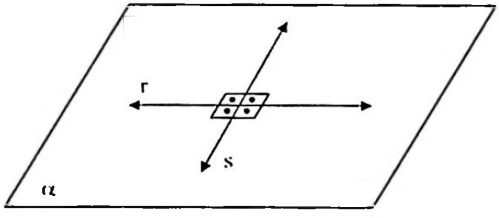
III - Duas retas concorrentes



$r \cap s = P$

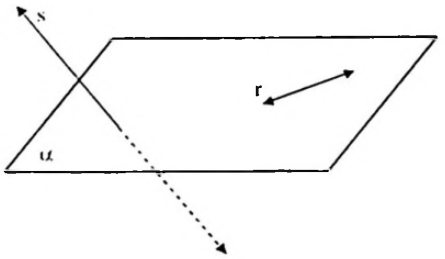
9.3.3.2. Retas perpendiculares

Duas retas concorrentes são ditas perpendiculares se fazem entre si ângulos de 90°. (no plano)



9.3.3.3. Retas reversas (ou não coplanares)

Duas retas são ditas reversas ou não coplanares se não existe um plano que as contém.

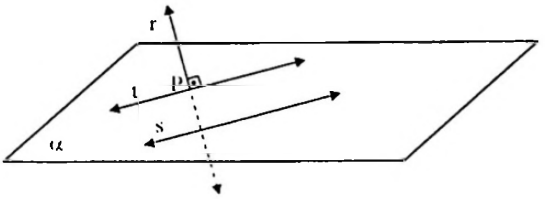


$$s \subset \alpha, \quad r \not\subset \alpha, \quad s \cap r = \emptyset, \quad s \neq r$$

9.3.3.4. Retas ortogonais

Se duas retas são reversas e se existe uma terceira reta perpendicular a uma delas e paralela à outra, dizemos que as duas primeiras retas formam um ângulo reto. Retas reversas que formam um ângulo reto são chamadas de retas ortogonais.

Exemplo: As retas s e r da figura são ortogonais, pois traçando por um ponto P de r a reta t paralela a s, observa-se que t e r são perpendiculares.

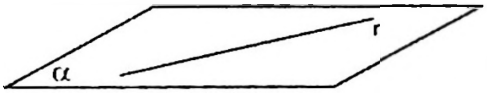


$$\left.\begin{array}{l} t \subset \alpha \\ s \subset \alpha, s // t \\ t \cap r = \{P\} \\ t \perp r, r \not\subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \text{s e r são ortogonais}$$

9.3.4. Reta e plano

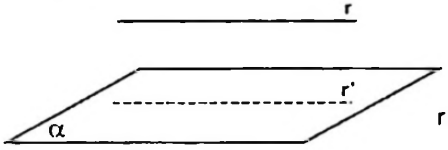
As posições relativas que uma reta e um plano podem assumir são:

I - A reta está contida no plano.



$r \cap \alpha = r$

II - A reta é paralela ao plano.



$r \cap \alpha = \emptyset$

Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, eles não possuem ponto comum:

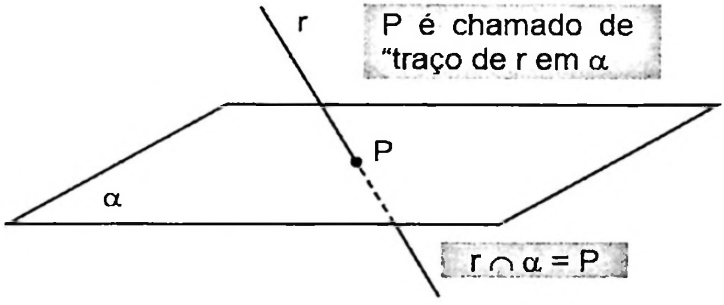
$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \emptyset$$

Teorema: Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

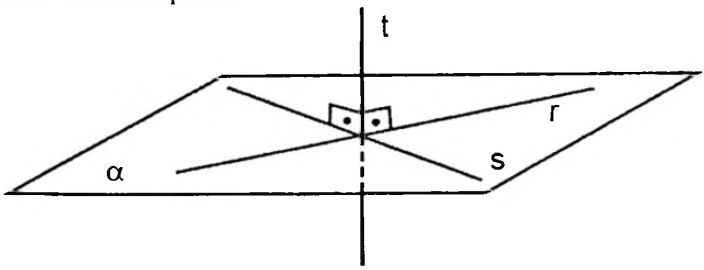
Condição Necessária: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

Condição Suficiente: Uma condição necessária e suficiente para uma reta, não contida no plano, ser paralela a esse plano é ser paralela a uma reta contida no plano.

III - A reta é secante ou concorrente com o plano.



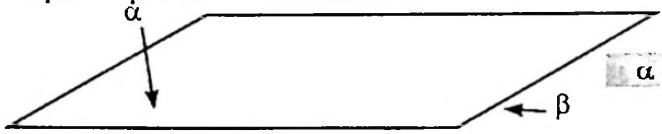
Teorema: Uma reta é perpendicular a um plano se é perpendicular ou ortogonal a duas retas concorrentes do plano.



9.3.5. Plano e plano

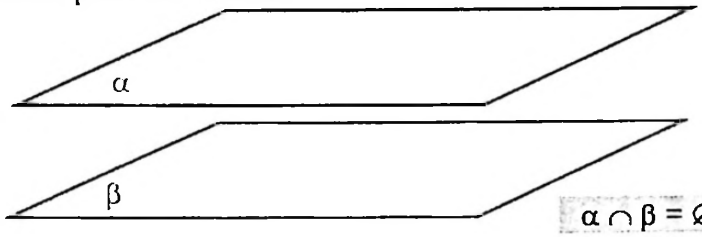
As posições relativas que dois planos podem assumir são :

I - Dois planos paralelos coincidentes



$\alpha \cap \beta = \alpha$ (ou β)

II - Dois planos paralelos distintos



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Definição: Dois planos são paralelos distintos se, e somente se, eles não têm ponto comum.

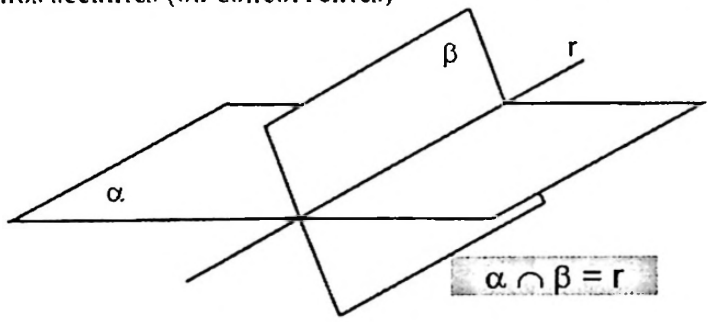
$$\alpha \,//\, \beta \text{ com } \alpha \neq \beta \iff \alpha \cup \beta = \varnothing$$

Condição Suficiente: Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

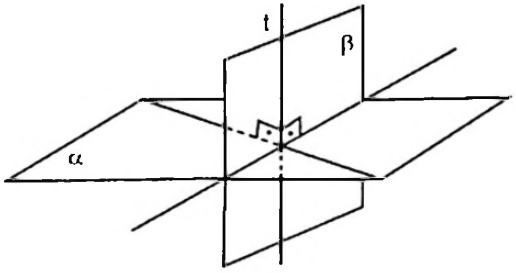
Condição Necessária e Suficiente: Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.

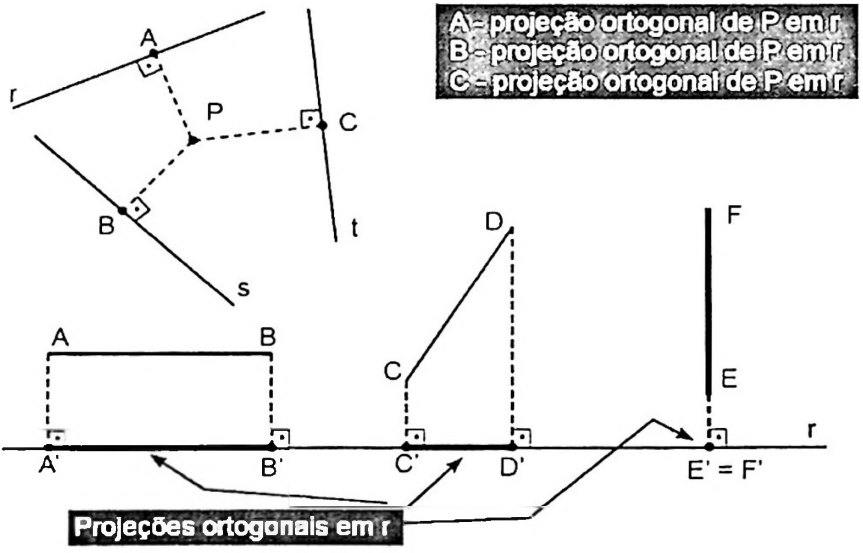
Unicidade: Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

III - Dois planos secantes (ou concorrentes)



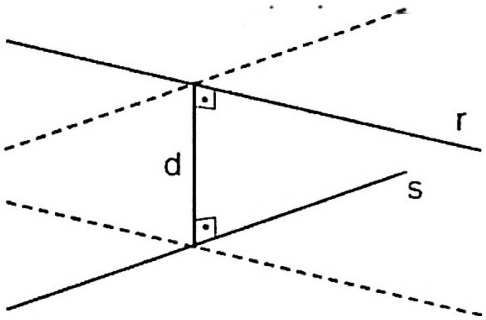
Teorema: Dois planos são perpendiculares entre si caso um deles contém uma reta perpendicular ao outro.





9.4. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS

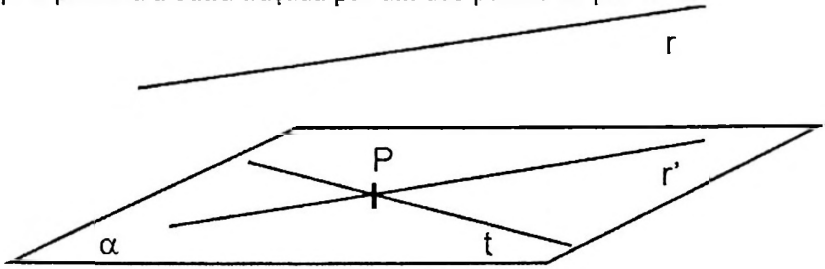
A distância entre duas retas reversas é a medida do segmento que tem extremidades nas duas retas e que é simultaneamente perpendicular a essas retas.



9.5. ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

Um ângulo pode ser determinado por retas concorrentes ou por retas reversas.

9.5.1. Os ângulos entre duas retas reversas são os ângulos formados por uma dessas retas e pela paralela à outra traçada por um dos pontos da primeira.



Na figura acima, o ângulo entre r e t é igual ao ângulo entre r' e t, onde r' é paralelo à reta r.

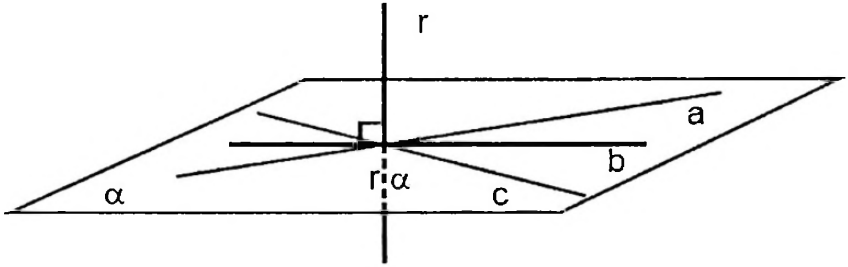
9.6. ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO.

Uma reta r é perpendicular a um plano α se, e somente se, r é secante a α e se r é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de interseção de r com α.

9.6.1. Consequências:

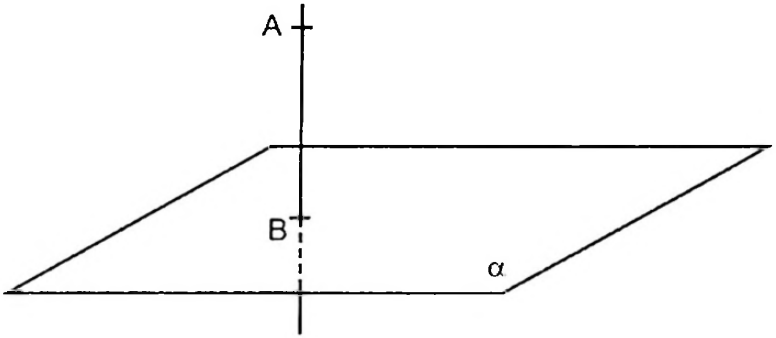
1. Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a todas as retas do plano que não passam pelo ponto de interseção de r com α.

2. Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com todas as retas do plano.



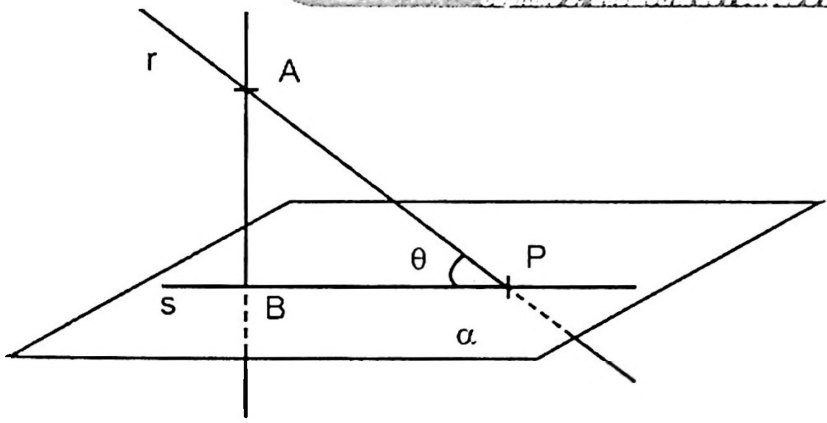
Teorema: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o traço da perpendicular ao plano traçada por esse ponto. A projeção ortogonal, sobre um plano, de uma reta oblíqua a ele é uma reta tal que cada um de seus pontos é projeção ortogonal de um ponto da reta dada sobre um plano.

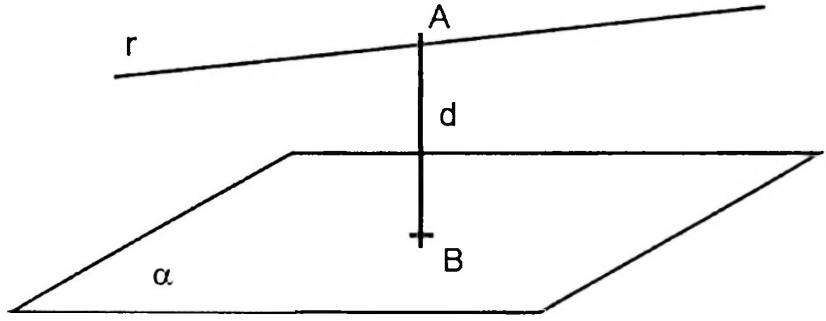


$AB = dist(A, \alpha)$

O ângulo formado entre um plano e uma reta oblíqua ao mesmo é o ângulo formado entre a reta oblíqua e a sua projeção ortogonal sobre o plano.

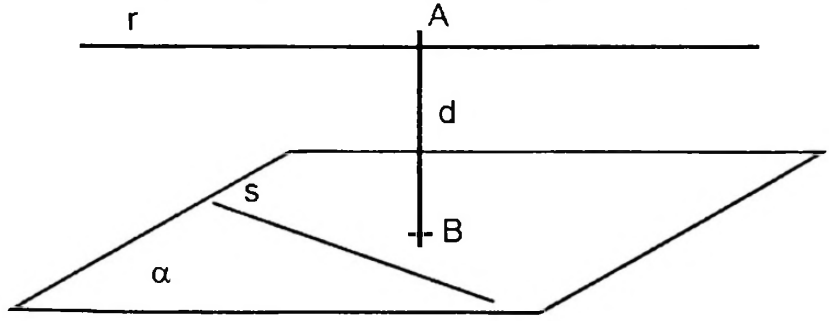


A distância entre uma reta paralela a um plano e esse plano é a distância de um de seus pontos ao plano.



AB = dist(r, α), onde AB ⊥ α.

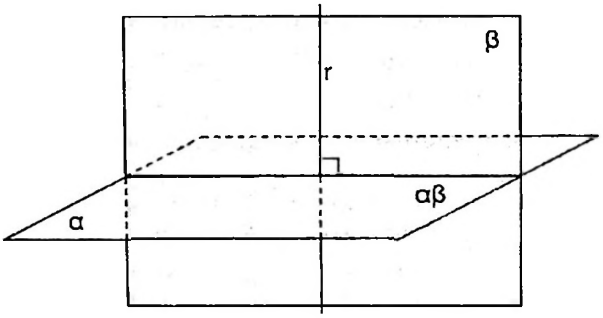
Dadas duas retas reversas r e s, a distância entre elas é a distância que vai de uma dessas retas até o plano paralelo a ela que passa pela outra reta.



9.7. ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS

9.7.1. Planos Perpendiculares

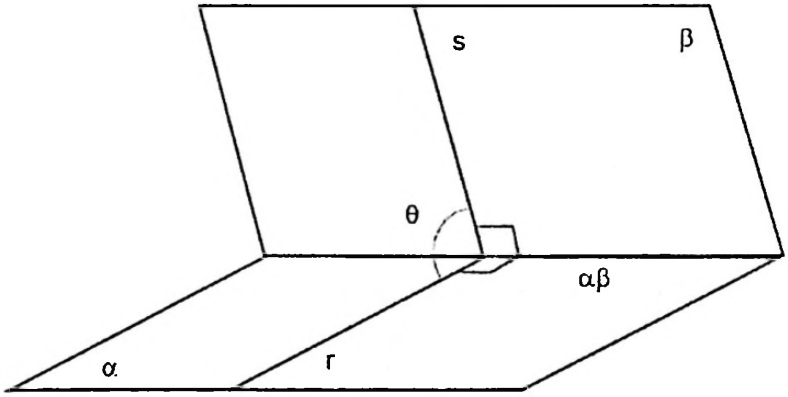
Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular a β. A existência de um plano perpendicular a outro baseia-se na existência de uma reta perpendicular a um plano.



9.7.2. Teorema: Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta deles é perpendicular a interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro plano.

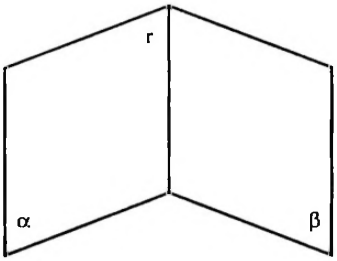
9.7.2. Determinação

O ângulo entre dois planos é o ângulo formado por duas retas, uma de cada plano, perpendiculares à interseção dos dois planos.

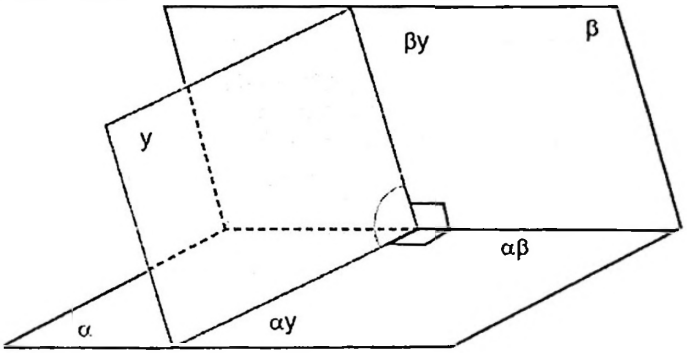


9.7.3. Ângulo diedro

Ângulo diedro ou somente *diedro* é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos no mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces.



Chama-se **seção reta** ou **seção normal** de um ângulo diedro à interseção do ângulo diedro com um plano perpendicular à sua aresta.



A medida de um diedro é a medida de sua seção reta. Assim, um diedro de 60° é um diedro cuja seção normal mede 60°. Um diedro reto mede 90°, uma vez que sua seção normal é um ângulo reto.

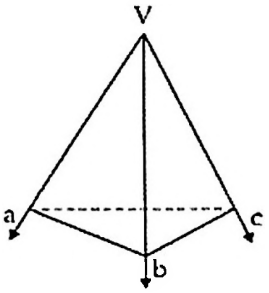
Um diedro pode ser classificado de acordo com sua seção normal. Um diedro é reto se sua seção normal é um ângulo reto. Um diedro é agudo se sua seção reta normal é um ângulo agudo. Um diedro é obtuso se sua seção normal é um ângulo obtuso.

Os dois semi planos que determinam um diedro dividem o espaço em dois semi espaços. O semi espaço que contém o ângulo agudo formado pelos semi plano é denominado de interior do diedro. O outro semi espaço é denominado de exterior do diedro. O interior de um diedro é convexo e o exterior é côncavo.

9.7.3. Triedros

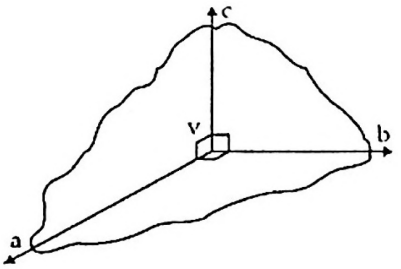
9.7.3.1. Definição e Elementos

Considere três semi-retas não-coplanares, concorrentes em um ponto V, Va, Vb e Vc, e os setores angulares $F_1 = aVb$, $F_2 = bVc$ e $F_3 = aVc$. Triedro é a reunião dos setores F_1, F_2 e F_3.



No triedro V(abc), tem-se os seguintes elementos:
(i) vértice: o ponto V.
(ii) arestas: as semi-retas V_a, V_b e V_c.
iii) faces: os setores angulares F_1, F_2 e F_3.

Caso as três faces são setores de ângulos retos, o triedro é denominado de **triedro tri-retângulo**, como ilustrado na figura abaixo.



9.7.3.2. Triedros Congruentes

Dois triedros são congruentes se, e somente se, as faces de um deles são ordenadamente congruentes às faces do outro, e os diedros de um deles são ordenadamente congruentes aos diedros do outro.

9.7.3.3. Relação entre as Medidas das Faces

Teorema: Em todo triedro, qualquer face tem medida menor que a soma das medidas das outras duas.

Teorema: Em todo triedro, a soma das medidas das faces é menor que 360°.

Considere o triedro V(abc) e adote que f_1, f_2 e f_3 são as medidas das faces aVb, bVc e aVc.

Pelos teoremas segue que:

$$f_1 < f_2 + f_3; \quad f_2 < f_1 + f_3; \quad f_3 < f_1 + f_2 \quad \text{e} \quad f_1 + f_2 + f_3 < 360°.$$

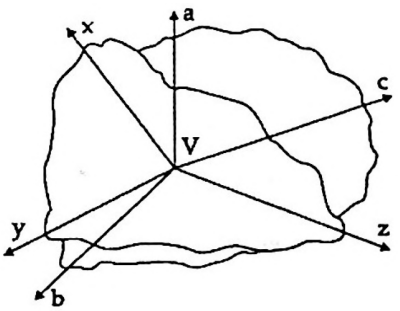
9.7.3.4. Triedros Polares ou Suplementares

Dois triedros são classificados como polares se e somente se:

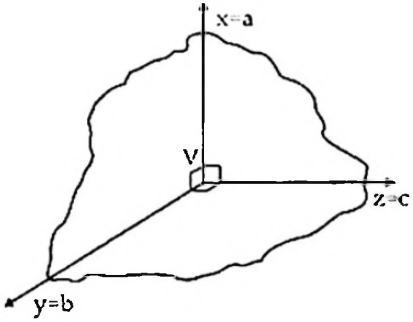
(i) têm mesmo vértice;
(ii) suas arestas são respectivamente perpendiculares aos planos das faces do outro;
(iii) formam ângulos agudos com as arestas correspondentes do outro.

Assim, V(xyz) é polar de V(abc) se e somente se:

V_x, V_y, V_z são respectivamente perpendiculares aos planos (b, c), (a, c) e (a, b), e os ângulos $\angle aVx$, $\angle bVy$ e $\angle cVz$ são agudos.

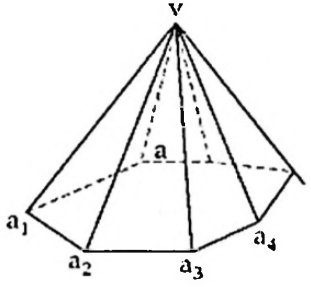


Observação: Se o triedro V(abc) é tri-retângulo, então ele coincide com seu polar V(xyz). Em outras palavras, o triedro tri-retângulo é autopolar.



9.7.3.5. Ângulos Poliédricos

Considere $n \geq 3$ semi-retas não-coplanares Va_1, Va_2,..., Va_n e os setores angulares $F_1 = a_1Va_2$, $F_2 = a_2Va_3$, ..., $F_n = a_nVa_1$.



No ângulo poliédrico $V(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ tem-se:

(i) V é o vértice.

(ii) Va_1, Va_2, ..., Va_n são arestas;

(iii) Va_1a_2, Va_2a_3, ..., Va_na_1 são as faces.

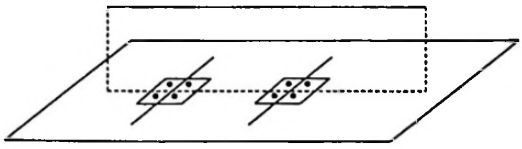
Observações:

1) Um ângulo poliédrico com n arestas apresenta n diedros, cada um deles determinado por duas faces consecutivas.

2) A secção de um ângulo poliédrico é um polígono com um único vértice em cada aresta.

Exercícios Resolvidos

1) Classifique em Verdadeiro ou Falso as afirmativas seguintes:
a) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
b) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
c) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
d) Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado, então ele é perpendicular à reta.
e) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
f) Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.
g) Uma reta e um plano, perpendiculares a uma reta em pontos distintos, são paralelos.
Solução:
a) Falso. A reta que é interseção entre os dois planos é um contra exemplo.
b) Falso. Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos entre si e não perpendiculares entre si.
c) Verdadeiro. Suponha que os planos α e β são paralelos. O ângulo diedro formado entre um outro plano γ com α é igual ao ângulo diedro formado entre γ e β. Se este ângulo é 90°, γ é perpendicular tanto a α quanto a β.
d) Falso. A reta que é interseção entre os dois planos é um contra exemplo. Esta reta é paralela a ambos os planos.
e) Verdadeiro. Como as duas retas r e s, contidas no plano α, são paralelas e distintas, então os dois pontos de interseção destas com uma terceira reta t são distintos e pertencem ao plano α. Segue, então, que $t \in \alpha$. Note que não é necessário que t seja perpendicular a r e s, bastando que seja concorrente tanto a r quando a s.
f) Verdadeiro. A figura abaixo ilustra uma possibilidade.

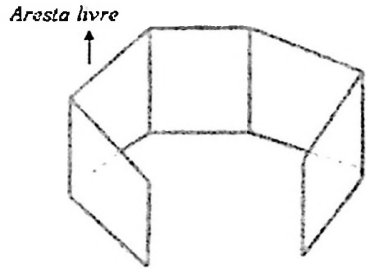


g) Verdadeiro. Suponha que o plano α e a reta r são perpendiculares à reta s. Se α e r não forem paralelos então são secantes, fazendo com que exista um triângulo formado pelos pontos de interseção, tomados dois a dois de α, r e s. Como o ângulo entre α e s e entre r e s é 90°, segue que a soma dos ângulos deste triângulo é maior que 180°, que é uma contradição. Assim, α e r são paralelos.

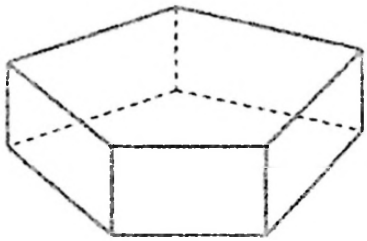
Poliedros

9.8. DEFINIÇÕES

9.8.1. Superfície Poliédrica Limitada Convexa: É a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos tais que:
(i) dois polígonos não estão em um mesmo plano;
(ii) cada lado do polígono não está em mais de dois polígonos;
(iii) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
(iv) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço;



Superfície poliédrica limitada convexa aberta

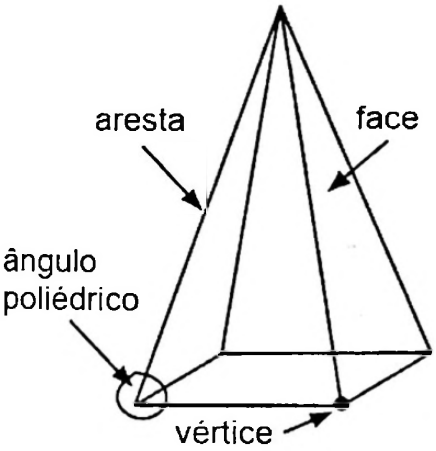


Superfície poliédrica limitada convexa fechada

9.8.2. Poliedro Convexo: Considere um número finito $n \geq 4$ de polígonos planos convexos tais que:
(i) dois polígonos não estão em um mesmo plano;
(ii) cada lado do polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
(iii) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos em um mesmo semi-espaço.

Nestas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado poliedro convexo.

9.8.3. Elementos de um Poliedro



Face do poliedro - É qualquer polígono plano que limita o poliedro.
Aresta do poliedro - É o segmento obtido da intersecção de duas faces.
Vértice do poliedro - É o ponto obtido da intersecção de três ou mais arestas.
Ângulo poliédrico - É a região do espaço constituída por um vértice e três ou mais arestas.
Poliedro convexo - Um poliedro é classificado como convexo se, dados dois pontos quaisquer do poliedro, o segmento que os une está inteiramente contido nele.

9.9. CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS.

Os poliedros podem ser classificados com relação ao número de faces:

4 faces – tetraedro	5 faces – pentaedro	6 faces – hexaedro
7 faces – heptaedro	8 faces – octaedro	9 faces - eneaedro
10 faces – decaedro	11 faces – undecaedro	12 faces – dodecaedro
13 faces – tridecaedro	14 faces – quadridecaedro	15 faces - pentadecaedro
16 faces – hexadecaedro	17 faces – heptadecaedro	18 faces – octodecaedro
19 faces – eneadecaedro	20 faces – icosaedro	

9.10. RELAÇÃO DE EULER: Em todo poliedro convexo ou superfície poliédrica vale a relação

$$V + F = A + 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Demonstração:

Inicialmente será calculada a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. As faces serão enumeradas de 1 até F e seja o n_k o número de lados da k-ésima face, onde $1 \leq k \leq F$. Ressaltando que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual $\pi(n-2)$. Portanto, a soma dos ângulos internos de todas as faces de P é dada pela seguinte expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \ldots + \pi(n_F - 2) = \pi[(n_1 + n_2 + \ldots + n_F) - 2F]$$

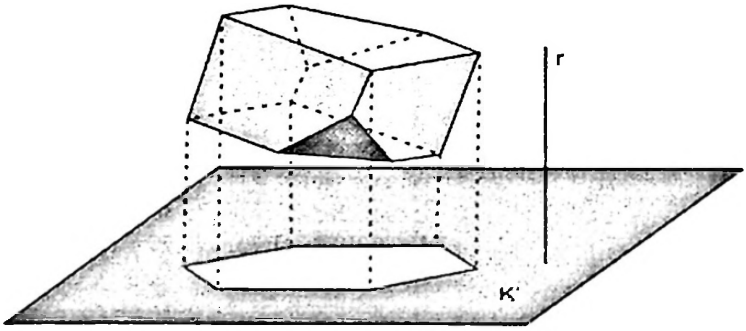
Como cada aresta pertence a duas faces, segue que a soma do número de lados de todas as faces do poliedro é igual ao dobro do número de arestas. Logo:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \quad (1)$$

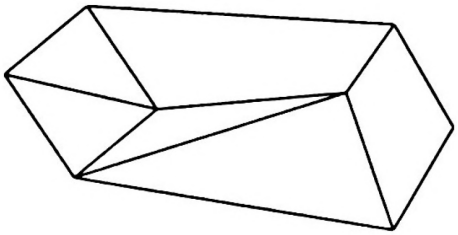
A soma de todos os ângulos internos das faces do poliedro será agora calculada de outra forma. Suponha que r é uma reta que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. Suponha também que H é um plano que não intersecte P e que seja perpendicular à reta r. O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas retas verticais.

Suponha agora que você está olhando para a poliedro, em uma posição acima deste em relação ao plano H, de modo que a direção de seu olhar forma um ângulo reto com o plano H. Algumas arestas do poliedro serão vistas, enquanto que outras não. As arestas vistas formarão a parte superior do poliedro e as arestas não vistas formarão a parte inferior do poliedro.

Na figura abaixo está a representação de um poliedro e da projeção ortogonal sobre o plano H das arestas do contorno do poliedro.



As projeções ortogonais das arestas da parte superior do poliedro formarão sobre o plano H uma figura geométrica K_s semelhante à imagem abaixo, onde cada segmento de reta é a projeção de uma única aresta de P visível quando é realizada uma vista superior do poliedro.



Estes segmentos podem ser divididos em duas categorias: segmentos do contorno de K_s e segmentos do interior de K_s.

O mesmo processo pode ser feito com as arestas da parte inferior do poliedro, cuja projeção sobre o plano H formarão uma figura K_i. Parte dos segmentos que formam K_i estarão em seu contorno e a outra parte em seu interior. Repare que os contornos de K_s e K_i são iguais.

Depois dessas considerações, pode-se calcular novamente (por outro processo) a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma da soma dos ângulos internos de sua projeção sobre o plano H (ambos são polígonos de mesmo número de lados). Sejam: V_1 o número de vértices interiores de K_s, V_2 o número de vértices interiores de K_i e V_0 o número de vértices do contorno do poliedro de K_s (é igual ao de K_i). Então:

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

Observe também que K_s é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e que apresenta V_1 pontos interiores. A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos. A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno é igual a $\pi(V_0 - 2)$. Deste modo, somando todos os ângulos de K_s obtém-se:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

De forma análoga, pode-se obter para a soma de todos os ângulos de K_i:

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

Somando as duas igualdades:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) = 2\pi(V - 2) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2) e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja:

$$V + F = A + 2$$

Perceba que na demonstração foi utilizado o fato das figuras K_s e K_i serem convexas, fato que restringem a aplicação da relação de Euler para poliedros convexos.

9.10.1. Soma dos ângulos das faces

A soma dos ângulos de todas as fazes de um poliedro convexo é

$$S = (V - 2)360^\circ$$

Demonstração:

Sejam n_1, n_2, ..., n_F os números de lados das faces 1, 2, ..., F, respectivamente. Assim, a dos ângulos da face i, $1 \le i \le F$, é dada por $S_i = (n - 2)180^\circ$. Logo:

$S = (n_1 - 2)180^\circ + (n_2 - 1)180^\circ + ... + (n_F - 2)180^\circ = (n_1 + n_2 + ... + n_F)180^\circ - F.360^\circ$

Como cada aresta é contada duas vezes quando soma-se o número de lados de todas faces, segue que $n_1 + n_2 + ... + n_F = 2A$.

Assim: $S = A.360^\circ - F.360^\circ = (A - F)360^\circ \Rightarrow S = (V - 2)360^\circ$

9.10.2. Poliedros de Platão

Um poliedro é dito de Platão se:

(i) todas as faces têm o mesmo número de arestas;

(ii) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas;

(iii) vale a relação de Euler: $V + F = A + 2$.

Teorema: Existem apenas 5 poliedros de Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro

Demonstração:

Considere um poliedro (convexo) regular P com V vértices, A arestas e F faces. Denote por n o número de lados do polígono que forma cada face e por p o número de arestas concorrentes em cada vértice de P. Tem-se então a relação $2A = nF$ e $2A = pV$, que fornece: $A = \frac{nF}{2}$ e $V = \frac{nF}{2}$.

Substituindo A e V na relação de Euler:

$$V + F = A + 2 \Leftrightarrow \frac{nF}{p} + F = \frac{nF}{2} + 2 \Leftrightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn} \quad (1)$$

Uma vez que o número de faces F e o número p de arestas concorrentes em cada vértice são números naturais, deve-se ter:

$$2p + 2n - pn > 0 \Leftrightarrow 2n > p(n - 2) \Leftrightarrow \frac{2n}{n - 2} > p$$

Como o número de arestas p concorrentes em cada vértice em um poliedro deve ser maior ou igual a 3:

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \Leftrightarrow \frac{2n}{n-2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{6-n}{n-2} > 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \Leftrightarrow n = 3, 4 \text{ ou } 5$$

Analisando cada possibilidade:

i) Para n = 3 o poliedro é formado apenas por triângulos. Substituindo em (1) obtém-se $F = \frac{4p}{6-p}$.

Substituindo-se valores, encontra-se como resposta p = 3 (F = 4, ou seja, tetraedro), p = 4 (F = 8, ou seja, octaedro) e p = 5 (F = 20, ou seja, icosaedro).

ii) Para n = 4 o poliedro é formado apenas por quadriláteros. Substituindo em (1) obtém-se $F = \frac{2p}{4-p}$. Substituindo valores numéricos, conclui-se que a única possibilidade é p = 3 (F = 6, ou seja, hexaedro).

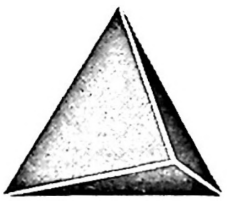
iii) Para n = 5 o poliedro é formado apenas por pentágonos. Substituindo em (1) obtém-se $F = \frac{4p}{10-3p}$. Substituindo valores numéricos, conclui-se que a única possibilidade é p = 3 (F = 12, ou seja, dodecaedro).

9.10.3. Poliedro regular

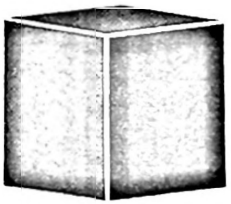
Um poliedro é dito regular se tem todas as faces formadas por polígonos regulares e congruentes. Existem apenas 5 poliedros regulares

Tetraedro regular	3
Hexaedro regular	4
Octaedro regular	3
Dodecaedro regular	5
Icosaedro regular	3

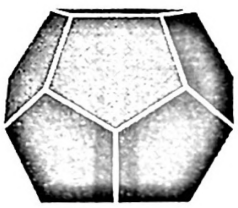
Nº de lados de cada face



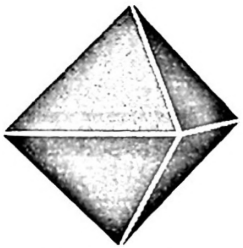
Tetraedro



Cubo



Dodecaedro



Octaedro

Icosaedro

Perceba que:
- Todo poliedro regular é de Platão mas nem todo poliedro de Platão é regular.
- Todo poliedro regular pode ser inscrito e circunscrito numa esfera.

9.10.4. Propriedades:

9.10.4.1. Se F_i é o número de faces que possuem i lados:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ...$$

Demonstração:
Note que F_3 é a quantidade de faces que são triângulos, F_4 é a quantidade de faces que são quadriláteros e assim por diante. Perceba que $i.F_i$ é a quantidade de arestas de todas as faces que possuem i lados. Como cada aresta pertence a exatamente duas faces, tem-se que

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ...$$

é igual ao dobro do número de arestas.

9.10.4.2. Se V_i é o número de vértices em que concorrem i arestas:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ...$$

Demonstração:
Repare que V_3 é a quantidade de vértices onde concorrem 3 arestas, V_4 é a quantidade de vértices onde concorrem 4 arestas e assim por diante. Perceba que $i.V_i$ representa a quantidade total de arestas que concorrem em vértices com exatamente i arestas. Como a união de dois vértices é uma aresta, segue que

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ...$$

é igual ao dobro do número de arestas.

9.10.4.3. Se V_i é o número de vértices em que concorrem i arestas:

$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + ...$$

Demonstração:
Sabe-se que $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + ...$ e $2V = 2V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 2V_6 + ...$
Subtraindo estas duas equações:

$$2A - 2V = 2(F - 2) = V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + ... \Rightarrow$$
$$2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + ...$$

9.10.4.4. Se F_i é o número de faces que possuem i lados:

$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 5F_7 + ...$$

Demonstração:
Sabe-se que $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ...$ e $2F = 2F_3 + 2F_4 + 2F_5 + 2F_6 + ...$
Subtraindo estas duas equações:

$$2A - 2F = 2(V - 2) = F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 5F_7 + ... \Rightarrow$$
$$2V = 4 + F_3 + 2F_4 + 3F_5 + 4F_6 + 5F_7 + ...$$

Exercícios Resolvidos

1) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

Solução:

Pelo enunciado A – V = 6. Pela relação de Euler:

$V + F = A + 2 \Rightarrow F = (A - V) + 2 = 6 + 2 = 8$

2) Um poliedro convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Calcule:

a) O total de faces desse poliedro descritas no enunciado.

b) O total de arestas.

c) O número de vértices.

Solução:

a) $F = F_3 + F_4 + F_5 = 2 + 4 + 4 = 10$

b) Sabe-se que cada aresta pertence a exatamente duas faces. Desta maneira:

$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 = 3.2 + 4.3 + 5.4 = 38 \Rightarrow A = 19$

c) $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 10 = 19 + 2 \Rightarrow V = 11$

3) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

Solução:

Pelo enunciado tem-se $F_5 = 3$ e $A = 4F_3$

Sabe-se que cada aresta pertence a exatamente duas faces. Desta maneira:

$2A = 3F_3 + 5F_5 \Rightarrow 8F_3 = 3F_3 + 15 \Rightarrow 5F_3 = 15 \Rightarrow F_3 = 3$

Assim: $F = F_3 + F_5 = 3 + 3 = 6$

4) Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices, concorrem 5 arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:

a) 16 b) 18 c) 24 d) 30 e) 44

Solução: Alternativa A

Pelo enunciado segue que $V = 14$, $V_4 = 6$, $V_3 = 4$ e $V_5 = 4$.

Como $2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \ldots$ então:

$2F = 4 + 4 + 2.6 + 3.4 = 32 \Rightarrow F = 16$

Exercícios de Vestibular

1) (Unesp-95) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s, reversas. Seja t a perpendicular comum a r e a s. Então:
a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.
e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

2) (Puccamp-95) Considere as afirmações a seguir.
I. Duas retas distintas determinam um plano.
II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.
É correto afirmar que
a) apenas II é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) apenas I e II são verdadeiras.
d) apenas I e III são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

3) (UEPB-07) Sejam as afirmativas:
I. Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.
II. Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.
III. Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.
IV. Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.
Podemos concluir que
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas II é verdadeira.
c) todas são falsas.
d) apenas III é verdadeira.
e) apenas IV é verdadeira.

4) (UEPB-11) Considere as sentenças:
I - Uma reta perpendicular a uma reta de um plano é perpendicular a esse plano.
II - Uma reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.
III - Dois planos distintos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
IV - Se a interseção entre duas retas é o conjunto vazio, elas são paralelas.
O número de sentenças verdadeiras acima é:
a) zero. b) quatro. c) três. d) dois. e) um.

5) (EsPCEx-97) Considere as seguintes proposições:
I- Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.
II- Uma reta e um ponto determinam sempre um único plano.
III- Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.
Pode-se afirmar que:
A) Só I é verdadeira
B) Só III é verdadeira
C) Só I e III são verdadeiras
D) Só III é falsa
E) Só I e III são falsas.

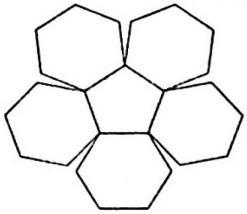
6) Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que o número de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números 2 e 3 e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.

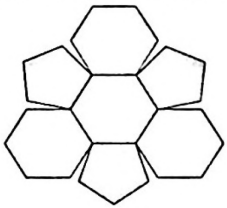
7) (UEM-12) Considerando o espaço tridimensional, suponha que r e s sejam retas perpendiculares em um ponto A, e que s seja concorrente com uma reta t em um ponto B diferente de A. Com relação ao exposto, assinale o que for correto.
01) Se a reta s é perpendicular à reta t, então a reta r também é perpendicular à reta t.
02) Se a reta t é concorrente com a reta r, então as retas r, s e t são coplanares.
04) Se a reta t é paralela à reta r, então as retas r, s e t estão contidas em um mesmo plano.
08) Se as retas r e t são reversas, então r e t não são ortogonais.
16) Se a reta t é perpendicular ao plano que contém r e s, então a reta r é ortogonal à reta t.

8) (UFC-00) Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos. Então o número de faces deste poliedro é:
a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

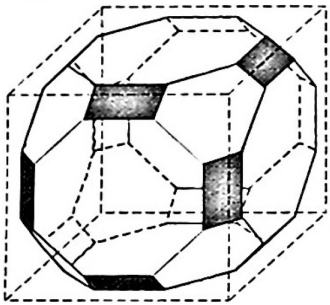
9) (PUC/RS-00) Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais. O número de arestas e o número de vértices deste poliedro são, respectivamente,
a) 30 e 40 b) 30 e 24 c) 30 e 8 d) 15 e 25 e) 15 e 9

10) (UFPE-00) Um poliedro convexo é formado de faces pentagonais e hexagonais regulares. Cada pentágono é adjacente a cinco hexágonos e cada hexágono é adjacente a três pentágonos e três hexágonos que se alternam conforme a ilustração seguinte. Quantas são as faces do poliedro?





11) (UFPE-00) O sólido convexo da figura abaixo é obtido de um cubo, construindo octógonos em suas faces e unindo os vértices dos octógonos de forma a se obter um sólido com seis faces octogonais, oito faces hexagonais e doze faces retangulares. Indique a soma dos dígitos do número de diagonais do sólido. Nota: uma diagonal de um poliedro é um segmento unindo dois vértices que não é aresta nem diagonal da face do sólido.



12) (UECE-12) Se um poliedro convexo tem exatamente 20 faces e todas são triangulares, então o número de vértices deste poliedro é
a) 16 b) 14 c) 12 d) 10.

13) (UEM-12) Sabendo que r, s e t são três retas no espaço tridimensional com r e s paralelas distintas, assinale o que for correto.
01) Se a reta r é perpendicular a um plano α, então a reta s também é perpendicular ao plano α.
02) Se a reta t é concorrente com a reta s, então t também é concorrente com a reta r.
04) Se um plano β contém a reta s, então o plano β também contém a reta r.
08) Se a reta t é perpendicular à reta r, então t é perpendicular ou ortogonal à reta s.
16) Se as três retas r, s e t são paralelas distintas, então existe um plano α que contém as três retas.

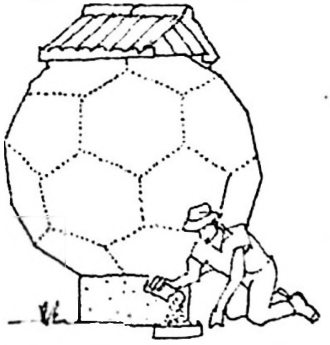
14) Um poliedro convexo possui 1 ângulo pentaédrico, 10 ângulos tetraédricos, e os demais triédricos. Sabendo que o poliedro tem: número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares, 11 faces pentagonais, e no total 21 faces, calcule o número de vértices do poliedro convexo.

15) (AFA-03) Um poliedro platônico, cujas faces são triangulares, tem 30 arestas. Determine o número de arestas que concorrem em cada vértice.
a) 3 b) 5 c) 4 d) 6

16) (AFA-04) Assinale a única alternativa FALSA
a) Se um plano α é perpendicular a um plano β, então existem infinitas retas contidas em α e perpendiculares a β.
b) Se α e β são planos perpendiculares entre si e γ é um plano perpendicular à reta comum a α e β, então pode-se afirmar que as retas r, $r = \alpha \cap \gamma$ e s, $s = \beta \cap \gamma$, são perpendiculares entre si.
c) Se duas retas r e s são reversas, então não existem dois planos α e β, perpendiculares entre si, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
d) Duas retas do espaço, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.

17) (AFA-06) Considere as afirmativas abaixo:
I - Se α e β são planos interceptando-se na reta r e a reta s é paralela a α e a β, então s também é paralela a r.
II - Se uma reta intercepta um plano α, existe um plano β paralelo a α que não é interceptado pela reta.
III - Se dois planos são paralelos, toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano.
IV - Dois planos perpendiculares a um terceiro plano são sempre paralelos entre si.
V - Se três retas têm um ponto comum, elas são coplanares. O número de afirmativas verdadeiras é
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

18) (UFPel-08) No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da póscolheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.



http://www.tibarose.com/port/boletim.htm, acessado em 10/10/2007. [Adapt.]

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem
a) 90 arestas e 60 vértices. b) 86 arestas e 56 vértices.
c) 90 arestas e 56 vértices. d) 86 arestas e 60 vértices.
e) 110 arestas e 60 vértices.

19) (Unifei-10) O icosaedro regular é um poliedro convexo formado por 20 faces triangulares. Quantas diagonais tem o icosaedro?

20) (UFC-08) O número de faces de um poliedro convexo com 20 vértices e com todas as faces triangulares é igual a:
A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

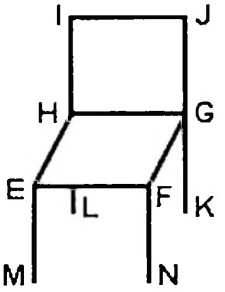
21) (ITA-84) Sejam as afirmações:
I. Por um ponto passa uma única reta.
II. Um ponto e uma reta determinam um plano.
III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.
IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.
Podemos garantir que:
a) apenas III é verdadeira. d) apenas II e III são verdadeiras.
b) I e II são falsas. e) apenas II e IV são verdadeiras.
c) apenas I é falsa.

22) (Fatec-07) A reta r é a intersecção dos planos α e β, perpendiculares entre si. A reta s, contida em α, intercepta r no ponto P. A reta t, perpendicular a β, intercepta-o no ponto Q, não pertencente a r. Nessas condições, é verdade que as retas
a. r e s são perpendiculares entre si. b. s e t são paralelas entre si.
c. r e t são concorrentes. d. s e t são reversas.
e. r e t são ortogonais.

23) (UFG-05) Observe e classifique as afirmações abaixo como sendo verdadeiras ou falsas:
I. Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, então as interseções são retas paralelas.
II. Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
III. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
IV. Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.
Marque a alternativa CORRETA
a. Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
b. Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

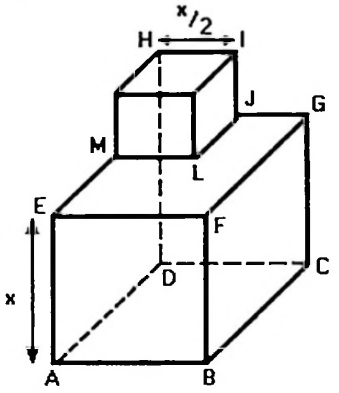
c. Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
d. Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
e. Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.

24) (UFRN-02) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim,
a) Os planos EFN e FGJ são paralelos.
b) HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
c) Os planos HIJ e EGN são paralelos.
d) EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

25) (UEL-94) O sólido representado na figura a seguir é formado por um cubo de aresta de medida x/2 que se apóia sobre um cubo de aresta de medida x.



A interseção do plano EGC com o plano ABC é
a) vazia.
b) a reta $\overline{AC}$.
c) o segmento de reta $\overline{AC}$.
d) o ponto C.
e) o triângulo AGC.

26) (UFSCar-01) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a α, a interseção dessa reta com α é um ponto

chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

27) (EsPCEx-02) Considere as afirmações abaixo:

I – Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as interseções são retas paralelas.

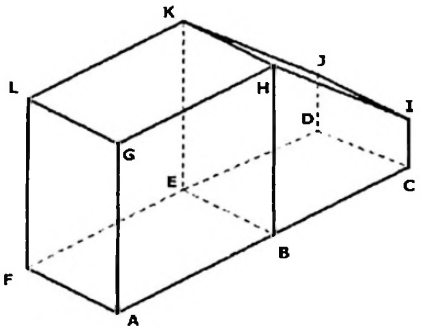
II – Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

III – Se a interseção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

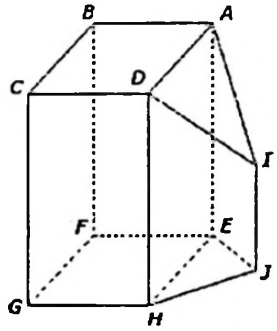
a) todas são verdadeiras.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas II e III são verdadeiras.
e) todas são falsas.

28) (EsPCEx-12) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas LB e GE; as retas AG e HI e as retas AD e GK. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.
b) reversas; reversas; paralelas.
c) concorrentes, reversas; paralelas.
d) reversas; concorrentes; reversas.
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

29) (EsPCEx-08) A ilustração a seguir representa um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH e um prisma reto triangular de base EHJ seccionado por um plano, gerando o triângulo isósceles ADI, cuja medida AI é igual à medida DI. Diante das informações acima, podemos afirmar que



a) a reta JH é ortogonal à reta DC.
b) as retas EJ e FG são reversas.
c) a reta IJ é ortogonal à reta EF.
d) a reta AI é concorrente à reta BC.
e) a reta AI é paralela à reta EJ.

30) (EsPCEx-11) Considere as seguintes afirmações:
I- Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.
II- Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.
III- Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.
Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)
a) Somente II
b) I e II
c) I e III
d) II e III
e) I, II e III

31) (EsPCEx-09) Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s. Dentre as afirmações abaixo:
I – Se as retas AC e BD são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.
II – Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.
III – Se AC e BD forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.
Pode-se concluir que
a) somente a I é verdadeira.
b) somente a II é verdadeira.
c) somente a III é verdadeira.
d) as afirmações II e III são verdadeiras.
e) as afirmações I e III são verdadeiras.

32) Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é igual a 5.

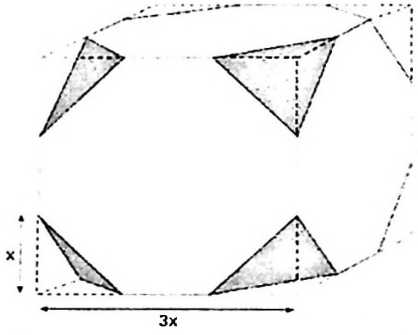
33) Um poliedro convexo tem 12 faces triangulares e as demais, pentagonais. Sabendo que o número de arestas é o triplo do número de faces pentagonais, então a soma dos ângulos de todas as faces pentagonais é, em radianos, igual a

a) 3π b) 12π c) 36π d) 64π e) 108π

34) Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos. Então o número de faces deste poliedro é:

a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

35) (Insper-08) Considere um cubo com arestas medindo 3x. De cada vértice desse cubo retira-se um tetraedro cortando-se suas arestas pelos pontos que distam x desse vértice. Obtém-se, assim, o poliedro mostrado na figura ao lado. O número de vértices e o número de arestas desse poliedro são, respectivamente, iguais a



a) 36 e 48. b) 36 e 36. c) 36 e 24. d) 24 e 36. e) 24 e 24.

36) (Ucpel-05) Em um poliedro convexo de 20 faces, das quais 7 são pentagonais, 2 quadrangulares e 11 triangulares, pode-se afirmar que o número de vértices é:

a) 20 b) 16 c) 18 d) 12 e) 14

37) (Ucpel-06) O dodecaedro romboidal é um poliedro limitado por doze losangos iguais. Então o número de arestas é

a) 28 b) 36 c) 24 d) 34 e) 16

38) (Ucpel-06) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é

a) 12 b) 4 c) 8 d) 10 e) 6

39) Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é
a) 4 b) 6 c) 8 d) 9 e) 10

40) (UEPB-09) Um poliedro convexo tem 25 arestas e todas as suas faces pentagonais. Então o número de faces e de vértices do poliedro são respectivamente:
a) 14 e 16 b) 12 e 14 c) 10 e 14
d) 10 e 12 e) 10 e 17

41) Um poliedro convexo é formado por faces quadrangulares e 4 faces triangulares. A soma dos ângulos de todas as faces é igual a 12 retos. Qual o número de arestas desse poliedro?
a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 1

42) (Escola Naval-94) Um poliedro convexo possui 11 faces. Sabemos que, de um de seus vértices partem 5 arestas, de 5 outros vértices partem 4 arestas e de cada vértice restante partem 3 arestas. O número de arestas do poliedro é:
a) 20 b) 25 c) 30 d) 37 e) 41

43) (Escola Naval-90) Um poliedro convexo tem 6 faces retangulares e 12 faces triangulares. O número de diagonais desse poliedro é:
a) 49 b) 52 c) 60 d) 61 e) 91

44) (Escola Naval-02) Um poliedro convexo de 25 arestas tem faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces quadrangulares vale o dobro do número de faces pentagonais e o número de faces triangulares excede o de faces quadrangulares em 4 unidades. Pode-se afirmar que o número de vértices deste poliedro é:
a) 14 b) 13 c) 11 d) 10

45) (IME-96) Determine os números naturais n para os quais existem poliedros convexos de n arestas.

46) (IME-57) Um poliedro convexo apresenta faces triangulares, quadrangulares e pentagonais. O número de faces triangulares excede o número de faces pentagonais de duas unidades. Pergunta-se o número de faces de cada espécie, sabendo-se que o poliedro tem sete vértices.

47) (ITA-11) Considere as afirmações:
I – Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida a = 120°.

II – Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30°, 45°, 50°, 50° e 170°.
III – Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.
IV – A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880°.
Desta, é (são) correta(s) apenas.
a) II b) IV c) II e IV d) I, II e IV e) II, III e IV

48) (ITA-05) Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200°. O número de vértices deste prisma é igual a
a) 11 b) 32 c) 10 d) 20 e) 22

49) (ITA-99) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:
a) 10 b) 17 c) 20 d) 22 e) 23

50) (ITA-98) Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo **m** e **n**, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:
a) m = 9, n = 7 b) m = n = 9 c) m = 8, n = 10
d) m = 10 , n = 8 e) m = 7 , n = 9

51) (IME-67) Um prisma A, um prisma B, e uma pirâmide C têm ao todo 32 arestas. Sabe-se que A tem mais arestas que B, dizer o número de lados da base de cada sólido.

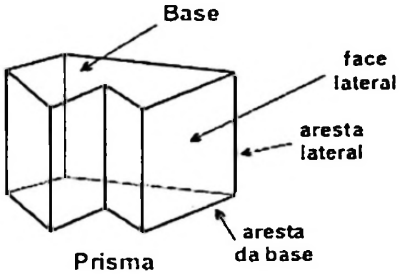
Prismas

10.1. CARACTERÍSTICAS

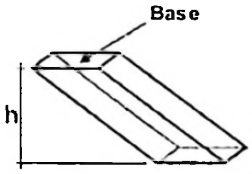
(i) Todo prisma tem duas bases paralelas, congruentes e alinhadas entre si.
(ii) Todas as arestas laterais do prisma são paralelas e congruentes entre si.
(iii) As faces laterais do prisma são formadas por paralelogramos.
(iv) A altura de um prisma é a distância entre os planos que contêm as suas bases.
(v) Denomina-se um prisma em função do polígono da sua base. Assim, um prisma que possui como base um triângulo é denominado de prisma triangular, enquanto que um prisma que possui como base um pentágono é denominado de prisma pentagonal.

10.2. TIPOS DE PRISMA

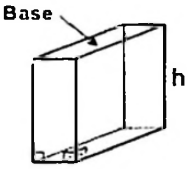
Prisma reto: as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.
Prisma oblíquo: as arestas laterais não são perpendiculares aos planos das base.
Prisma regular: é o prisma reta cujas bases são polígonos regulares e congruentes.



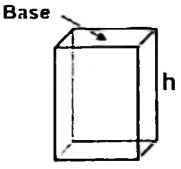
Prisma genérico



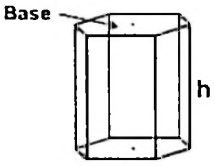
Prisma oblíquo



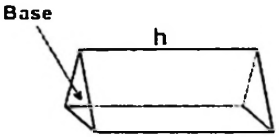
Prisma reto



Prisma quadrangular regular



Prisma hexagonal regular



Prisma triangular regular

Paralelepípedo é um prisma em que as bases são paralelogramos congruentes. Assim, a superfície de um paralelepípedo é a reunião de 6 paralelogramos, sendo duas bases e quatro faces laterais.

10.3. VOLUME

O volume de um sólido é a medida associada ao espaço ocupado por este sólido, de modo que:

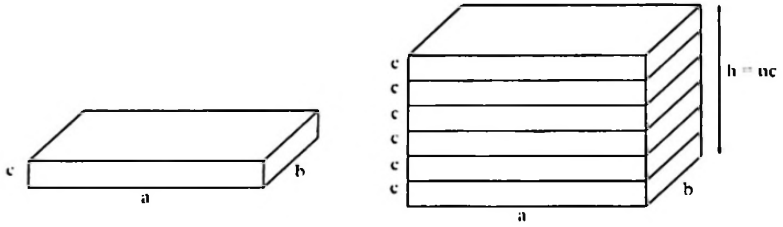
i) sólidos congruentes possuem volumes iguais;

ii) Se um sólido de volume V é a reunião de dois sólidos com volumes V_1 e V_2, respectivamente, e com nenhum ponto comum, então segue que $V = V_1 + V_2$.

10.3.1. Teorema: O volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é igual a **V = a.b.c.**

Demonstração:

Considere um paralelepípedo P de base a×b e altura c. Suponha que este paralelepípedo possui volume V. Suponha agora que um outro paralelepípedo P' é obtido justapondo n paralelepípedos P, como indica a figura abaixo.



Assim, o paralelepípedo P' obtido possui base com dimensões a e b, sendo sua altura h = nc. Pelo item (ii) do conceito de volume tem-se que V' = n.V (1)

No volume 1 desta coleção foi enunciado e demonstrado o Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

Seja $f: R_+ \to R_+$ uma função estritamente crescente (monótona injetiva, no caso geral). Se $f(n.x) = n.f(x)$, $\forall x \in R_+$ e $\forall n \in N$ (isto é, se f é uma proporcionalidade), então $f(k.x) = k.f(x)$, $\forall x \in R_+$ e $\forall k \in R_+$.

Para mais detalhes da demonstração deste teorema consulte o capítulo sobre **Função Afim** no volume 1 desta coleção.

Suponha que a função V(c) associa, para cada valor da altura c do paralelepípedo, o seu respectivo volume, mantendo fixas as dimensões a e b. Inicialmente, note que V(c) é crescente com c, $c \in IR^+$. Além disso, de (1) tem-se que $V(nc) = n.V(c)$, $n \in IN^*$. Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, tem-se que $V(kc) = k.V(c)$, $k \in IR^+$.

Como h = kc segue que $V(h) = \frac{h}{c} V(c) \Rightarrow \frac{V(h)}{V(c)} = \frac{h}{c}$ (2)

De (2) conclui-se que V(c) é diretamente proporcional a **c**.

Analogamente, pode-se demonstrar que o volume do paralelepípedo é diretamente proporcional à dimensão **a** e que o volume do paralelepípedo é diretamente proporcional à dimensão **b**. Conclui-se, portanto, que o volume de um paralelepípedo é diretamente proporcional ao produto de suas dimensões: V = k.**a.b.c**

Convencionou-se que o paralelepípedo reto retângulo que possui todas as dimensões iguais a uma unidade de comprimento (**a** = 1 u.c, **b** = 1 u.c e **c** = 1 u.c) possui volume igual a 1 $u.c^3$:

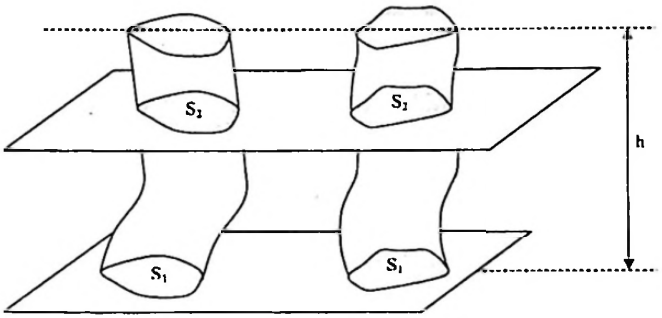
$$1 = k.1.1.1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow V = \mathbf{a.b.c}$$

Supondo que a base possui dimensões **a** e **b**, outra maneira de escrever o volume de um paralelepípedo reto retângulo é $V = S_b.h$

O paralelepípedo reto retângulo cujas 6 faces são quadrados denomina-se cubo. Sendo ℓ a aresta de um cubo, o volume de um cubo é igual a $V_{cubo} = \ell^3$.

10.4. PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Suponha dois sólidos de mesma altura e bases paralelas. Estes sólidos podem apresentar qualquer formato, não precisam, necessariamente, serem poliedros. Se, para cada plano traçado paralelo às suas bases, as áreas das seções transversais determinadas em cada sólido forem iguais, então os volumes dos dois sólidos são iguais.

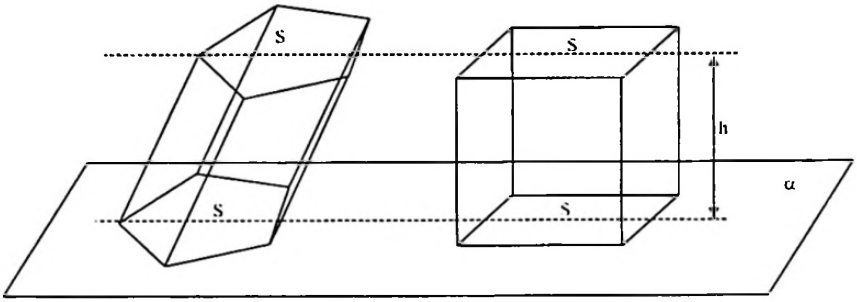


A demonstração deste princípio foge totalmente dos objetivos deste livro. Entretanto, seu resultado será utilizado na demonstração do cálculo do volume de diversos sólidos.

10.5. VOLUME DE UM PRISMA

10.5. Teorema: O volume V de um prisma, reto ou não, é igual a **V = S.h**, onde S é a área de uma das bases e h a distância entre os planos que contém as bases.

Demonstração:



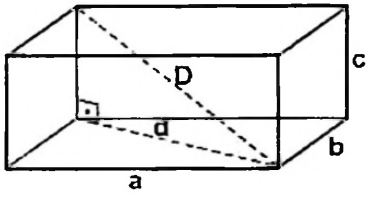
Considere um prisma qualquer, não necessariamente reto, de área de base S e altura h. Seja α o plano que contém a base do prisma. Suponha agora um paralelepípedo reto retângulo de altura h, cuja base também vale S e pertence ao mesmo plano α. O paralelepípedo e o prisma se encontram no mesmo semi-espaço determinado pelo plano α, conforme indica a figura. Traçando planos paralelos a α, as seções transversais determinadas no prisma e no paralelepípedo são iguais e valem S. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes do prisma e do paralelepípedo são iguais. Logo, o volume de qualquer prisma vale **V = S.h**.

Perceba que a fórmula demonstrada é válida independentemente se o prisma é ou não reto. Um erro bastante comum é considerar que a altura de um prisma é igual ao comprimento da aresta lateral. Isso é válido apenas quando o prisma é reto. A altura de um prisma é definida como a distância entre os planos que contém as bases do prisma, conforme está ilustrado na figura acima.

No caso de um prisma quadrangular, onde todas as faces são paralelogramos, existem três possível pares (base, altura), uma vez que é possível identificar três pares de faces paralelas. Independentemente do par (base, altura) escolhido, o valor do volume encontrado é sempre o mesmo: $\mathbf{V = S_b.h}$

10.6. PARALELEPÍPEDO RETO RETANGULAR

Suponha um paralelepípedo reto retangular de dimensões a × b × c, sendo a × b as dimensões da base.



10.6.1. Diagonais

Diagonal da base: Aplicando o teorema de Pitágoras segue que $\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Diagonal do paralelepípedo: Aplicando o teorema de Pitágoras tem-se que:

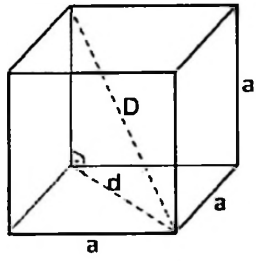
$D = \sqrt{d^2 + c^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

10.6.2. Áreas

Área da Base (inferior): $\mathbf{A_b = ab}$ Área Lateral: $\mathbf{A_L = 2ac + 2bc}$

Área Total: $\mathbf{A_T = 2ab + 2ac + 2bc}$

10.6.3. Cubo (Hexaedro Regular)



Em um cubo as dimensões são todas congruentes: a = b = c.

10.6.3.1. Diagonais

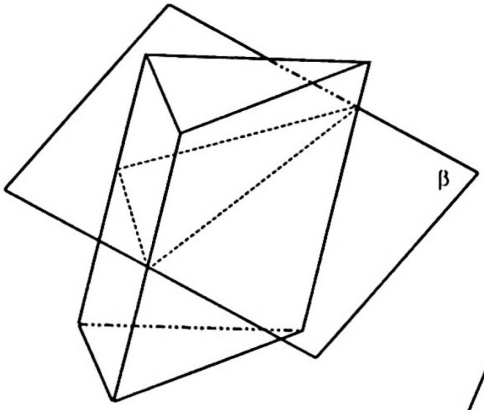
Diagonal da Base: $\mathbf{d = a\sqrt{2}}$ Diagonal do Cubo: $\mathbf{D = a\sqrt{3}}$

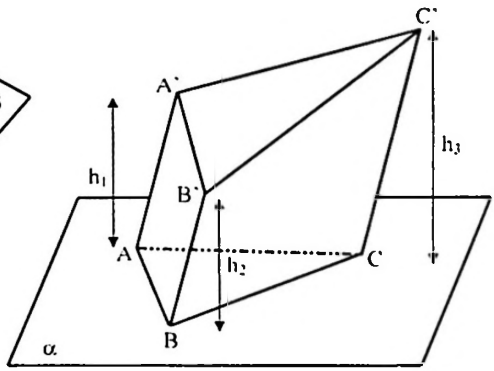
10.6.3.2. Áreas

Área da Base: $\mathbf{A_b = a^2}$ Área Lateral: $\mathbf{A_L = 4a^2}$ Área Total: $\mathbf{A_T = 6a^2}$

10.7. TRONCO DE PRISMA

Um tronco de prisma é obtido fazendo um corte em um prisma (não necessariamente reto) por meio de um plano não paralelo às bases do prisma. No exemplo abaixo, o plano β corta um prisma triangular, determinando dois troncos de prisma, cada um pertencente aos semi espaços definidos pelo plano β.





Considere o tronco de prisma ABC-A'B'C' representado na figura. A base ABC, de área A_b, do tronco de prisma define um plano α. As distâncias dos vértices A', B' e C' ao plano α são h_1, h_2 e h_3, respectivamente.

Para determinar o volume do tronco de prisma triangular será necessário fazer uso de dois teoremas que serão demonstrados no capítulo sobre pirâmides, a saber:

Teorema 1: Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem mesmo volume.

Teorema 2: O volume de uma pirâmide é $V = \frac{A_{base} \cdot H}{3}$.

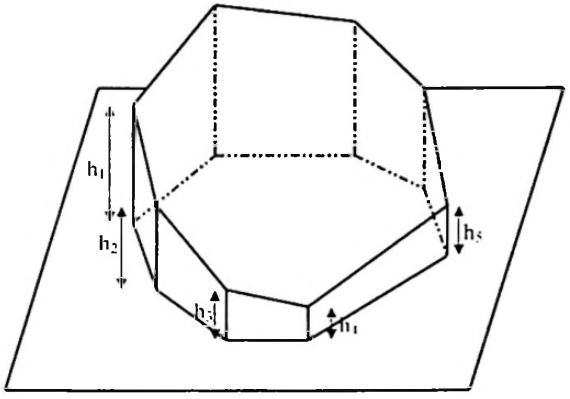
Na pirâmide triangular ABCD, considere que a notação D-ABC significa que ABC é a base e D é o vértice da pirâmide. Além disso, adote que V(D-ABC) é o volume da pirâmide D-ABC.

Note que as pirâmides A-A'B'C' e A-A'BC' possuem mesma base AA'C' e mesma altura, uma vez que as distâncias de B e B' ao plano definido por AA'C' são iguais. Deste modo, pode-se afirmar que V(A-A'B'C') = V(A-A'BC'). Analogamente, pode-se afirmar que V(A-A'BC') = V(A-A'BC) e que V(A-A'BC)

= V(A'-ABC). Assim, segue que V_1 = V(A-A'B'C') = V(A'-ABC). Seguindo processos análogos conclui-se que V_2 = V(B'-ACC') = V(B-ACC') = V(C'-ABC). Sendo V_3 = V(B'-ABC), tem-se que o volume do tronco de prisma vale:

$$V = V(A\text{-}A'B'C') + V(B'\text{-}ACC') + V(B'\text{-}ABC) \Rightarrow$$
$$V = V(A'\text{-}ABC) + V(C'\text{-}ABC) + V(B'\text{-}ABC) \Rightarrow$$
$$V = \frac{A_b.h_1}{3} + \frac{A_b.h_2}{3} + \frac{A_b.h_3}{3} \Rightarrow \mathbf{V = A_b \frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}}$$

O resultado anterior pode ser generalizado para um tronco de prisma onde a quantidade de lados da base é qualquer. Observe a figura abaixo, onde um plano seccionou um prisma cujo número de lados da base é $n \geq 3$. No tronco de prisma determinado, adote que as distâncias dos n vértices, que não pertencem à base, ao plano da base valem h_1, h_2, ..., h_n, conforme está esquematizado na figura abaixo. Suponha A_b é a área da base do tronco de prisma.

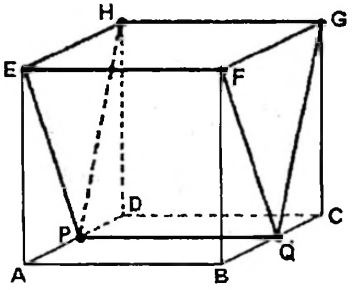


Desta forma, pode-se afirmar que o volume do tronco de prisma vale, para o caso em que a base possui n lados, vale $\mathbf{V = A_b \frac{(h_1 + h_2 + ... + h_n)}{n}}$.

A demonstração deste teorema é extremamente trabalhosa e está fora dos objetivos deste livro. Deve-se ressaltar que este resultado é válido mesmo que o prisma não seja reto.

Exercícios Resolvidos

1) (UFRGS-13) Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, P e Q, sejam os pontos médios respectivamente das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura abaixo.



O volume desse sólido é:

a) 64 b) 128 c) 256 d) 512 e) 1024

Solução: Alternativa C

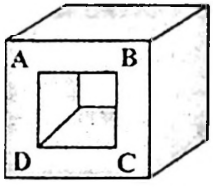
O sólido pode ser interpretado como um prisma de base FGQ e altura PQ.

Assim, o volume do sólido vale: $V = S_{\Delta FGQ} \cdot \overline{PQ} = \frac{\overline{FG}.\overline{FB}}{2}\overline{PQ} = \frac{8.8}{2}8 = 256$

2) (UFPA-09) Um designer construiu um móvel temporário de papelão em forma de cubo, conforme a figura abaixo, o qual pode ser utilizado individualmente ou em conjunto, formando ambientes para sentar e apoiar. Se a diagonal do móvel na forma de cubo mede $60\sqrt{3}$ cm e o lado do quadrado ABCD mede um terço da aresta do cubo, a área da superfície externa do cubo, em m^2, é:

a) 1,20 b) 1,21 c) 1,76 d) 1,92 e) 2,08

Solução: Alternativa E



Suponha que a aresta do cubo original seja a.

Se a diagonal do cubo original é $60\sqrt{3}$:

$a\sqrt{3} = 60\sqrt{3} \Rightarrow a = 60$ cm

Se b é o lado de ABCD: $b = \frac{a}{3} = 20\,cm$

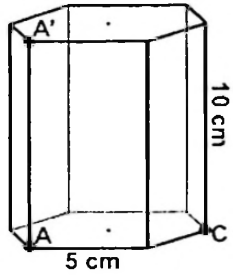
Considerando o furo como superfície interna, a superfície externa do móvel é composta por 4 quadrados de lado 60 cm e 4 retângulos de dimensões 20 cm × 60 cm. Assim, a área total vale:

$S = 4.60^2 + 4.20.60 = 14400 + 4800 = 20800\ cm^2 = 2,08\ m^2$

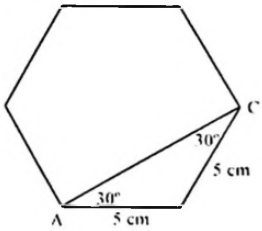
3) (Unicamp-05) A figura abaixo apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma.

b) Encontre a área da secção desse prisma que passa pelos pontos A, C e A'.



Solução:



a) $V = S_h H = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 3\dfrac{25\sqrt{3}}{2}10 = 375\sqrt{3}\ cm^3$

b) A figura ao lado representa a base do prisma. A diagonal AC pode ser calculada da seguinte forma:

$\overline{AC} = 2a.\cos 30° = a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm

$S = \overline{AC}.H = 5\sqrt{3}.10 = 50\sqrt{3}\ cm^2$

4) (EspCEx-13) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é:

a) 18 cm^3 b) 36 cm^3 c) $18\sqrt{3}\ cm^3$ d) $36\sqrt{3}\ cm^3$ e) 40 cm^3

Solução: Alternativa B

Sejam x a aresta da base e h a aresta lateral do prisma: $\dfrac{x}{h} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = \sqrt{3}x$

$$108 = V' - V = 6\frac{(x+2)^2\sqrt{3}}{4}h - 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{3\sqrt{3}[(x+2)^2 - x^2]}{2}h =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}(4x+4)\sqrt{3}x}{2} = 18(x+1)x \Rightarrow x(x+1) = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2\ cm \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\ cm$

$$V = 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{3.4.\sqrt{3}}{2}2\sqrt{3} = 36\,cm^3$$

5) (Escola Naval-14) Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

a) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Solução: Alternativa B

Sejam x a aresta da base e h a aresta lateral do prisma.

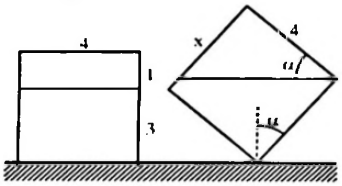
$S_L = 0{,}75.S_T = 0{,}75(S_L + 2.S_B) = 0{,}75.S_L + 1{,}5.S_B \Rightarrow 0{,}25.S_L = 1{,}5.S_B \Rightarrow$

$S_L = 6.S_B \Rightarrow 6.x.h = 6.6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

6) (Escola Naval-15) Um recipiente cúbico de aresta 4 cm está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura de 3 cm. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. A tangente do ângulo α é:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

Solução:



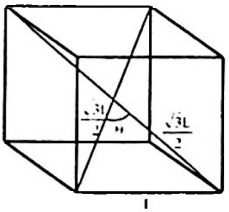
Note que no 2º caso o espaço vazio é um prisma triangular. Os volumes das partes vazias nos dois casos são iguais: $4.1.4 = \frac{4.x}{2}.4 \Rightarrow x = 2$ cm

Logo: $\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

7) (Escola Naval-14) Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo de aresta L?

a) arc sen 1/4 b) arc cos 1/4 c) arc sen 1/3 d) arc cos 1/3 e) arc tg 1/4

Solução: Alternativa D



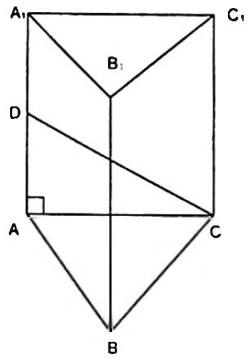
Por simetria, todas as 6 diagonais de um cubo se interceptam no centro do cubo em seus respectivos pontos médios. Assim, sendo $\sqrt{3}L$ o comprimento de cada diagonal, determina-se no cubo um triângulo isósceles de lados $\frac{\sqrt{3}L}{2}$, $\frac{\sqrt{3}L}{2}$ e L, cujo ângulo θ, oposto ao lado L, é o menor ângulo formado pelas diagonais. Aplicando a lei dos cossenos:

$L^2 = \left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\right)^2 - 2.\frac{\sqrt{3}L}{2}.\frac{\sqrt{3}L}{2}.\cos\theta \Rightarrow L^2 = \frac{3L^2}{4} + \frac{3L^2}{4} - \frac{3L^2}{2}\cos\theta \Rightarrow$

$$\frac{3L^2}{2}\cos\theta = \frac{L^2}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{1}{3}$$

8) (IME-11) A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

Solução:



Note-se que:

$AC = x\cos\beta$

$AD = x\,\mathrm{sen}\,\beta$

$BC = 2x\cos\beta\cos x$

$AA_1 = 2x\,\mathrm{sen}\,\beta$

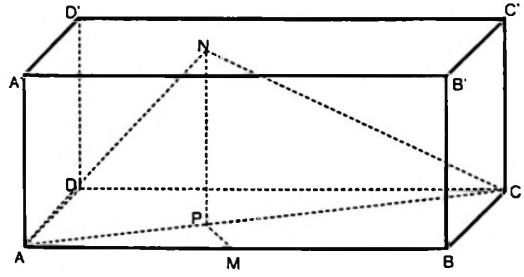
Assim, como a área lateral de um prisma reto é o produto da altura pelo perímetro da base, conclui-se que tal área é:

$S_l = 2x\mathrm{sen}\beta.(x\cos\beta + x\cos\beta + 2x\cos\beta\cos\alpha) \Rightarrow$

$S_l = 2x\mathrm{sen}\beta.2x\cos\beta(1+\cos\alpha) \Leftrightarrow S_l = 2x^2\mathrm{sen}2\beta(1+\cos\alpha)$

9) (IME-14) Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $|NA^2 - NC^2| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

Solução:



Suponha-se que BC < AB, sem perda de generalidade. Sejam AB = 2m, BC = ℓ (menor aresta da base, procurada), AP = y e CP = z. Da semelhança entre os triângulos retângulos APM e ABC, $\frac{y+z}{m} = \frac{2m}{y}$.

Assim, $y^2 + yz = 2m^2$ (I).

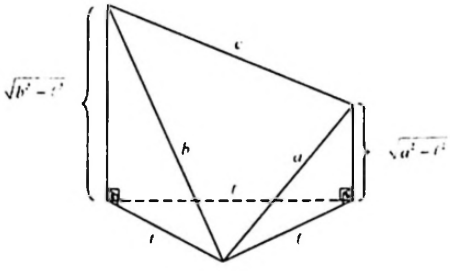
Claramente, z > y. Logo, NC > NA, uma vez que os triângulos retângulos NAP e NPC têm a altura NP em comum. Como é dado que $NC^2 - NA^2 = k$, a partir

dos triângulos citados, por Pitágoras, conclui-se que $NC^2 - CP^2 = NP^2 = NA^2 - AP^2$, do que $z^2 - y^2 = k$ (II).

No triângulo ABC, $(y + z)^2 = \ell^2 + 4m^2$. Portanto, $y^2 + 2yz + z^2 = \ell^2 + 4m^2$.

De (I), $y^2 + 2yz + z^2 = \ell^2 + 2(y^2 + yz)$, do que $z^2 - y^2 = \ell^2$. Por (II), obtém-se que $\ell = \sqrt{k}$, o comprimento pedido.

10) (OBM-05) Um prisma é reto e tem como base um triângulo equilátero. Um plano corta o prisma mas não corta nenhuma de suas bases, determinando uma secção triangular de lados a, b e c. Calcule o lado da base do prisma em função de a, b e c.



Solução:

Podemos supor, sem perda de generalidade, a configuração acima e, portanto, pelo teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 + \left(\sqrt{b^2 - \ell^2} - \sqrt{a^2 - \ell^2}\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(b^2 - \ell^2\right)\left(a^2 - \ell^2\right)} = a^2 + b^2 - c^2 - \ell^2 \Leftrightarrow$$

$$4\left(b^2a^2 - b^2\ell^2 - a^2\ell^2 + \ell^4\right) =$$

$$= \ell^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2\ell^2 - 2b^2\ell^2 + 2c^2\ell^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$3\ell^4 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\ell^2 - \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right) = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau acima, em ℓ^2, é

$$\Delta = \left[-2(a^2 + b^2 + c^2)\right]^2 + 4 \cdot 3 \cdot \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right) =$$

$$= 16(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2).$$

Logo $\ell^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2 + c^2) \pm \sqrt{16(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2)}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow$

$$\ell^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3}$$

De fato, observando que ℓ é menor ou igual a $\min\{a, b, c\}$: $\ell^2 \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

Portanto: $\ell = \sqrt{\dfrac{(a^2 + b^2 + c^2) - 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}}{3}}$.

Exercícios de Vestibular

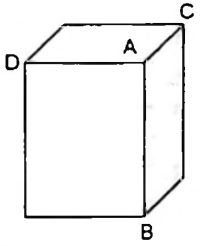
1) (Ucpel-05) A soma de todas as arestas de um cubo é 36m. Pode-se afirmar que seu volume e sua área são respectivamente:
a) $27m^3$ e $54m^2$ b) $8m^3$ e $54m^2$ c) $81m^3$ e $64m^2$
d) $27m^3$ e $36m^2$ e) $8m^3$ e $16m^2$

2) (Ucpel-09) A área total de um cubo vale 150 m^2; então, a diagonal vale
a) 10 b) $5\sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{5}$ e) $\sqrt{15}$

3) (Ucpel-11) Em um paralelepípedo retângulo, somando duas a duas as suas dimensões se obtêm, respectivamente, 26 cm, 24 cm e 20 cm. Então, o volume desse paralelepípedo é
a) 1485 cm^3 b) 1845 cm^3 c) 1458 cm^3 d) 1854 cm^3 e) 1584 cm^3

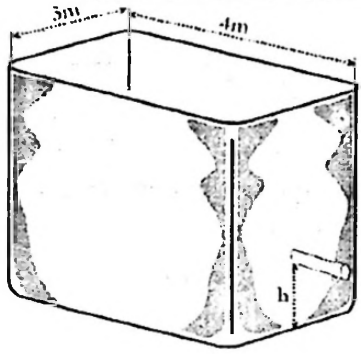
4) (UCS-08) Está sendo planejada uma piscina em forma de paralelepípedo reto-retângulo, com dimensões internas, em metros, tais que a soma das medidas da largura e do comprimento seja igual a 30 metros, e a profundidade seja de 3 metros. O maior volume, em metros cúbicos, que essa piscina poderá ter, é
a) 225. b) 675. c) 450. d) 900. e) 729.

5) (Uespi-12) Um paralelepípedo retângulo tem por base um quadrado com lado medindo 6 cm e tem altura 8 cm, conforme a ilustração a seguir.



Qual a distância entre o vértice A e o plano passando pelos vértices B, C e D?
a) $21/\sqrt{41}$ b) $22/\sqrt{41}$ c) $23/\sqrt{41}$ d) $24/\sqrt{41}$ e) $25/\sqrt{41}$

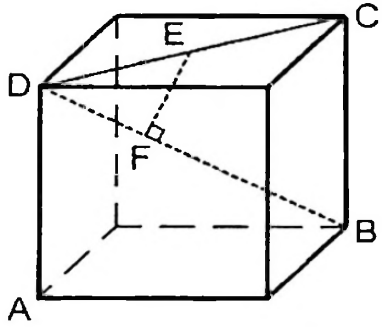
6) (UFPB-10) O reservatório de água de certo edifício tem a forma de um paralelepípedo reto retangular com base de dimensões internas 3m × 4m , conforme a figura abaixo.



De acordo com as condições do edifício, por medida de segurança, recomenda-se que, no reservatório, deve ficar retida uma quantidade de água correspondente a $18m^3$, para combater incêndio. Para atender essa recomendação, o ponto de saída da água, destinada ao consumo diário dos moradores e do condomínio, deve ficar a uma determinada altura (h) do fundo do reservatório, de modo que a água acumulada no reservatório até essa altura seja destinada para combate a incêndio. Nessas condições, a altura (h) da saída da água para consumo diário deve ser, pelo menos, de:

a) 1m b) 1,5m c) 2m d) 2,5m e) 3m

7) (UFPE-13) A ilustração a seguir é de um cubo com aresta medindo 6 cm. A, B, C e D são os vértices indicados do cubo, E é o centro da face contendo C e D, e F é o pé da perpendicular a BD traçada a partir de E.



Com base nas informações acima, analise as proposições a seguir.

0-0) A distância entre A e B mede $6\sqrt{2}$ cm.

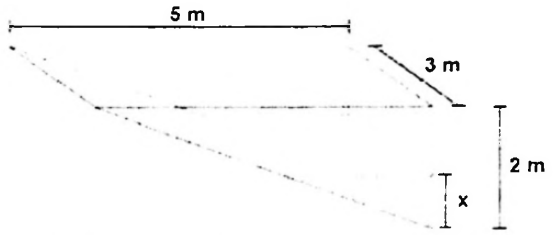
1-1) A distância entre B e D mede $6\sqrt{3}$ cm.

2-2) Os triângulos CDB e FDE são semelhantes.

3-3) O seno do ângulo FDE é $\sqrt{3}/3$.

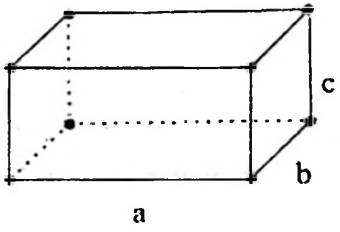
4-4) A distância entre E e F mede $2\sqrt{6}$ cm.

8) (UFPR-13) Um tanque possui a forma de um prisma reto, com as dimensões indicadas pela figura. Com base nisso, faça o que se pede:



a) Quando estiver completamente cheio, quantos litros esse tanque comportará?
b) Obtenha uma função que expresse o volume V de água no tanque como função da altura x, indicada na figura.

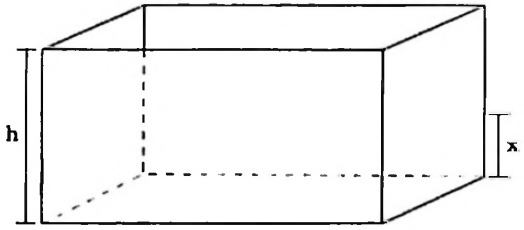
9) (UFTM-11) Um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c, dadas em centímetros, cujo volume é 1080 cm^3, tem duas faces paralelas e congruentes, de dimensões a e b, cujas áreas somam 216 cm^2 e representam as suas bases.



Sabendo-se que a e b são números inteiros, tais que o mmc (a, b) = 36, e que a medida a é 3 cm maior que a medida b, pode-se concluir que a soma das áreas de todas as faces desse paralelepípedo é, em cm^2, igual a
(A) 696. (B) 636. (C) 616. (D) 576. (E) 432.

10) (Ucpel-05) A área total de um cubo é igual a 150 cm^2. Para que sua área total seja igual a 384 cm^2 deve-se acrescentar à sua aresta:
a) 5cm b) 2cm c) 3cm d) 1cm e) 4cm

11) (UFTM-12) A altura, em centímetros, do nível da água armazenada em um reservatório com a forma de um prisma reto de base retangular é igual a x, conforme mostra a figura.



Usando todo esse volume de água armazenado, pode-se encher completamente uma quantidade exata de recipientes com capacidade de 20 litros cada, ou uma quantidade exata de recipientes com capacidade de 50 litros cada. Se x = h/3, onde h é a altura do reservatório, então a menor capacidade, em litros, desse reservatório cheio é
(A) 200. (B) 300. (C) 400. (D) 500. (E) 600.

12) (UFTM-12) Sem perda do volume original, um ourives pretende transformar um cubo de ouro de 1 cm^3 em uma placa na forma de um paralelepípedo reto-retângulo. Adotando a medida da aresta do cubo como largura da placa e 50% da medida da aresta do cubo como altura da placa, a medida, em centímetros, do comprimento dessa placa resultará em
(A) 1,2. (B) 1,5. (C) 1,8. (D) 2,0. (E) 2,2.

13) (UFTM-13) Um rótulo de forma retangular (figura 1) será colado em toda a superfície lateral de um recipiente com a forma de um prisma hexagonal regular (figura 2), sem haver superposição.

figura 1

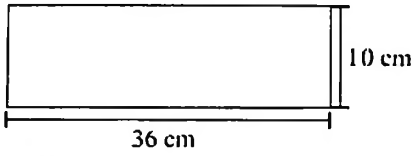
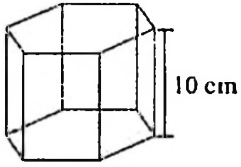


figura 2



Considerando $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, é correto afirmar que a capacidade desse recipiente é, em mL, aproximadamente,
(A) 934. (B) 1150. (C) 650. (D) 865. (E) 1350.

14) (UECE-12) A diagonal de um paralelepípedo retângulo, cuja base é um quadrado, mede 6 cm e faz com o plano da base do paralelepípedo um ângulo de 45°. A medida, em cm^3, do volume do paralelepípedo é
a) $8\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{3}$ c) $27\sqrt{2}$ d) $27\sqrt{3}$

15) (UEG-11) Considere um cubo com 3 cm de aresta, subdividido em cubos menores, cada um com 1 cm de aresta. Dele foram retirados cubos menores dos centros de cada face e um cubo menor do seu centro. A figura I mostra o que restou do cubo maior, enquanto a figura II mostra o que foi retirado do cubo.

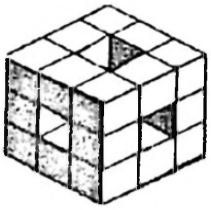


Figura I

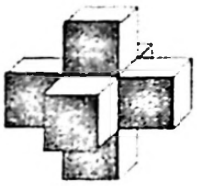


Figura II

a) Calcule o volume da figura I.
b) Calcule a área da superfície da figura II.

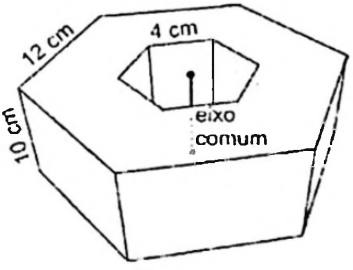
16) (UEL-08) Um arquiteto fez um projeto para construir colunas de concreto que vão sustentar um viaduto. Cálculos mostram que 10 colunas com a forma de um prisma triangular regular de aresta de 1 metro por 10 metros de altura são suficientes para sustentar o viaduto. Se 1 metro cúbico de concreto custa R$ 200,00, qual será o custo total das colunas?

a) R$ 1.000,00
b) Aproximadamente R$ 4.320, 00
c) R$ 5.000, 00
d) Aproximadamente R$ 8.650, 00
e) Aproximadamente R$ 17.300, 00

17) (UEL-03) Uma caixa é totalmente preenchida por cinqüenta cubos idênticos. Quantos cubos iguais a esses podem ser colocados em uma caixa cujas dimensões internas têm, respectivamente, o dobro das dimensões da caixa anterior?

a) 100 b) 150 c) 200 d) 400 e) 500

18) (UEL-11) Uma metalúrgica produz uma peça cujas medidas são especificadas na figura a seguir.



A peça é um prisma reto com uma cavidade central e com base compreendida entre dois hexágonos regulares, conforme a figura. Considerando que os eixos da peça e da cavidade coincidem, qual o volume da peça?

a) $640\sqrt{3}$ cm³ b) $1280\sqrt{3}$ cm³ c) $2560\sqrt{3}$ cm³
d) $320\sqrt{3}$ cm³ e) $1920\sqrt{3}$ cm³

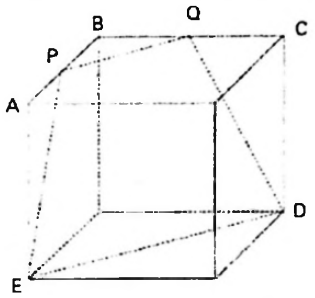
19) (UEM-10) Considerando que as medidas, em centímetros, dos lados de um paralelepípedo retângulo são três números inteiros consecutivos, tais que o produto deles é oito vezes a sua soma, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).
01) A soma é um múltiplo de 5.
02) O volume do paralelepípedo é 60 cm³.
04) A área lateral do paralelepípedo é 148 cm².
08) O comprimento da maior diagonal do paralelepípedo é 9 cm.
16) Uma das medidas dos lados do paralelepípedo é múltiplo de 3.

20) (UEM-12) Considere um prisma reto cuja base é um pentágono não regular ABCDE, em que os lados AB e EA medem $10\sqrt{2}$ cm, o lado CD mede 20 cm e os lados BC e DE são perpendiculares ao lado CD e têm metade da sua medida. Sabendo que a altura desse prisma é de 10 cm, assinale o que for correto.
01) A área lateral desse prisma mede $600\sqrt{2}$ cm².
02) O volume do prisma é 3.000 cm³.
04) O prisma tem 7 faces retangulares.
08) A área total do prisma é 1.200 cm².
16) O prisma tem 10 vértices.

21) (PUC/PR-11) Benedito contratou o projeto de uma cisterna para armazenar água da chuva, a ser construída sobre um terreno plano. Suas dimensões internas são as seguintes: 3 metros de largura, 5 metros de comprimento e 2 metros de altura. As paredes têm espessura de 20 cm e a cobertura é de material leve e removível. Um amigo fez as seguintes asserções:
I. Se a largura for aumentada em um metro e o comprimento for reduzido em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna aumentará em 2 m³, e a área externa das paredes será a mesma da estrutura original.
II. Se o comprimento for aumentado em um metro e a largura reduzida em um metro, a área externa das paredes será a mesma da estrutura original, mas a capacidade volumétrica da cisterna ficará reduzida a 80% da capacidade original.
III. Se a largura for aumentada em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna passará de 40 m³, e a área externa das paredes será inferior a 40 m².
IV. Se o comprimento for aumentado em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna e a área externa das paredes aumentarão em 20%.
Assinale a alternativa CORRETA:
A) São verdadeiras apenas as asserções I e III.
B) São verdadeiras apenas as asserções I e II.
C) Somente a asserção IV é falsa.

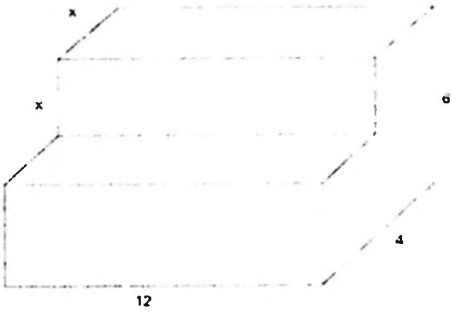
D) Todas as asserções são verdadeiras.
E) Apenas a asserção III é falsa.

22) (Mackenzie-06) O cubo da figura tem aresta $2\sqrt{2}$. Se P e Q são, respectivamente, os pontos médios de AB e de BC, a área do quadrilátero PQDE é



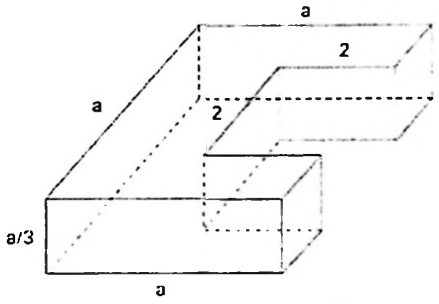
a) 9 b) 10 c) 7 d) 12 e) 6

23) (Mackenzie-08) A figura ao lado representa a maquete de uma escada que foi construída com a retirada de um paralelepípedo reto-retângulo, de outro paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 12, 4 e 6. O menor volume possível para essa maquete é



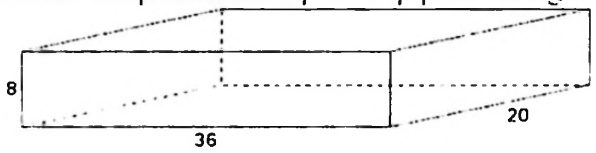
a) 190 b) 180 c) 200
d) 194 e) 240

24) (Mackenzie-09) A peça da figura, de volume a^2, é o resultado de um corte feito em um paralelepípedo reto retângulo, retirando-se um outro paralelepípedo reto retângulo. O valor de a é



a) 2/3 b) 5 c) 6 d) 4 e) 4/5

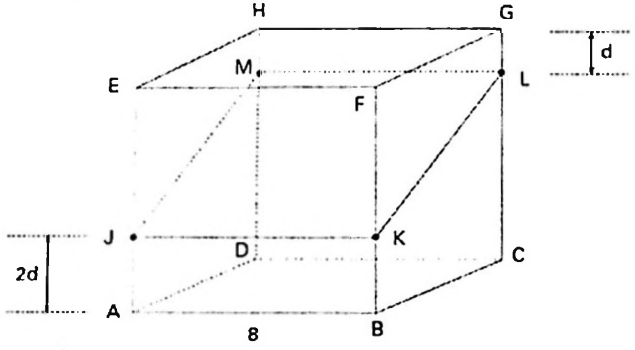
25) (Mackenzie-12) O número mínimo de cubos de mesmo volume e dimensões inteiras, que preenchem completamente o paralelepípedo retângulo da figura, é



a) 64 b) 90 c) 48 d) 125 e) 100

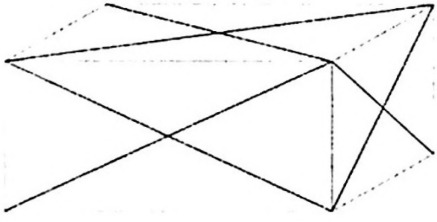
26) (FGV-09) O volume de um cubo, em m^3, é numericamente igual a sua área total, em cm^2. Assim, a aresta desse cubo, em cm, é igual a
A) 6.10^{-6}. B) 5.10^{-4}. C) 6.10^{-4}. D) 5.10^{6}. E) 6.10^{6}.

27) (Insper-06) Considere um cubo ABCDEFGH cujas arestas medem 8cm. Tomam-se os pontos J, K, L e M sobre as arestas AE, BF, CG e DH, respectivamente, de modo que AJ = BK = 2d cm e GL = HM = d cm, em que $0 < d < 4$, como mostra a figura.



Seja S a área, em cm^2, do quadrilátero JKLM.
a) Calcule S para que d seja igual a 1.
b) Calcule S para que d seja igual a 3.
c) Determine d para que S seja a menor possível.

28) (Insper-09) Para decorar uma caixa com a forma de paralelepípedo reto retângulo, uma pessoa colou algumas fitas sobre suas faces, como mostra a figura.

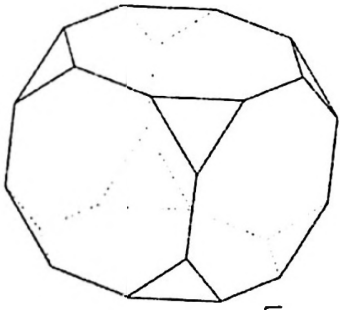


Cada fita foi colada, sem folga, ligando dois vértices opostos de uma mesma face, e havia fitas com comprimentos iguais a 10cm, $3\sqrt{29}$ cm e 17cm. Portanto, o volume da caixa, em cm^3, é

a) 360. b) 540. c) 600. d) 720. e) 840.

29) (Unifei-11) Determine a área total, em m^2, de um prisma reto de altura 5 metros e cuja base é um hexágono regular inscrito num círculo de raio de 2 metros.

30) (Uespi-11) O sólido ilustrado abaixo é obtido cortando um cubo por planos que interceptam as três arestas adjacentes em um vértice do cubo, de tal modo que o sólido tem seis faces, que são octógonos regulares, e oito faces, que são triângulos equiláteros. Se o cubo original tem aresta medindo 1 cm, qual a área total do sólido?

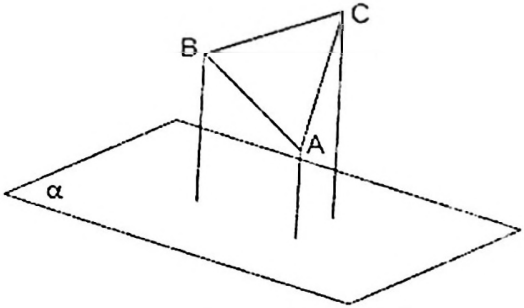


a) $2(6\sqrt{2}-8+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$ cm^2 b) $2(6\sqrt{2}-7+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$ cm^2

c) $2(6\sqrt{2}-6+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$ cm^2 d) $2(6\sqrt{2}-5+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$ cm^2

e) $2(6\sqrt{2}-4+3\sqrt{3}-2\sqrt{6})$ cm^2

31) (UESPI-10) Um triângulo ABC está inclinado em relação a um plano α, e as distâncias entre os vértices A, B e C e o plano são, respectivamente, de 3cm, 5cm e 7cm. Qual a distância entre o baricentro do triângulo e o plano? Obs.: o baricentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas medianas.



A) 4,5cm B) 5,0cm C) 5,5cm D) 6,0cm E) 6,5cm

32) (UFTM-12) A figura 1 representa um prisma obtido após a secção do paralelepípedo reto-retângulo ADFCGJLI representado na figura 2.

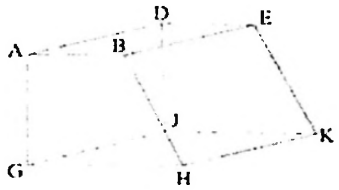


figura 1

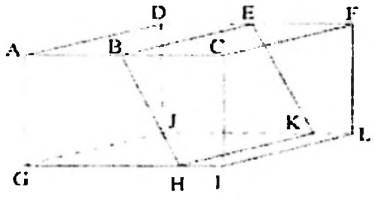
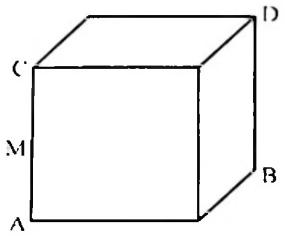


figura 2

Sendo que AB = BC = DE = EF e 4HI = 4KL = JL = 2JG = 2AG = x, o volume do prisma representado na figura 1 é

a) $5x^3/32$ b) $3x^3/16$ c) $3x^3/5$ d) $5x^3/8$ e) $3x^3/4$

33) (Fuvest-98) No cubo de aresta 1, considere as arestas AC e BD e o ponto médio, M, de AC.

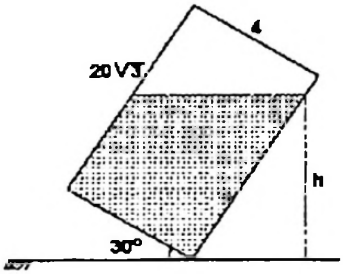


a) Determine o cosseno do ângulo BAD.

b) Determine o cosseno do ângulo BMD.

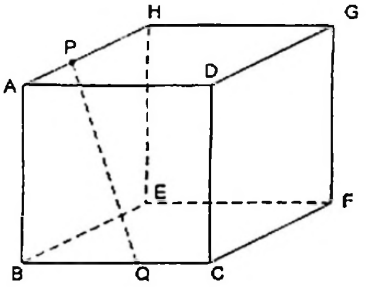
c) Qual dos ângulos, BAD ou BMD, é o maior? Justifique.

34) (Fuvest-02) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado **4 cm** e altura $20\sqrt{3}$ **cm**, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinação sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de **30°** com o solo (ver seção lateral abaixo). Determine a altura **h** do nível da água em relação ao solo.



35) (UFRN-00) Dispondo-se de uma folha de cartolina retangular, medindo 60 cm de comprimento por 50 cm de largura, pode-se construir uma caixa sem tampa, cortando-se um quadrado de lado h em cada canto da folha.
Sendo $V : D \rightarrow (0, +\infty)$ a função que associa o volume V(h) da caixa (em cm^3) à altura h (em cm), e considerando que $(0, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 0\}$, determine
A) o domínio D;
B) uma expressão algébrica para V(h).

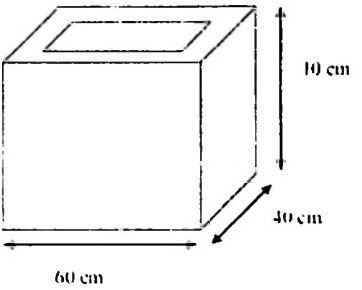
36) (UFMG-98) Observe a figura.



Nessa figura, está representado um cubo de aresta 10.
Sabendo que AP = QC = 4, **CALCULE** a distância de P a Q.

37) (UCS-09) Um produtor precisa construir um depósito de cereais em forma de um prisma hexagonal regular, de modo que a medida de sua superfície lateral seja 6 vezes a da superfície da base e o volume seja de 54 m^3. A medida da aresta da base desse depósito deverá ser igual a
a) 18 m b) 1,8 m c) 4 m d) 2,5 m e) 2 m.

38) (UEMG-11)



O desenho, acima, representa uma caixa de madeira maciça de 0,5 cm de espessura e dimensões externas iguais a 60 cm, 40 cm e 10 cm, conforme indicações. Nela será colocada uma mistura líquida de água com álcool, a uma altura de 8 cm. Como não houve reposição da mistura, ao longo de um certo período, 1200 cm^3 do líquido

evaporaram. Com base nesta ocorrência, a altura, em cm, da mistura restante na caixa corresponde a um valor numérico do intervalo de

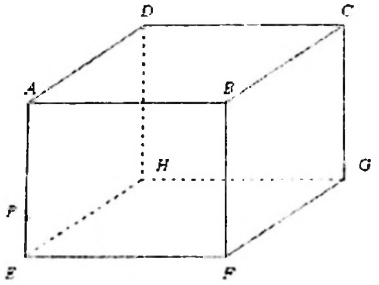
A) [5,0 ; 5,9]. B) [6,0 ; 6,9]. C) [7,0 ; 7,6]. D) [7,6 ; 7,9].

39) (UEMG-13) Para a construção de uma caixa sem tampa, foi utilizado um pedaço retangular de papelão com dimensões de 35 cm de comprimento por 20 cm de largura. De cada um dos quatro cantos desse retângulo, foram retirados quadrados idênticos, de lados iguais a 5 cm de comprimento. Em seguida, as abas resultantes foram dobradas e coladas. Para revestir apenas a parte externa da caixa construída, foram necessários

A) 600 cm^2 de revestimento. B) 615 cm^2 de revestimento.

C) 625 cm^2 de revestimento. D) 610 cm^2 de revestimento.

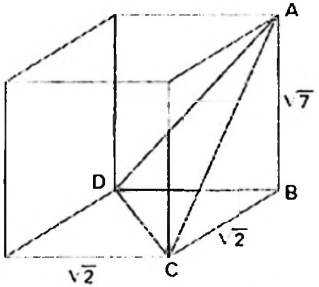
40) (UFU-09) No cubo ABCDEFGH considere o ponto P na aresta AE satisfazendo AP = 3.PE. Sabendo que PG mede $\sqrt{33}$ cm, calcule o volume do cubo.



41) (UEPB-10) Um recipiente cúbico medindo 1 m de lado está totalmente cheio de água. Se no seu interior são lançados 200 cubinhos de aço medindo 4 cm de lado, a quantidade de água, em litros, transbordante causada pela imersão dos cubinhos é.

a) 12,8 litros b) 12,5 litros c) 12,6 litros d) 13 litros e) 12,4 litros

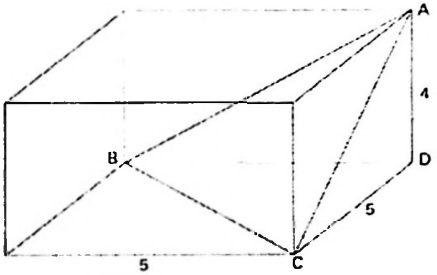
42) (UFSCar-08) A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $\sqrt{2}x\sqrt{2}x\sqrt{7}$, sendo A, B, C e D quatro de seus vértices.



A distância de B até o plano que contém A, D e C é igual a

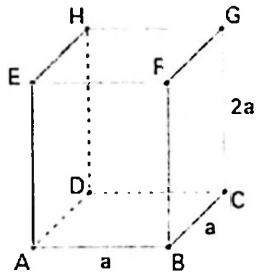
a) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

43) (UFSCar-09) A figura indica um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 × 5 × 4, em centímetros, sendo A, B, C e D quatro dos seus vértices.



a) Calcule a área do triângulo ABC.
b) Calcule a distância entre o vértice D e o plano que contém o triângulo ABC.

44) (Unesp-12) A figura mostra um paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH, com base quadrada ABCD de aresta a e altura 2a, em centímetros.



A distância, em centímetros, do vértice A à diagonal BH vale:

a) $\frac{\sqrt{5}}{6}a$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}a$ d) $\frac{\sqrt{6}}{5}a$ e) $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

45) (Fuvest-07) O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimento a. Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta AE , então a distância do ponto M ao centro do quadrado ABCD é igual a

a) $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) $a\sqrt{3}$ e) $2a\sqrt{3}$

46) (Unicamp-11) A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras ao lado. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.

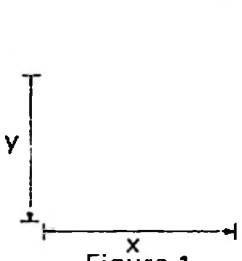


Figura 1

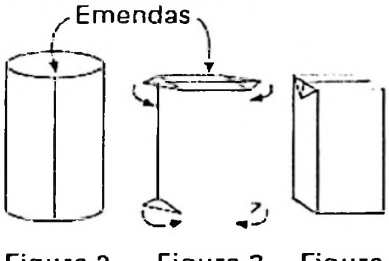


Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Se a caixa final tem 20cm de altura, 7,2cm de largura e 7cm de profundidade, determine as dimensões x e y da menor folha que pode ser usada na sua produção.
b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões x e y da folha usada em sua produção.

47) (AFA-99) Qual deve ser a medida da altura de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero de lado a, para que seu volume tenha valor a^3?

a) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

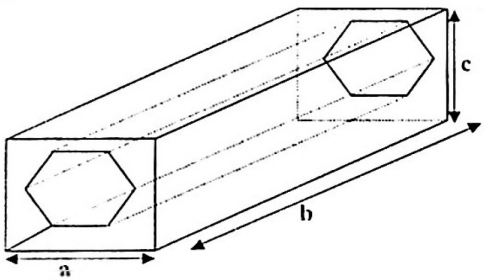
48) (AFA-05) A diagonal de um paralelepípedo reto retângulo mede $3\sqrt{35}$ cm e suas dimensões são proporcionais a 1, 3 e 5. A fração irredutível $\frac{\alpha}{\beta}$ que representa a razão entre a área total do paralelepípedo e seu volume é tal que

a) α e β são dois números primos. b) $\alpha + \beta = 100$
c) $\alpha - \beta = 11$ d) $\beta - \alpha = -1$

49) (AFA-06) O produto da maior diagonal pela menor diagonal de um prisma hexagonal regular de área lateral igual a 144 cm^2 e volume igual a $144\sqrt{3}$ cm^3 é.

a) $10\sqrt{7}$ b) $20\sqrt{7}$ c) $10\sqrt{21}$ d) $20\sqrt{21}$

50) (Escola Naval-00)



Um navio da Marinha Brasileira utiliza em sua praça de máquinas uma peça de aço maciça com a forma de um paralelepípedo retangular de dimensões a, b, e c, transpassada por um furo hexagonal, como mostra a figura acima. Sabendo que a = 14dm, $b = 15\sqrt{3}$ dm, $c = 10\sqrt{3}$ dm e que o perímetro da seção transversal (hexágono) do furo é 24dm, pode-se dizer que o volume da peça é

(A) inferior a $4.000dm^3$.
(B) superior a $4.000dm^3$ e inferior a $4.200dm^3$.
(C) superior a $4.200dm^3$ e inferior a $4.500dm^3$.
(D) superior a $4.500dm^3$ e inferior a $5.000dm^3$.
(E) superior a $5.000dm^3$.

51) (Escola Naval-98) A altura de um paralelepípedo retângulo mede 60 cm e sua base é um quadrado. A diagonal do paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do paralelepípedo retângulo é, em cm^3:

a) 12000 b) 18000 c) 24000 d) 27000 e) 36000

52) (Escola Naval-97) Um paralelepípedo retângulo de volume V tem dimensões inversamente proporcionais a A, B e C. A área total do paralelepípedo é:

a) $\frac{2V(ABC)}{A+B+C}$ b) $\frac{V(A+B+C)}{ABC}$ c) $\sqrt[3]{V(A+B+C)}$

d) $\sqrt[3]{V(AB+AC+BC)}$ e) $2(A+B+C)\sqrt[3]{\frac{V^2}{ABC}}$

53) (ITA-72) As medidas de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica e sua soma vale s. Sabendo-se que o seu volume é v^3 e $s \geq 3v$, então duas de suas dimensões são:

a) $\frac{s+v\pm\sqrt{(s+v)^2-v^2}}{2}$ b) $s-v$ e $s+v$ c) $v\pm\sqrt{(s-v)^2-4v^2}$

d) $\frac{s-v\pm\sqrt{(s-v)^2-2v^2}}{2}$ e) nenhuma das respostas anteriores.

54) (ITA-80) Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto regular são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da diagonal é igual a:

a) $\frac{7}{12}$cm b) $\frac{9}{24}$cm c) $\frac{\sqrt{24}}{12}$cm d) $\frac{\sqrt{61}}{12}$cm e) $\frac{\sqrt{73}}{12}$cm

55) (ITA-87) Seja (P) um paralelepípedo retângulo de dimensões dadas por três números consecutivos. Se a área total de (P) é 10 m^2, então seu volume é:
a) $\sqrt{3}$ m^3 b) $\sqrt{5}$ m^3 c) $\sqrt{7}$ m^3 d) $\sqrt{2}$ m^3 e) $2\sqrt{3}$ m^3

56) (ITA-93) São dados dois cubos I e II de áreas totais S_1 e S_2 e de diagonais d_1 e d_2, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ m^2 e que $d_2 = 3$ m, então o valor da razão d_1/d_2 é:
a) 3/2 b) 5/2 c) 2 d) 7/3 e) 3

57) (IME-15) Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:
a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$ b) $\frac{9}{4}a^3$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$ d) $\frac{9}{2}a^3$ e) $\frac{5}{2}a^3$

58) (ITA-95) Dado o prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3, é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) 12 d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$

59) (ITA-96) As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm^2, então o volume deste paralelepípedo, em cm^3, é igual a:
a) 1200 b) 936 c) 1155 d) 728 e) 834

60) (IME-64) Um cubo, de área total igual a 24 m^2, é cortado por um plano de modo a se obter uma seção hexagonal regular. Calcule o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexágono obtido.

61) (IME-68) Dado um prisma reto cuja base é um quadrado de lado 10 m e altura 18 m, passa-se um plano que corta o prisma de modo a que três arestas consecutivas ficam medindo 10 m, 12 m e 14 m. Calcular, em metros quadrados, a área lateral do prisma truncado assim formado.

62) (IME-71) Um prisma reto, de base hexagonal regular, tem 4,5 centímetros cúbicos de volume e 12 centímetros quadrados de superfície lateral. Calcule o lado do hexágono e a altura do prisma.

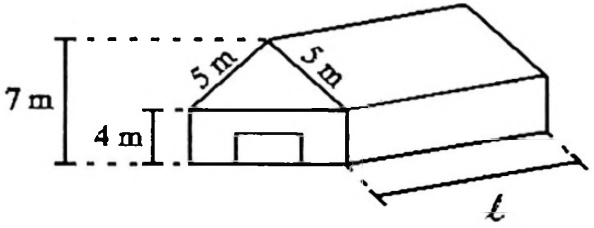
63) (IME-72) Um cubo de aresta "a" é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes.

64) (IME-86) Seja um paralelepípedo retângulo de bases ABCD e A'BC'D', cujas arestas AA', BB', CC' e DD' tenham por comprimento h e os lados da base sejam, respectivamente, AB = a e AD = b. Por DD' considere dois planos DD'MM' e DD'NN'. 1) Determine as distâncias AM = x e AD = y para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em três partes de mesmo volume; 2) Determine a razão entre os volumes dos sólidos MBNM'B'N' e MDNM'D'N'; 3) Encontre a relação entre as arestas MM', cujas faces passam por DD' e NN', seja reto.

65) (IME-88) Secciona-se um cubo de aresta a por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

66) (IME-98) Considere o cubo de bases ABCD e EFGH, e arestas $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$.
Sejam as arestas iguais a 3 m e os pontos M, N e P marcados de forma que:
M $\in$ $\overline{AD}$, tal que $\overline{AM} = 2$ m, N $\in$ $\overline{AB}$, tal que $\overline{AN} = 2$ m, e
P $\in$ $\overline{BF}$, tal que $\overline{BP} = 0{,}5$ m.
Calcule o perímetro da seção que o plano MNP determina no cubo.

67) (EsPCEx-01) Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até 200m^3. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento (ℓ) que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:

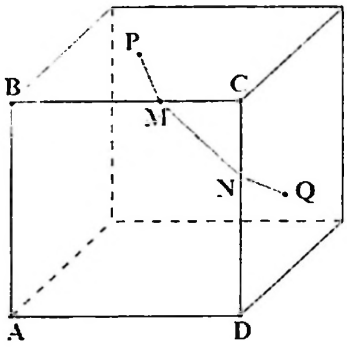


(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)
A. 13 m B. 20 m C. 5 m D. 25 m E. 15 m

68) (IME-05) Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta $\overline{BC}$ em M e a aresta $\overline{CD}$ em N, conforme ilustrado na figura abaixo. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

a) Demonstre que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

b) Calcule a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de $\overline{BC} = a$ e $\overline{BM} = b$.



69) (IME Militares-07) Um determinado prisma reto apresenta como seção reta um polígono qualquer, circunscrito a um círculo C. Calcule o volume do prisma em função de sua área lateral S_L e do raio R do círculo C.

70) (IME-70) A interseção de um plano com as arestas de um prisma reto triangular determina, a partir da base, segmentos de 3, 4 e x metros sobre as arestas. Calcule o valor de x para que os dois volumes resultantes sejam equivalentes. Aresta do prisma: 10 metros.

71) (IME-71) As faces de um paralelepípedo são losangos de lado igual a $\ell = \sqrt{2}$ metros e diagonal menor igual ao lado. Calcule o volume do paralelepípedo.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m³ b) 2 m³ c) 3 m³ d) $2\sqrt{3}$ m³ e) $2\sqrt{2}$ m³ f) N.R.A.

72) (ITA-17) Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

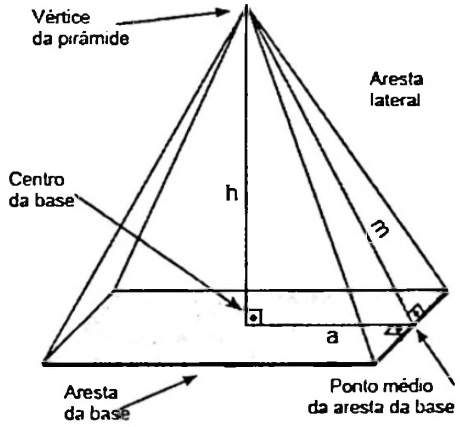
Pirâmide

11.1. DEFINIÇÕES

Dado um polígono plano e um ponto V não pertencente ao plano do polígono, denomina-se pirâmide o sólido limitado por esse polígono e todos os planos determinados pelos lados desse polígono e pelo ponto V.

Denomina-se uma pirâmide em função do polígono da sua base. Assim, se a base é um triângulo a pirâmide é classificada como triangular e se a base é um hexágono e pirâmide é denominada de hexagonal regular.

Pirâmide oblíqua: as suas arestas laterais não são congruentes entre si.
Pirâmide reta: as suas arestas laterais são congruentes entre si.
Pirâmide regular: é a pirâmide reta cuja base é um polígono regular.



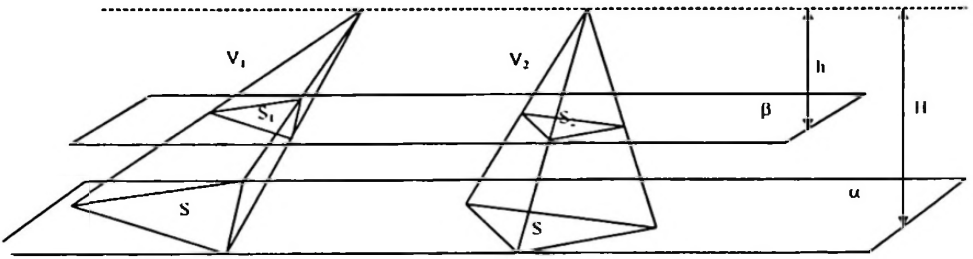
Relação Fundamental: $m^2 = h^2 + a^2$
m = apótema da pirâmide
a = apótema da base
h = altura da pirâmide

Apótema da base (a): é a distância entre o centro do polígono regular da base e o ponto médio de qualquer aresta da base.
Apótema da pirâmide (m): é a distância entre o vértice da pirâmide e o ponto médio de qualquer aresta da base.
Altura da pirâmide (h): é a distância entre o vértice da pirâmide e o plano da base.

11.2. VOLUME DA PIRÂMIDE TRIANGULAR

11.2.1. Teorema: Duas pirâmides triangulares com bases de mesma área e apresentando a mesma altura, possuem volumes iguais.

Demonstração:



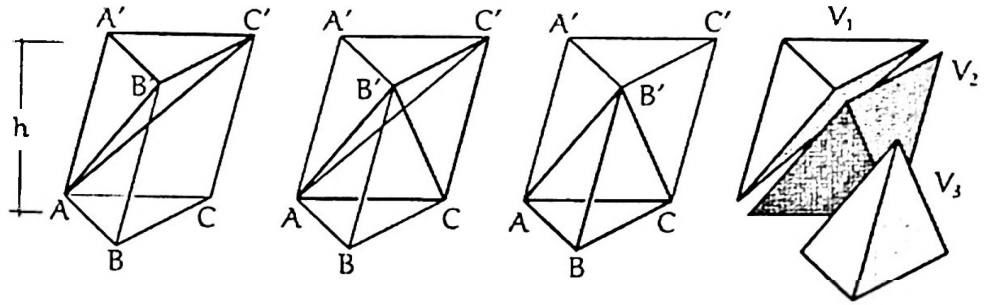
Suponha duas pirâmides distintas apresentando bases paralelas e de mesma área S. As alturas das duas pirâmides são congruentes e medem H. Seja α o plano que contém as duas bases das pirâmides. Seja β um plano qualquer, paralelo a α, que determina nas pirâmides seções de áreas iguais a S_1 e S_2, conforme a figura acima. Considere que a distância de β aos vértices das duas pirâmides é igual a h. Por semelhança de triângulos segue que o triângulo de área S_1 é semelhante ao triângulo da base da pirâmide 1, sendo $\frac{h}{H}$ a razão de semelhança. Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, tem-se que $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$. Analogamente, conclui-se que $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$.

Assim, cada plano traçado paralelamente ao plano que contém as bases determina nos sólidos seções de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri pode-se afirmar que $V_1 = V_2$.

11.2.2. Teorema: O volume de uma pirâmide triangular cuja área da base vale S_b e cuja altura vale h é $V = \frac{1}{3} S_b . h$.

Demonstração:

Considere um prisma ABCA'B'C' de base triangular. É possível particionar este prisma em três pirâmides triangulares, conforme indicam as figuras abaixo.



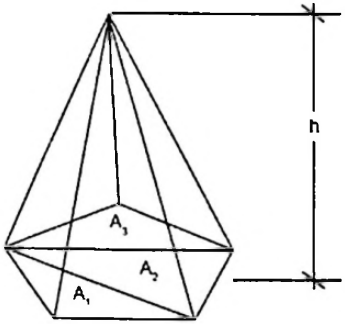
Perceba que as pirâmides AA'B'C' e B'ABC possuem base de mesma área (os triângulos A'B'C' e ABC são congruentes) e mesma altura (distância entre os planos que definidos pelas bases das pirâmides). Assim, tem-se que as pirâmides AA'B'C' e B'ABC possuem mesmo volume: $V_1 = V_3$.

Observe agora que as pirâmides B'C'AC e AA'B'C' possuem mesma área de base ($S_{A'C'A} = S_{ACC'}$ uma vez que AC' é diagonal do paralelogramo ACC'A') e mesma altura (distância de B' ao plano ACC'A'). Deste modo tem-se que $V_1 = V_2$.

Logo: $V_1 = V_2 = V_3$. Como $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow S_b.h = 3V_{pirâmide} \Rightarrow$

$$V = \frac{1}{3} S_{base}.h$$

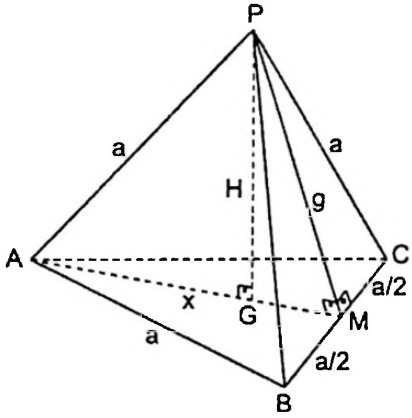
11.2.3. Volume de um pirâmide de base qualquer:



Considere uma pirâmide cuja base é um polígono convexo qualquer. Tome um dos vértices da base e trace as diagonais a partir deste vértice. A pirâmide original ficou particionada em pirâmide menores, todas de base triangular e mesma altura da pirâmide original. Assim, o volume da pirâmide original é igual à soma dos volumes das pirâmides triangulares:

$$V = \frac{1}{3} A_1.h + \frac{1}{3} A_2.h + ... + \frac{1}{3} A_n.h = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} A_{base}.h$$

11.3. TETRAEDRO REGULAR



Tetraedro é um poliedro composto por 4 faces triangulares. Um tetraedro é classificado como regular se for formado por 4 triângulos equiláteros.

A figura ao lado representa um tetraedro regular de base ABC e vértice P. Pela simetria da construção, a projeção ortogonal de P sobre o plano da base do tetraedro recai sobre o baricentro G da base ABC, ou seja, $\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}$. Nota-se que PG é a altura do tetraedro, ou seja, $\overline{PG} = H$.

Na face PBC considere a altura de P com relação à aresta BC. O comprimento desta altura denomina-se apótema da face do tetraedro. O comprimento do apótema é designado por g. Na verdade, o conceito de apótema de face lateral é válido para qualquer pirâmide. Quando os apótemas de todas as faces laterais da uma pirâmide possuem o mesmo valor g afirma-se que g é o apótema da pirâmide. Este caso ocorre quando todas as faces laterais são triângulos isósceles congruentes e a base é um polígono regular.

No caso de um tetraedro regular, a altura de cada face coincide com a mediana e o ponto M, pé da altura de P na face PBC, é o ponto médio da aresta BC e assim $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{a}{2}$.

11.3.1. Calculo dos Elementos do Tetraedro Regular

Geratriz: Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔPBC:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + g^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Altura: Observe que $\overline{AM} = g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Como G é o baricentro de ΔABC segue que

$$x = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em ΔPAG: $a^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$

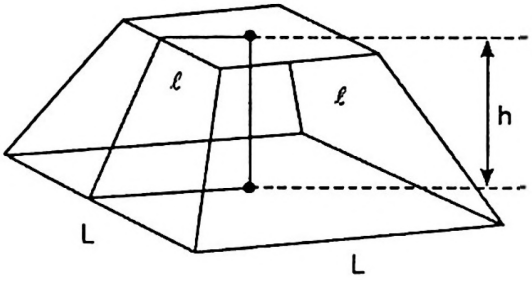
Área da Base: Como ΔABC é equilátero de lado a: $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Área Total: Todas as 4 faces são congruentes e possuem a mesma área da base:

$A_T = 4.A_b \Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3}$

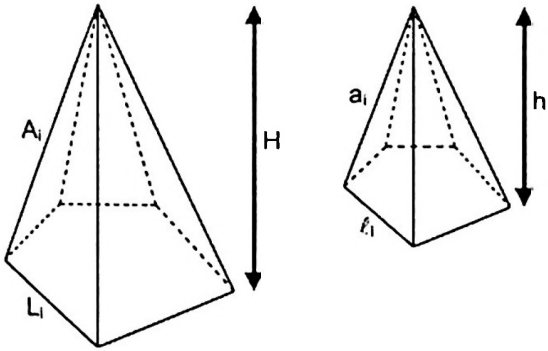
Volume: $V = \frac{1}{3}A_b.H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}.a^3}{12}$

11.4. TRONCO DE PIRÂMIDE



Considere uma pirâmide de altura H e aresta de base igual a L. Quando um plano, paralelo à base da pirâmide e distância h desta, intersecta a pirâmide são gerados dois sólidos: uma pirâmide menor de altura H – h e um tronco de pirâmide de altura h. A figura ao lado ilustra um tronco de pirâmide de base quadrangular, porém é possível determinar troncos de pirâmide cuja base é qualquer polígono convexo. Em qualquer tronco de pirâmide se destacam duas bases, uma maior (base original de pirâmide) e outra menor (determinada pela interseção do plano).

11.4.2. Pirâmides Semelhantes



Duas pirâmides são semelhantes quando os ângulos homólogos formados por arestas consecutivas são congruentes e quando as arestas homólogas são proporcionais. Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à sua base são determinadas duas pirâmides semelhantes.

Se k é a razão de semelhança entre as duas pirâmides pode-se afirmar que:

$$\frac{a_i}{A_i} = \frac{\ell_i}{H_i} = \frac{h}{H} = k$$

11.4.3. Teorema: A razão entre as áreas da base de duas pirâmides semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração:

Pela definição de pirâmides semelhantes, pode-se concluir que os polígonos das bases são polígonos semelhantes. Como a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança: $\frac{S_{\text{base pirâmide1}}}{S_{\text{base pirâmide2}}} = k^2$.

11.4.4. Teorema: A razão entre as áreas laterais de duas pirâmides semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração:

Pela definição de pirâmides semelhantes, pode-se concluir que as faces laterais homólogas são triângulos semelhantes. Supondo que as pirâmides possuem n ($n \geq 3$) faces laterais, aos pares homólogas (S_1, S'_1), (S_2, S'_2), ..., (S_n, S'_n), conclui-se que $\frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = ... = \frac{S_n}{S'_n} = k^2$. Como a área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais:

$$k^2 = \frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = ... = \frac{S_n}{S'_n} = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{S'_1 + S'_2 + ... + S'_n} = \frac{S_{\text{lateral 1}}}{S_{\text{lateral 2}}}$$

11.4.5. Teorema: A razão entre os volumes de duas pirâmides semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Demonstração:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}S_{b1}.h_1}{\frac{1}{3}S_{b2}.h_2} = \frac{S_{b1}}{S_{b2}}\frac{h_1}{h_2} = k^2.k = k^3$$

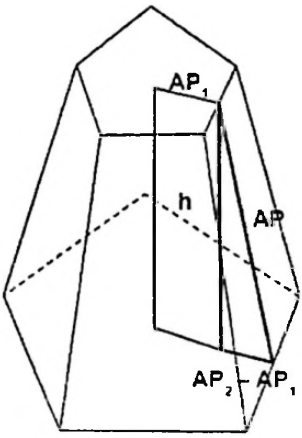
Observação: Os teoremas anteriores também são válidos para dois sólidos semelhantes quaisquer, ou seja, dois prismas semelhantes, dois cones semelhantes, duas esferas semelhantes, dois toróides semelhantes, ... Assim, pode-se afirmar que:

1) A razão entre as áreas de dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

2) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

A demonstração dois dos itens acima envolve conceitos de nível superior e estão fora do escopo desta obra.

11.4.6. Apótema e Área Lateral do Tronco de Pirâmide



Somente existe sentido em calcular o apótema de um tronco de pirâmide quando a pirâmide original que gera o tronco é uma pirâmide regular. Neste caso, traçando o segmento de reta que liga os centros das bases aos respectivos pontos médios de duas arestas homólogas das bases determina-se os apótemas ap_1 e ap_2 das bases do tronco. O apótema do tronco Ap é o segmento de reta que liga os pontos médios de duas arestas homólogas das bases. Projetando o ponto médio da aresta da base menor sobre a base maior é destacado um triângulo retângulo, conforme indica a figura ao lado. Aplicando o Teorema de Pitágoras:

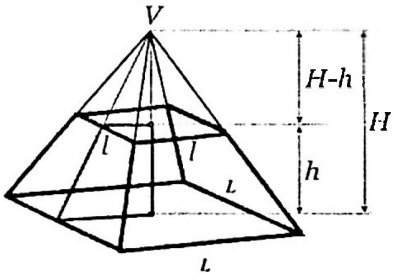
$$Ap^2 = h^2 + (ap_2 - ap_1)^2 \Rightarrow \mathbf{Ap = \sqrt{h^2 + (ap_2 - ap_1)^2}}$$

Como as faces laterais de um tronco de pirâmide são trapézios:

$$S_{lateral} = \frac{(2p_1 + 2p_2)}{2} Ap \Rightarrow \mathbf{S_{lateral} = (p_1 + p_2)Ap}$$

onde p_1 e p_2 são os semi-perímetros das bases do tronco de pirâmide.

11.4.7. Volume do Tronco de Pirâmide



Considere uma pirâmide de aresta de base L e altura H. Um tronco de pirâmide é gerado pela interseção de um plano paralelo à base da pirâmide de modo que a aresta da base menor do tronco seja l e a altura do tronco seja h. Seja b a área da base menor do tronco e B a área da base maior do tronco. Seja V' o volume da pirâmide menor (de altura $H - h$) determinada pela seção do plano. A partir do vértice V da pirâmide trace um plano que é ortogonal às bases do tronco. Este plano determina uma seção na pirâmide original denominada de seção meridiana. Nesta seção considere os dois triângulos destacados na figura ao lado. Usando semelhança de triângulos, demonstram-se as seguintes relações:

i) $\frac{l}{L} = \frac{H-h}{H}$ ii) $\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{b}{B}$ iii) $\left(\frac{H-h}{H}\right)^3 = \frac{V'}{V_{pirâmide}}$

Da relação (ii) segue que: $\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow 1 - \frac{h}{H} = \sqrt{\frac{b}{B}} \Rightarrow$

$$\frac{h}{H}=\frac{\sqrt{B}-\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \Rightarrow H=\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

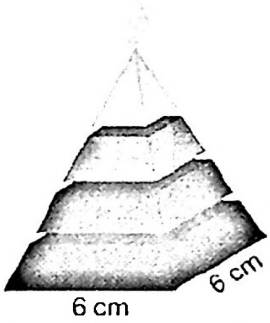
O volume V_{tronco} do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_{tronco}=V-V'==\frac{1}{3}B.H-\frac{1}{3}b.(H-h)=\frac{b.h+H(B-b)}{3}=\frac{b.h+h\sqrt{B}(\sqrt{B}+\sqrt{b})}{3} \Rightarrow$$

$$V_{tronco}=\frac{h}{3}\left[B+\sqrt{B.b}+b\right]$$

Exercícios Resolvidos

1) (ENEM-09) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3. b) 189 cm^3. c) 192 cm^3. d) 216 cm^3. e) 540 cm^3.

Solução: Alternativa B

Como existe um espaçamento de 1,0 cm entre cada um dos quatro bloco que formam a vela, eliminando estes três espaçamentos forma-se uma pirâmide de altura 19 cm – 3,0 cm = 16,0 cm

O volume total de parafina é igual ao volume desta pirâmide com os espaçamentos eliminados:

$$V_i=\frac{1}{3}S_b.h=\frac{1}{3}6^2.16=192\,cm^3$$

A pirâmide que será retirada possui aresta da base igual a 1,5 cm e altura 4 cm. Seu volume vale:

$$V_t = \frac{1}{3}S_b.h = \frac{1}{3}(1,5)^2.4 = 3\,cm^3$$

Logo, ao retirar-se a pirâmide superior o volume de parafina será

$$V_T - V_t = 192 - 3 = 189\ cm^3$$

2) (ITA-00) Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a :

a) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})$cm b) $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2})$cm c) $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})$cm

d) $2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$cm e) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})$cm

Solução: Alternativa D

$$\left(\frac{H}{H-h}\right)^3 = \frac{V}{\frac{2V}{3}} \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt[3]{9}}}{\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - h} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow 6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3}(6 - \sqrt[3]{9}h) \Rightarrow$$

$$3h = 6(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \Rightarrow h = 2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$$

3) (IME-07) O volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de volume V é:

a) $\frac{V}{2}$ b) $\frac{V}{4}$ c) $\frac{V}{8}$ d) $V\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $V\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solução: Alternativa A

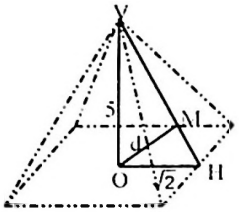
Retirando-se o octaedro do Tetraedro regular dado, restam quatro Tetraedros regulares, congruentes entre si e semelhantes ao original. Como a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$,o volume de cada Tetraedro menor é $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$do volume inicial.

Portanto, o volume do octaedro é dado por: $V - 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$

4) (ITA-03) Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm^2. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $\sqrt{3}$

Solução: Alternativa B



$S_{base} = \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$ cm

Pelas relações métricas no triângulo retângulo ΔVOH temos que

$OV.OH = OM.VH \Rightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{27} \times d \Rightarrow$

$d = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{9}$ cm

5) (ITA-06) Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

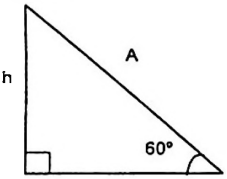
a) $81\sqrt{3}/2$ b) $81\sqrt{2}/2$ c) $81/2$ d) $27\sqrt{3}$ e) $27\sqrt{2}$

Solução: Alternativa A

Considerando a figura abaixo e empregando a lei do cossenos temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell.\ell\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d = \ell\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \ell\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 3\text{cm}$$

A base (a), a altura (h) e o apótema da pirâmide (A) formarão o triângulo.



Desde que $a = A \cos 60°$ e como

$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ temos $\frac{3\sqrt{3}}{2} A.\frac{1}{2} \Rightarrow A = 3\sqrt{3}$

Assim: $S_t = pA + S_B = 9.3\sqrt{3} + 6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_t =$

$$27\sqrt{3} + \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2$$

6) (ITA-10) Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cuja arestas medem 1cm Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$,então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

Solução: Alternativa B

Como $\overline{MN}$ é perpendicular comum às arestas opostas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a área pedida é dada por $\frac{MN.ND}{2}$. Já que $ND = \frac{1}{2}$cm e $MD = \frac{\sqrt{3}}{2}$cm, tem-se que:

$$MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, A área procurada é: $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\,cm^2$

7) (ITA-07) Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a.

a) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$ b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)/3$ c) $\left(3\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)/21$

d) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)/6$ e) $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/22$

Solução: Alternativa C

Sendo $\sqrt{3}$ cm o apótema da base da pirâmide original, tem-se que a aresta dessa base mede 2 cm. Como a pirâmide nova é semelhante à original e a razão entre as alturas é a razão de semelhança, conclui-se que a aresta da base da nova pirâmide é igual a $\sqrt{2}$ cm. Finalmente, sendo x a altura do tronco, seu volume será dado por:

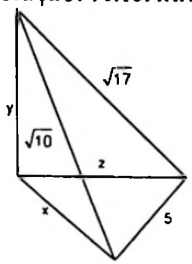
$$\frac{x}{3}\left(\frac{3.2^2.\sqrt{3}}{2}+\frac{3.\sqrt{2}^2.\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{3.2^2.\sqrt{3}}{2}.\frac{3.\sqrt{2}^2.\sqrt{3}}{2}}\right)=1\left(cm^3\right)\Rightarrow$$

$$\frac{x}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\left(6+2\sqrt{2}\right)=1\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}.\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}\,cm$$

8) (ITA-13) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2. b) 4. c) $\sqrt{17}$ d) 6. e) $5\sqrt{10}$.

Solução: Alternativa A



Pelo Teorema de Pitágoras:

$x^2+y^2=10$, $x^2+z^2=25$ e $y^2+z^2=17$

Somando estas equações: $x^2+y^2+z^2=26 \Rightarrow x=3$, $y=1$ e $z=4$

Logo, o volume do sólido vale

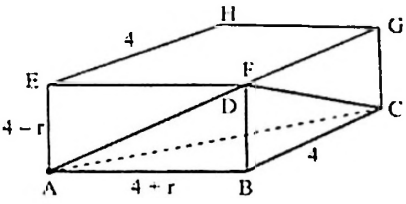
$$V=\frac{1}{3}S_{base}.H=\frac{1}{3}\frac{x.z}{2}y=\frac{3.1.4}{6}=2\ cm^3$$

9) (ITA-13) Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a $10cm^3$. Calcule:

(a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

(b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Solução:



a) Supondo que AB, AD e AE formem uma PA nesta ordem:

1) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = 12 \Leftrightarrow \overline{AD} = 4$

2) $V_{ABCF} = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{3}.(ABC).BF = 10 \Leftrightarrow$

$(ABC).BF = 30 \Leftrightarrow (\frac{ABCD}{2}).BF = 30 \Leftrightarrow$

$(\overline{AD}.\overline{AB}).\overline{BF} = 60 \Leftrightarrow 4.(4-r).(4+r) = 60 \Rightarrow 16 - r^2 = 15 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$

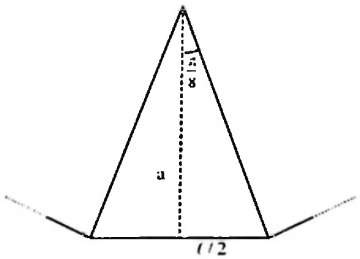
$(AB, AD, AE) = (3, 4, 5)$

b) $V = \overline{AB}.\overline{AD}.AE \Leftrightarrow V = 60\ cm^3$

$S_T = 2.(\overline{AD}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AB} + \overline{AE}.\overline{AB}) \Rightarrow S_T = 2.(3.4 + 3.5 + 4.5) \Rightarrow S_T = 94\ cm^2$

10) (ITA-09) A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

Solução:



Seja H a altura da pirâmide e h a altura dos triângulos das faces laterais

Então: $\frac{Se}{Sb} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{\frac{8\ell.h}{2}}{\frac{8.\ell a}{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow h = a\sqrt{5}$

$tg\ \frac{\pi}{8} = \frac{\ell}{2a} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \ell = 2a(\sqrt{2} - 1)$

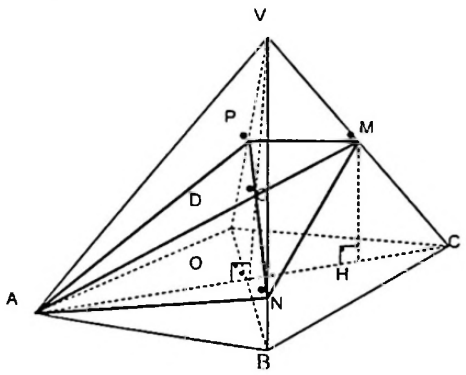
Assim: $H = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$

$V = \frac{1}{3}Sb.H \Rightarrow V = \frac{1}{3}.8.\frac{1a}{2}.2a \Rightarrow V = \frac{8.\ell a^2}{3} = \frac{16a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$

11) (IME-03) Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular ABCD. O lado da base da pirâmide mede ℓ e a aresta lateral $\ell\sqrt{2}$. Corta-se essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio

da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

Solução:



Seja S a seção procurada. A interseção do plano BDF com S deve ser uma reta paralela à $\overline{BD}$, $\overline{PN}$.

Como AVC é um plano de simetria, concluir-se que:

NA = AP e PM = NM. Portanto, A seção S, representada pelo quadrilátero APMN, possui diagonais perpendiculares e sua área é igual a $\frac{AM \cdot PN}{2}$.

Inicialmente, note-se que $\overline{AM}$ é a altura de um triângulo AVC, equilátero. Assim, $AM = \frac{\ell\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{6}}{2}$

Agora sejam $\overline{AM} \cap \overline{PN} = \{0'\}$ e $\overline{VO}$ a altura da pirâmide no ΔAMC, retângulo em M, a altura relativa à hipotenusa, $\overline{MH}$, mede:

$$MH = \frac{AM \cdot MC}{AC} = \frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{4}$$

Além disso: $AH = \frac{AM^2}{AC} = \frac{\frac{3\ell}{2}}{\ell\sqrt{2}} = \frac{3\ell\sqrt{2}}{4}$

Da semelhança entre os triângulos AMH, segue:

$$\frac{OO'}{MH} = \frac{AO}{AH} \Rightarrow OO' = \frac{\ell\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\ell\sqrt{2}}{4}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}$$

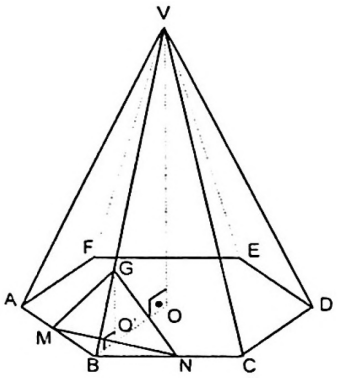
Finalmente, no triângulo equilátero VBD, sendo PN = x, conclui-se que:

$$\frac{(\ell\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6} \Rightarrow x = \frac{2\ell\sqrt{2}}{3}$$

Desse modo: $S_{APMN} = \frac{AM \cdot PN}{2} = \frac{\frac{\ell\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2\ell\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{3}$

12) (IME-04) Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono $ABCDEF$ de lado a. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. Calcule a razão entre os volumes destes dois poliedros.

Solução:



Pelo ponto O', médio de MN, seja a perpendicular ao plano do hexágono, O'G, com G na aresta BV (uma vez que GO' // VO). Assim, o plano MNG é perpendicular ao plano do hexágono, por conter uma reta perpendicular à base.

Nesta situação, a pirâmide fica dividida em dois poliedros: um tetraedro, BMNG, de volume v, e um outro sólido, de vértices MAFEDCNGV, o qual será visto como a diferença entre a pirâmide original e o tetraedro obtido, cujo volume será V. O volume da pirâmide hexagonal é dado por:

$$V_0 = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}.$$

Agora, resta calcular o volume do tetraedro. Para tanto, considerar-se-á sua base como sendo o triângulo BMN, isósceles (BM = BN = a/2). A área de tal triângulo é igual a: $S_{BMN} = \frac{1}{2}.BM.BN.\text{sen}120^\circ = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

A altura do tetraedro, O'G, pode ser calculada a partir da semelhança entre os triângulos BO'G e BOV: $\frac{O'G}{OV} = \frac{O'B}{OB}$ (I). Mas, ainda no triângulo BMN, BO' é altura relativa à base, MN, além de bissectar o ângulo interno $\hat{B}$. Logo, no triângulo BO'N: cos 60° = BO'/BN $\Rightarrow$ BO' = a/4.

Por conseguinte, da equação (I): O'G = h/4, lembrando que OB = a.

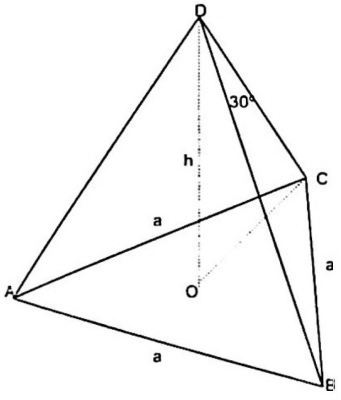
Desta forma: $v = \frac{1}{3}.S_{BMN}.O'G = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{16}.\frac{h}{4} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4.16.3}$.

Finalmente, a razão entre os volumes dos poliedros obtidos é:

$$\frac{V}{v} = \frac{V_0 - v}{v} = \frac{V_0}{v} - 1 = \frac{\frac{a^2h\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2h\sqrt{3}}{4.16.3}} - 1 = 96 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V}{v} = 95$$

13) (IME-12) Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Solução:



Considere-se a pirâmide em questão como tendo por base o triângulo equilátero ABC, de lado a e de centro O, e altura OD, de medida h, perpendicular ao plano ABC.

Então, como $OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e o ângulo BÔC mede 30°, tem-se que:

$BC^2 = 2CD^2(1 - \cos 30°) \Rightarrow BC = CD\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow$

$CD = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ e $CD^2 = OD^2 + OC^2 \Rightarrow$

$$\frac{a^2}{2-\sqrt{3}} = h^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}$$

Portanto, o volume pode ser obtido da seguinte forma:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}.$$

No triângulo BCD (como em qualquer outra face lateral), aplicando a Lei dos Senos: $\frac{a}{\text{sen}30°} = 2R$, em que R é o raio pedido.

Logo: $a = R \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$

14) (IME-15) Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

Solução:

Se H é a altura do tetraedro original, sabe-se que $H = \frac{d\sqrt{6}}{3}$.

$$\left(\frac{h_1}{H}\right)^3 = \frac{\frac{V}{3}}{V} = \frac{1}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{H}{\sqrt[3]{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}}$$

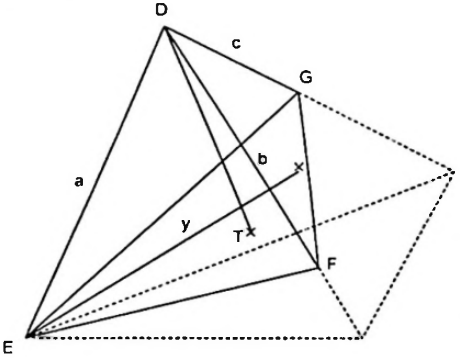
$$\left(\frac{h_1+h_2}{H}\right)^3 = \frac{\frac{2V}{3}}{V} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_1 + h_2 = \frac{\sqrt[3]{2}H}{\sqrt[3]{3}} = \frac{d\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}} \Rightarrow h_2 = \frac{d\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}} - \frac{d\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}} \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{d(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}}$$

$$h_3 = H - (h_1 + h_2) = \frac{d\sqrt{6}}{3} - \frac{d\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{3}} \Rightarrow h_3 = \frac{d\sqrt{6}(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})}{3\sqrt[3]{3}}$$

15) (IME-13) Considere um tetraedro regular ABCD e um plano π, oblíquo à base ABC. As arestas DA, DB e DC, desse tetraedro são seccionadas, por este plano, nos pontos E, F e G, respectivamente. O ponto T é a interseção da altura do tetraedro, correspondente ao vértice D, com o plano π. Determine o valor de DT sabendo que $\frac{1}{DE} + \frac{1}{DF} + \frac{1}{DG} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Solução:



Sejam ED = a, DF = b e DB = c.

Corte o tetraedro por um plano paralelo à base ABC e que passa pelo ponto T. A seção determina um tetraedro regular, onde T é o baricentro da base (que é um triângulo equilátero) deste tetraedro regular, considerando o ponto D como vértice. Neste novo tetraedro regular é imediato que o ponto T pertence a sua altura, fazendo com que a distância de T a cada uma das faces laterais DEF, DFG e DGE sejam iguais e valem $\frac{DT}{3}$ (para concluir isso basta decompor este novo tetraedro em 3 tetraedros menores).

Decompondo o tetraedro DEFG em 3 tetraedros menores TDEF, TDFG e TDEG, todos com vértice em T, tem-se que:

$V_{DEFG} = V_{TDEF} + V_{TDFG} + V_{TDEG} \Rightarrow$

$$\frac{1}{3}\frac{a.b.sen60^\circ}{2}\frac{DT}{3} + \frac{1}{3}\frac{b.c.sen60^\circ}{2}\frac{DT}{3} + \frac{1}{3}\frac{a.c.sen60^\circ}{2}\frac{DT}{3} = \frac{1}{3}\frac{b.c.sen60^\circ}{2}y \Rightarrow$$

$DT(a.b + b.c + a.c) = 3.b.c.y$, onde y é a distância do ponto E à face DFG.

Para determinar y basta calcular a altura de um tetraedro regular de lado DE = a.

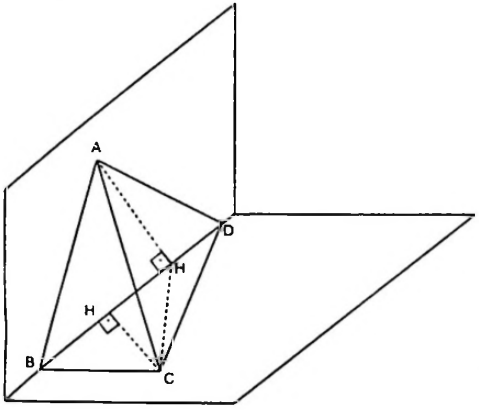
Assim, segue diretamente que $y = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Logo: $DT(a.b + b.c + a.c) = 3.b.c.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$

$$\frac{1}{DT} = \frac{a.b + b.c + a.c}{\sqrt{6}.abc} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6} \Rightarrow DT = 6$$

16) (ITA-15) Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Solução:



Seja ABCD a folha retangular de papel, cobrada ao longo da diagonal $\overline{BD}$, com AD = BC = 3cm e AB = CD = 4cm. Claramente, pelo Teorema de Pitágoras, BD = 5cm. Além disso, sendo $\overline{AH}$ altura no triângulo ABD, $BH = \frac{16}{5}$cm e $DH = \frac{9}{5}$cm, aplicando relações métricas no citado triângulo, bem como $AH = \frac{12}{5}$cm. Analogamente, denominando $\overline{CH'}$ a altura relativa à hipotenusa no triângulo BCD, tem-se $BH' = \frac{9}{5}$cm, o que implica $BH - BH' = \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$cm = HH', assim como $CH' = \frac{12}{5}$cm. Portanto, no triângulo retângulo CHH', conclui-se que

$$CH^2 = CH'^2 + HH'^2 = \frac{144}{25} + \frac{49}{25} = \frac{193}{25}\text{cm}^2.$$

Tendo em vista que os planos que contêm os triângulos ABD e BCD são perpendiculares, pode-se garantir que $\overline{AH}$ é perpendicular ao plano que passa por B, C e D. Logo, o triângulo ACH é retângulo em C.

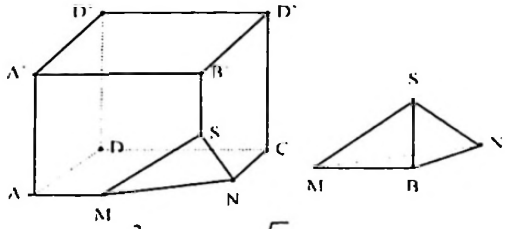
Novamente empregando o Teorema de Pitágoras a tal triângulo, segue-se que:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = \frac{144}{25} + \frac{193}{25} = \frac{337}{25}\text{cm}^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{337}}{5}\text{cm}.$$

Finalmente, as medidas das arestas do tetraedro ABCD são AB = CD = 4cm, BD = 5cm e $AC = \frac{\sqrt{337}}{5}$cm.

Exercícios de Vestibular

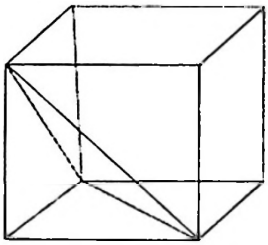
1) (Furg-05) Dado um sólido com formato de um cubo com aresta a, onde a é um número inteiro positivo, considere um vértice B e os pontos médios M, S e N de cada aresta adjacente a esse vértice. Esses 4 pontos definem um tetraedro que é retirado do cubo, conforme ilustra a figura abaixo. Sabendo que o volume de uma pirâmide é um terço da área da base pela altura, então a razão do volume do cubo original e o volume do tetraedro definido pelos vértices M, S, B e N é dada por



a) $\frac{1}{48}$. b) $\frac{a}{25}$. c) $\frac{a^2}{25}$. d) $\frac{a\sqrt{2}}{50}$. e) $\frac{1}{25}$.

2) (Unesp-11) Há 4500 anos, o Imperador Quéops do Egito mandou construir uma pirâmide regular que seria usada como seu túmulo. As características e dimensões aproximadas dessa pirâmide hoje, são:
1ª-) Sua base é um quadrado com 220 metros de lado;
2ª-) Sua altura é de 140 metros.
Suponha que, para construir parte da pirâmide equivalente a $1{,}88 \times 10^4$ m^3, o número médio de operários utilizados como mão de obra gastava em média 60 dias. Dados que $2{,}2^2 \times 1{,}4 \cong 6{,}78$ e $2{,}26 \div 1{,}88 \cong 1{,}2$ e mantidas estas médias, o tempo necessário para a construção de toda pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de, aproximadamente,
A) 20. B) 30. C) 40. D) 50. E) 60.

3) (UFPE-12) Os vértices de um tetraedro são um dos vértices de um cubo de aresta 30 cm e os três vértices ligados a ele por uma aresta do cubo, como ilustrado na figura abaixo.



Se V é o volume do tetraedro, em cm^3, assinale V/100.

4) (FGV-12) Um cubo de aresta 12cm é seccionado duas vezes, formando três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como mostra a figura 1. Em seguida, o cubo é novamente seccionado, como indicam as linhas tracejadas na figura 2, de modo que os dois cortes feitos dividem o cubo original em três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como no primeiro caso. Ao final de todas as seções, o cubo foi dividido em nove peças.

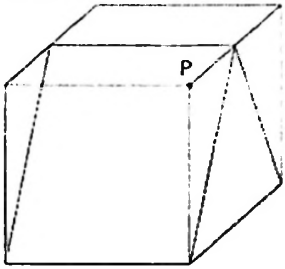


figura 1

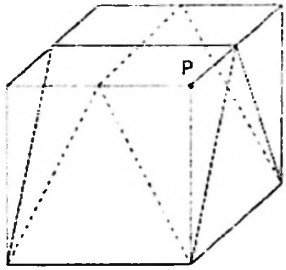
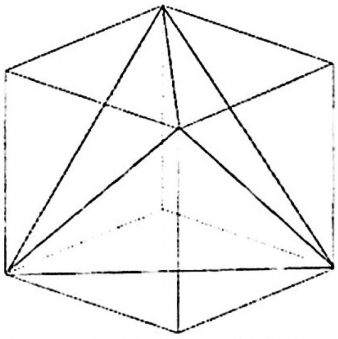


figura 2

O volume da peça final que contém o vértice P, em cm^3, é igual a
A) 144. B) 152. C) 288. D) 432. E) 466.

5) (Insper-12) Em uma pirâmide quadrangular regular, a área lateral é o dobro da área da base. Nesse caso, cada face lateral forma com o plano da base um ângulo que mede
a) 15°. b) 30°. c) 45°. d) 60°. e) 75°.

6) (UFPE-09) Os quatro vértices de um tetraedro regular são vértices de um cubo (conforme a ilustração a seguir). Qual fração do volume do cubo é ocupada pelo tetraedro?

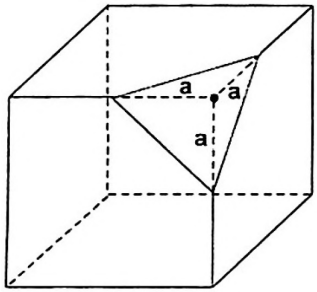


A) 1/5 B) 1/4 C) 3/5 D) 1/2 E) 1/3

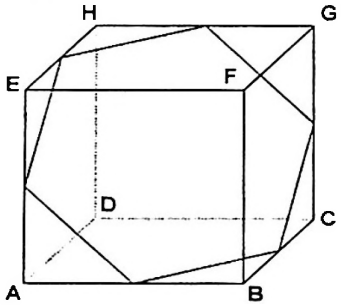
7) (Fatec-04) Uma pirâmide regular, de 8 cm de altura, tem por base um quadrado cujos lados medem 12 cm. Ela é seccionada por um plano paralelo à base, que intercepta a altura no seu ponto médio. A área total do tronco de pirâmide obtido é, em centímetros quadrados, igual a

a) 180 b) 240 c)300 d) 324 e) 360

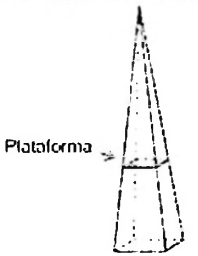
8) (UFPE-99) Um cubo com lados medindo **2 m** é interceptado por um plano que corta 3 de suas arestas adjacentes à distância a em de um dos seus vértices (veja ilustração abaixo). Sabendo que o volume do tetraedro assim obtido é de 1/48 do volume do cubo, indique o inteiro mais próximo de a/2



9) (UFPE-00) Um cubo **ABCDEFGH** de aresta 6 é interceptado por um plano que passa pelos pontos médios das arestas **AB**, **BC**, **CG**, conforme a ilustração abaixo. Qual o inteiro mais próximo do volume da pirâmide que tem por base a interseção do cubo com o plano e por vértice, o ponto **F**?

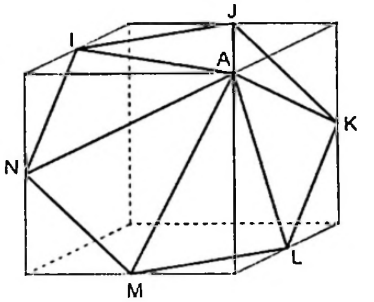


10) (UFG-08) A figura abaixo representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada, na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela à base. Se os lados da base e da plataforma medem, respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da torre, em metros, é:



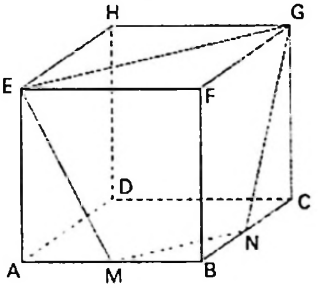
a) 75 b) 90 c) 120 d) 135 e) 145

11) (UFJF-11) O vértice A de um cubo junto com os pontos médios I, J, K, L, M e N de seis de suas arestas são os vértices de uma pirâmide, conforme se pode ver na figura abaixo:



A medida da aresta desse cubo é 2cm. O volume dessa pirâmide é:
a) 1cm³ b) 2cm³ c) 3cm³ d) 4cm³ e) 5cm³.

12) (Fuvest-11) Na figura abaixo, o cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H tem lado L. Os pontos M e N são pontos médios das arestas AB e BC, respectivamente. Calcule a área da superfície do tronco de pirâmide de vértices M, B, N, E, F, G.



13) (Insper-11) Dois faraós do antigo Egito mandaram construir seus túmulos, ambos na forma de pirâmides quadrangulares regulares, num mesmo terreno plano, com os centros de suas bases distando 120m. As duas pirâmides têm o mesmo

volume, mas a área da base de uma delas é o dobro da área da base da outra. Se a pirâmide mais alta tem 100m de altura, então a distância entre os vértices das duas pirâmides, em metros, é igual a

a) 100. b) 120. c) 130. d) 150. e) 160.

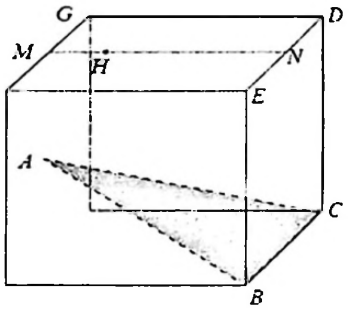
14) (Unicamp-96) Um tetraedro regular, cujas arestas medem 9 cm de comprimento, tem vértices nos pontos A, B, C e D. Um plano paralelo ao plano que contém a face BCD encontra as arestas AB, AC e AD, respectivamente, nos pontos R, S e T.

a) Calcule a altura do tetraedro ABCD.

b) Mostre que o sólido ARST também é um tetraedro regular.

c) Se o plano que contém os pontos R, S e T dista 2 centímetros do plano da face BCD, calcule o comprimento das arestas do tetraedro ARST.

15) (UFJF-11) Na figura a seguir, considere o cubo de aresta de medida 2 cm e faces adjacentes BCDE e DEFG . Nesse cubo, o ponto A localiza-se no centro da face oposta à face BCDE . N e M são pontos médios das arestas DE e GF , respectivamente, e H pertence ao segmento MN .



a) Calcule a medida da área do triângulo ABC .

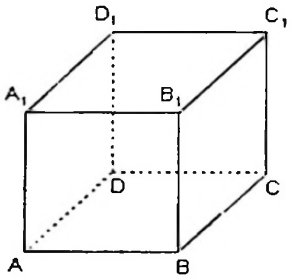
b) Sabendo que AH é a altura da pirâmide HABC de base triangular ABC, determine o valor da medida do volume dessa pirâmide.

16) (UFJF-11) Uma pirâmide reta de base quadrada tem aresta da base medindo 8 cm. Em uma seção transversal paralela à base e distante 3 cm desta, inscreve-se um círculo de área igual a π cm^2. Calcule o volume e a área total da pirâmide.

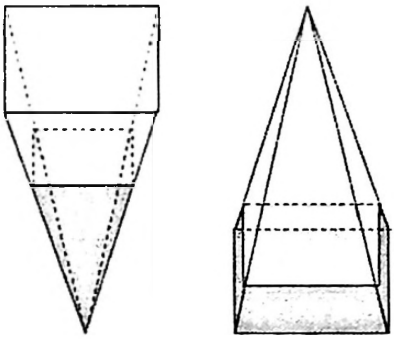
17) (Unicamp-02) O sólido da figura ao lado é um cubo cuja aresta mede 2cm.

a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.

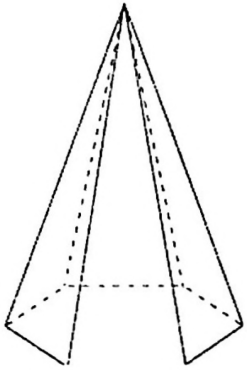
b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.



18) (UFPE-10) Na ilustração a seguir, à esquerda, uma pirâmide regular invertida, com base quadrada de lado medindo 2 e altura 6, está preenchida por um líquido, até dois terços de sua altura. Se a pirâmide é colocada na posição ilustrada à direita, qual será então a altura h do líquido? Indique $(h + 2\sqrt[3]{19})^2$



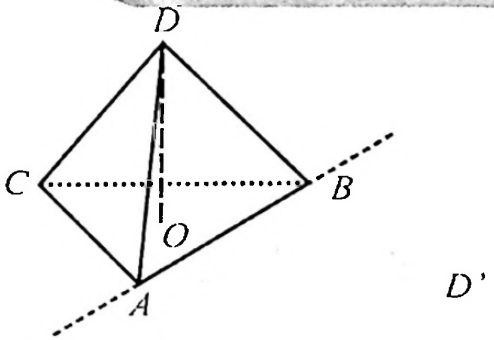
19) (UFPE-11) Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm^3. Dado: use a aproximação $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.



20) (Fuvest-12) Em um tetraedro regular de lado a, a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

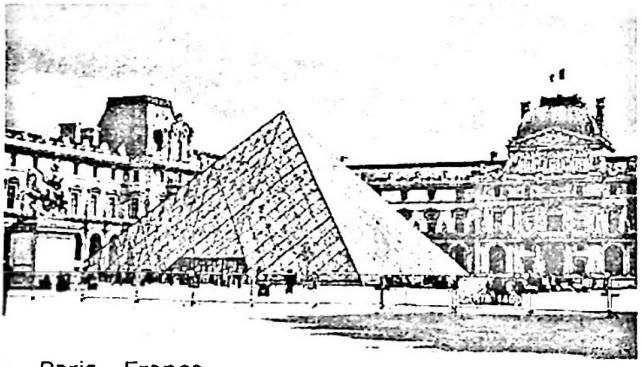
a) $a\sqrt{3}$ b) $a\sqrt{2}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

21) (UFRJ-09) Um sólido tem a forma de uma pirâmide ABCD e está apoiado sobre uma mesa. A base da pirâmide é o triângulo equilátero ABC e as outras faces são triângulos isósceles congruentes. A altura OD mede 5cm e a aresta AD mede 10cm. A pirâmide é girada em torno da aresta AB. O vértice D percorre um arco DD' tal que D' fica situado sobre a mesa.



Determine o comprimento do arco DD'.

22) (UEG-11) A figura abaixo mostra uma vista parcial do Museu do Louvre em Paris, em cuja entrada foi construída uma enorme pirâmide de vidro que funciona como acesso principal. A pirâmide do Louvre, um projeto do arquiteto sino-americano Ming Pei, foi inaugurada em 1988 e está situada na praça central do museu. Trata-se uma pirâmide regular, de base quadrada e com lados medindo 35 m.



Paris - França

De acordo com os dados apresentados acima, calcule a altura da pirâmide.

23) (UEM-12) Uma pirâmide ABCDE possui base quadrada ABCD e o vértice E é equidistante dos demais vértices. Seja O a interseção das diagonais do quadrado ABCD, assinale o que for correto.

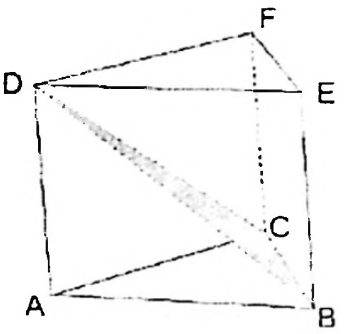
01) Todas as faces triangulares dessa pirâmide são triângulos isósceles.

02) Se o comprimento do segmento OE é igual ao comprimento do segmento OA, todas as arestas da pirâmide possuem o mesmo comprimento.

04) Se o comprimento de OE é $\frac{\sqrt{15}}{2}$ vezes o comprimento do lado do quadrado ABCD, a área da face triangular ABE é maior do que a área de ABCD.

08) Se dobrar-se a medida do lado do quadrado e reduzir-se pela metade a medida da altura relativa à base quadrada, o volume da pirâmide permanecerá constante.
16) Se o volume da pirâmide, em centímetros cúbicos, é numericamente igual à área do quadrado ABCD, em centímetros quadrados, a altura da pirâmide é 3 cm.

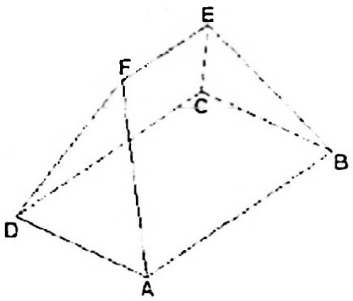
24) (UEL-10) O prisma triangular regular reto ABCDEF com aresta da base 10 cm e altura AD = 15 cm é cortado por um plano passando pelos vértices D, B e C, produzindo dois sólidos: uma pirâmide triangular e uma pirâmide quadrangular. Os volumes destas duas pirâmides são



a) 125 cm^3 e 250 cm^3
b) $125\sqrt{3}$ cm^3 e $250\sqrt{3}$ cm^3
c) $150\sqrt{2}$ cm^3 e $250\sqrt{3}$ cm^3
d) $150\sqrt{3}$ cm^3 e $225\sqrt{3}$ cm^3
e) 250 cm^3 e 250 cm^3

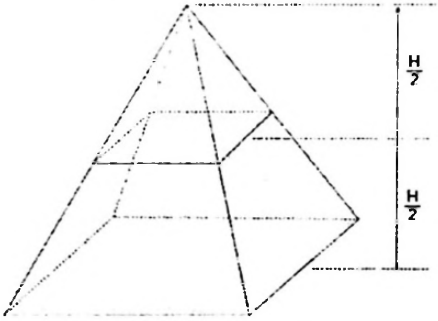
25) (FGV-10) Uma pirâmide de base quadrada é seccionada por um plano paralelo à sua base, distante 2m dela. A área total da pirâmide menor, obtida pela secção, é igual à metade da área total da pirâmide original.
a) Calcule a altura da pirâmide original.
b) Calcule o volume do tronco de pirâmide obtido pela secção para o caso em que a aresta da base da pirâmide maior mede 3m.

26) (Fuvest-04) No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2L e AD = L; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento EF tem comprimento L. Determinar, em função de L, o volume de S.



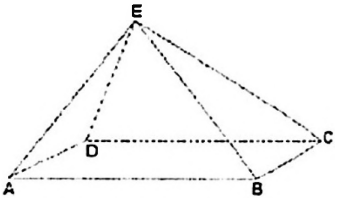
27) (Insper-05) Considere uma pirâmide regular de vértice V e arestas laterais medindo 6cm, cuja base é um quadrado de diagonais AC e BD. Se a área lateral desta pirâmide totaliza $36cm^2$, então um possível valor para a medida do ângulo $V\hat{A}B$ é
a) 45° b) 60° c) 75° d) 90° e) 105°

28) (Insper-06) Um artista projetou um enfeite no formato de pirâmide regular, constituído de resina colorida até a metade da altura, e de resina transparente na outra metade, como mostra a figura.

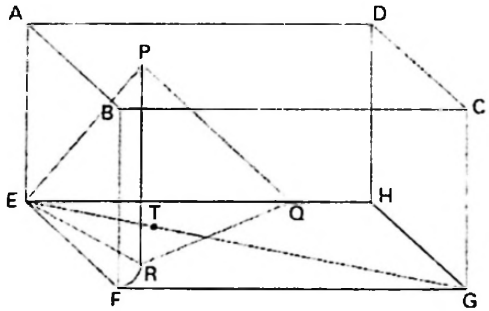


Sabendo que foram gastos 672mL de resina colorida na confecção do enfeite, o volume de resina transparente necessário deverá ser de aproximadamente
a) 84mL b) 96mL c) 168mL d) 252mL e) 336mL.

29) (Fuvest-05) A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados AB = 4 e BC = 3. As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



30) (Unifesp-13) Na figura, ABCDEFGH é um paralelepípedo reto-retângulo, e PQRE é um tetraedro regular de lado 6cm, conforme indica a figura. Sabe-se ainda que:
- P e R pertencem, respectivamente, às faces ABCD e EFGH;
- Q pertence à aresta $\overline{EH}$;
- T é baricentro do triângulo ERQ e pertence à diagonal $\overline{EG}$ da face EFGH;
- $\overset{\frown}{RF}$ é um arco de circunferência de centro E.



a) Calcule a medida do arco $\overset{\frown}{RF}$, em centímetros.
b) Calcule o volume do paralelepípedo ABCDEFGH, em cm^3.

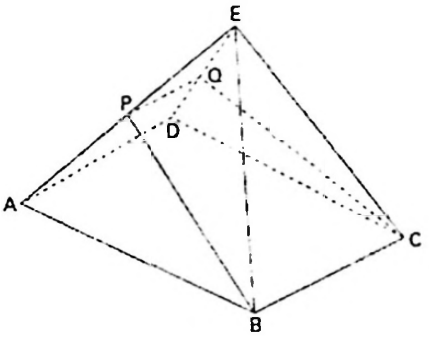
31) (Fuvest-13) Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é
a) $2\sqrt{3}$ b) 4 c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) 6

32) (Fuvest-09) A figura representa uma pirâmide ABCDE, cuja base é o retângulo ABCD. Sabe-se que

$AB = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AD = BC = AE = BE = CE = DE = 1$

$AP = DQ = \frac{1}{2}$.



Nessas condições, determine:
a) A medida de BP.
b) A área do trapézio BCQP.
c) O volume da pirâmide BPQCE.

33) (EsPCEx-95) Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado a, e a razão entre sua aresta lateral e sua altura é k. Seu volume é:
a) $\frac{a^3}{\sqrt{k^2+1}}$ b) $\frac{a^3}{4\sqrt{k^2-1}}$ c) $\frac{a^3}{8\sqrt{k^2+1}}$ d) $\frac{a^3}{12\sqrt{k^2-1}}$ e) $\frac{a^3}{6\sqrt{k^2+1}}$

34) (EsPCEx-96) Seja um triedro com os ângulos das faces iguais a 60°. Toma-se um ponto A numa das arestas desse triedro situado a 12 cm do vértice V. Então, a distância, em cm, entre esse ponto A e a face oposta, vale:
a) $6\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{6}$ e) $4\sqrt{3}$

35) (AFA-94) O volume de um tronco de pirâmide regular é **$109dm^3$**; as bases são triângulos equiláteros de arestas, medindo **5dm** e **7dm**. A altura, em **dm**, é:
a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{3}$

36) (AFA-94) Num tetraedro regular, a razão entre a soma das distâncias de um ponto interno às quatro faces e a altura é:
a) 2/3 b) 1 c) 4/3 d) 3/2

37) (AFA-94) O volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, de $\sqrt{23}$ m de altura, é $\frac{28\sqrt{23}}{3}$ m^3. Sabendo-se que a aresta da base maior 4m, a medida, em m, da aresta da outra base é:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3

38) (AFA-98) Seja uma pirâmide de base quadrada com arestas de mesma medida. O arc cos do ângulo entre as faces laterais que se interceptam numa aresta é

a) -2/3 b) -1/3 c) 1/3 d) 2/3

39) (AFA-98) A área total da pirâmide regular de apótema A_2, onde A_1 e 2p são, respectivamente, apótema e perímetro de sua base, é

a) $p(A_1 + A_2)$ b) $\frac{p}{2}(A_1 + A_2)$ c) $2p(A_1 + A_2)$ d) $p(A_1 + \frac{A_2}{2})$

40) (AFA-99) O apótema de uma pirâmide regular, com base hexagonal, é $9\sqrt{3}$ cm. Se a sua área lateral é o triplo da área de sua base, então, o seu volume, em cm^3, é

a) $\frac{3\sqrt{323}}{4}$ b) $\frac{81\sqrt{35}}{4}$ c) $81\sqrt{3}$ d) $324\sqrt{2}$.

41) (AFA-00) A distância entre as arestas reversas em um tetraedro regular de aresta a e apótema g é

a) $\frac{\sqrt{4g^2 - a^2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{4g^2 - a^2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{g^2 - 4a^2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{g^2 - 4a^2}}{4}$

42) (AFA-03) Seja P uma pirâmide cujo vértice é o centro de uma das faces de um cubo de aresta a e cuja base é a face oposta. Então, a área lateral dessa pirâmide é igual a

a) $a^2\sqrt{5}$ b) $2a^2\sqrt{3}$ c) $a^2\sqrt{3}$ d) $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

43) (Escola Naval-97) A área total de uma pirâmide triangular regular é $36\sqrt{3}$ cm^2 e o raio do círculo inscrito na base mede 2cm. A altura da pirâmide é, em cm:

a) $3\sqrt{12}$ b) $2\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{3}$ d) 4 e) $2\sqrt{3}$

44) (Escola Naval-99) Um tetraedro regular ABCD de aresta medindo 12 cm é cortado por um plano que passa pelo vértice D e pelos pontos M e N situados respectivamente sobre as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Se $\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, o volume da pirâmide AMND é, em cm^3, igual a:

a) $64\sqrt{2}$ b) $16\sqrt{2}$ c) 32 d) 24 e) $48\sqrt{2}$

45) (ITA-83) Consideremos uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede 64 cm^2. Numa seção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede 4π cm^2, então a altura desta pirâmide mede:

a) 1 cm b) 2 cm c) 4 cm d) 6 cm e) 60 cm

46) (ITA-89) O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede L cm. A altura do tronco é igual à metade do apótema desta mesma base. As faces laterais formam um ângulo de 30 graus com a base. Calcule o apótema (a), o lado (l), ambos da base menor, a altura(h) da face lateral e a área total (S) do tronco, todos em função de L.

47) (ITA-90) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) n.d.a.

48) (ITA-91) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem ℓ cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ell^3$ cm^3 b) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$ cm^3 c) $\frac{\sqrt{3}}{24}\ell^3$ cm^3 d) $\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$ cm^3 e) n.d.a.

49) (ITA-93) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 m^2 vale:

a) 128 m^2 b) $64\sqrt{2}$ m^2 c) 135 m^2 d) $60\sqrt{2}$ m^2 e) $32(\sqrt{2}+1)$ m^2

50) (ITA-94) Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm^2. Então sua altura, em cm, é igual a:

a) 2 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

51) (ITA-94) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, então o valor de sua altura h, em cm, é tal que:

a) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$ b) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$ c) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$

d) $1 < h < \sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

52) (ITA-95) Dada uma pirâmide triangular, sabe-se que sua altura mede 3a cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm^2, vale:

a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$

53) (IME-14) Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que AB = BC = $\sqrt{5}$, AD = DC = $\sqrt{2}$, AC = 2 e SA + SB = 7. O volume da pirâmide é:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{11}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$

54) (ITA-96) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são centros das faces do cubo será:

a) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ x cm b) $\frac{\sqrt{3}}{18}$ x cm c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ x cm d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ x cm e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ x cm

55) (ITA-97) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e 2a cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede:

a) $a\sqrt{3}/\sqrt{5}$ b) $a\sqrt{35}/10$ c) $a\sqrt{3}/2\sqrt{5}$ d) $a\sqrt{35}/\sqrt{10}$ e) $a\sqrt{7}/\sqrt{5}$

56) (ITA-98) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de 45°. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

57) (ITA-99) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8m, 10m, e 12m. O volume, em m^3, do sólido formado é:

a) $15\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{30}$ c) $6\sqrt{15}$ d) $30\sqrt{6}$ e) $45\sqrt{6}$

58) (ITA-01) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m^3, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

59) (ITA-02) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

a) 2m b) 4m c) 5m d) 6m e) 8m

60) (IME-67) O volume de um tronco de pirâmide vale 950 cm^2 e sua altura é de 9 cm. A base maior é um triângulo retângulo cuja altura é 12 cm e cujo perímetro é 60 cm. Calcular:
a) O volume da pirâmide da qual se derivou o tronco;
b) A área da base menor do tronco de pirâmide.

61) (IME-68) Corta-se um cubo de aresta a por 8 planos que passam, cada um, pelo meios das arestas que chegam a cada vértice. Considera-se o sólido S que resta, se retirados os 8 tetraedros obtidos a cada vértice. No mesmo sólido S, inscreve-se um octaedro P que tem por vértices os centros das faces do cubo original. Calcular a relação entre os volumes dos sólidos S e P.

62) (IME-70) Um plano corta um triedro de vértice V e ângulo de faces igual a 60°, resultando um sólido de arestas de comprimento VA = 2 m, VB = 5 m e VC = 12 m. Calcule o comprimento deste sólido.

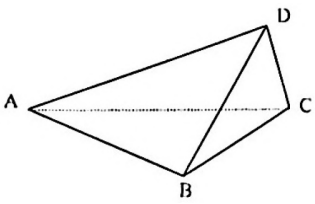
63) (IME-73) Uma pirâmide tem por base uma das faces de um cubo de aresta a e o seu vértice S está sobre uma das diagonais deste cubo. Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a soma dos quadrados das arestas concorrentes em S é igual a $4a^2$.

64) (IME-89) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com AB = AC = a. Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaço, em relação a este plano. a) Calcule a área total da pirâmide de vértice A e base BCC'B'; b) Calcule o volume desta pirâmide; c) Mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera; d) Determine o centro e o raio da esfera.

65) (IME-90) Seja um segmento fixo AO de comprimento a e uma semi-reta variável Ox tal que $A\hat{O}x = \alpha$, o ângulo agudo, pertencentes a um plano fixo π. Seja

a perpendicular ao plano π em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que AB = $\underline{a}$. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:
a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro OABC?
b) Calcule o comprimento das seis aresta de OABC em função de $\underline{a}$ e α.
c) Calcule o volume $\underline{v}$ do tetraedro em função de $\underline{a}$ e α.
d) Determine α de modo que $v = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (existem dois valores).
e) Determine o volume comum aos dois sólidos encontros no item anterior.

66) (IME-94) Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos: CD = $10\sqrt{3}$ dm, CD é perpendicular ao plano ABC, $A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60°$ e $B\hat{D}C = 30°$



Calcule esse volume.

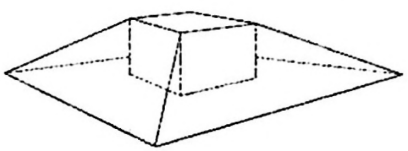
67) (IME-10) A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular ABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e DC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule o ângulo entre estas medianas.

68) (IME-81) Dada um pirâmide hexagonal regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a b e altura igual a 3b/2, traça-se o plano perpendicular à aresta VB no ponto M, tal que este plano contenha os vértices A e C. Determine, para a pirâmide de vértice M e base ABC assim formada:
a) O comprimento da aresta AM.
b) O volume.

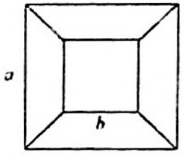
69) (IME Militares-02) Dada uma pirâmide reta de base hexagonal regular, fazemos passar pelo centro de sua base um plano α paralelo a uma face lateral. Ache a razão entre a área da seção obtida e da face lateral.

70) (IME Militares-03) Determine a área total de uma pirâmide triangular regular com aresta da base medindo 5 cm e altura igual a 15 cm.

71) (IME Militares-05) Um cubo de aresta b é colocado sobre um quadrado de lado a de forma que o centro da face inferior do cubo coincide com o centro do quadrado e os lados da face inferior do cubo são paralelos aos lados do quadrado. Une-se cada vértice da face superior do cubo ao vértice mais próximo do quadrado, conforme a figura. Sabendo que b < a , determine o volume do sólido obtido.



Visão em perspectiva



Vista superior

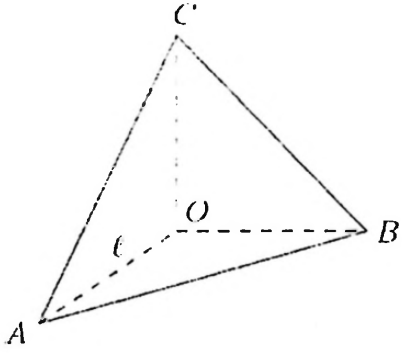
72) (IME Militares-08) Seja ABCD um tetraedro regular, e O um ponto pertencente ao segmento AA', onde A' é a projeção de A no plano BCD. Calcule a distância AO para que o tetraedro OBCD seja trirretângulo.

73) (IME-71) Um cubo de aresta a é seccionado por um plano que contém a diagonal de uma das faces e passa pelo ponto médio de uma aresta da face oposta. Calcule o volume do menor dos sólidos resultantes.

74) (ITA-15) Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

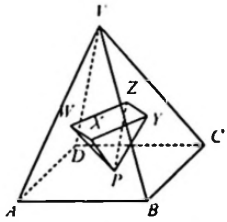
75) (IME-46) Um tetraedro, cujos lados da base medem 6, 10, e 8 metros, tem arestas laterais com comprimento de 13 metros cada uma. Calcular a altura desse poliedro em relação à base considerada.

76) (IME-54) Demonstrar que em um tetraedro triretângulo OABC, de arestas OB, OC e OA, iguais a ℓ, a soma das distâncias de um ponto qualquer M, situado na face ABC, às outras três faces, é constante. Expresse esta soma em função do comprimento ℓ das arestas.



Exercícios de Olimpíada

77) (OBM-02) Considere uma pirâmide *VABCD* de base quadrada. Seja *P* o centro da base *ABCD* e *X*, *Y*, *Z* e *W* pontos sobre as faces laterais tais que *PXYWZ* é uma pirâmide semelhante a *VABCD*, com as diagonais da base *XZ* e *YW* paralelos a *BC* e *CD*, respectivamente.



A razão de semelhança entre as duas pirâmides é

A) $1:\left(\sqrt{2}+1\right)$ B) 1:3 C) 1:2 D) $1:\sqrt{2}$ E) $1:\left(2\sqrt{2}+3\right)$

78) (OBM-81) Os centros das faces de um cubo são os vértices de um poliedro regular de volume V_1. Cada vértice deste cubo pertence a um plano perpendicular à diagonal que liga este vértice ao oposto. Os planos assim definidos delimitam um poliedro regular de volume V_2, circunscrito ao cubo. Prove que $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{27}$.

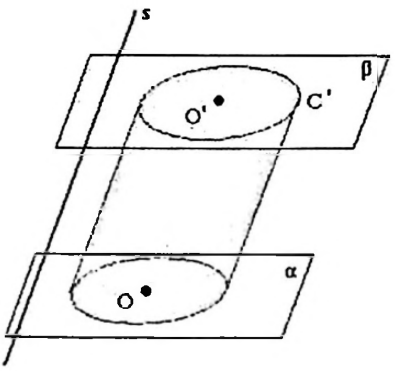
79) (OBM Nível Univ-03) Seja $X \subseteq \mathbb{R}^3$ o poliedro convexo cujos vértices são todos os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ com $x^2+y^2+z^2=2$. Calcule o volume de X.

80) (Olimpíada da Unicamp) Uma pirâmide triangular tem como base um triângulo de lados 13, 14 e 15 centímetros, e as demais arestas da pirâmide são congruentes. Determine o volume da pirâmide em função do comprimento L dessas arestas congruentes.

81) (Olimpíada do Ceará-87) Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra hexagonal, têm bases inscritas numa mesma circunferência de raio R e volumes iguais. Determine a relação entre as alturas das duas pirâmides.

82) (Olimpíada Paulista-03) Mostre que, dentre todas as pirâmides cuja base é um quadrado ABCD de lado 6 e cuja altura é 4, a que tem menor área lateral é a pirâmide regular.

Cilindro

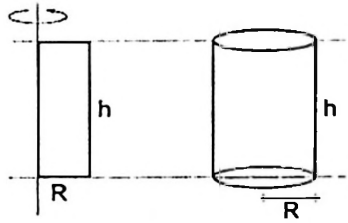


12.1. DEFINIÇÃO: Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e uma circunferência C de centro O contido em α. Considere todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles possua um extremo pertencente à circunferência C e o outro extremo pertencente a β.

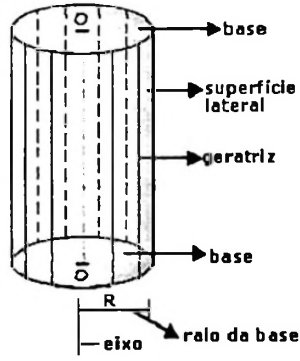
A união de todos esses segmentos de reta é um sólido denominado de cilindro circular limitado de bases C e C' ou simplesmente cilindro circular.

Cilindro circular reto é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Cilindro de revolução é o sólido obtido da rotação de um retângulo ao redor de um dos seus lados.

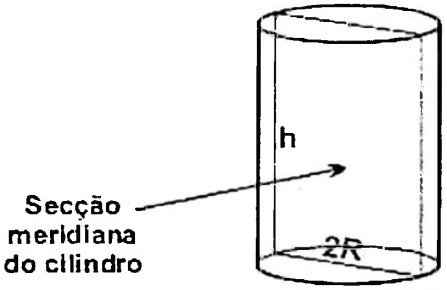


12.2. ELEMENTOS DE UM CILINDRO



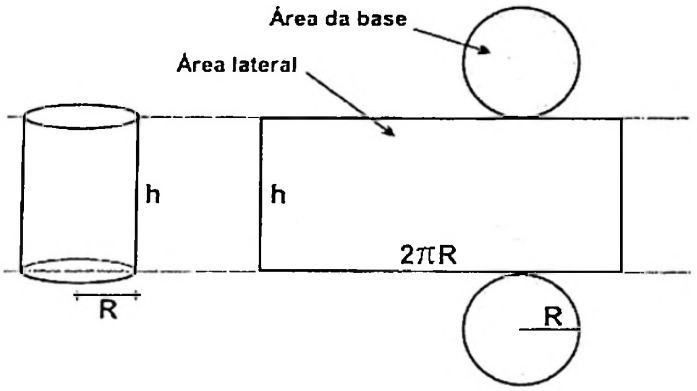
12.3. CILINDRO EQUILÁTERO

Um cilindro é denominado de equilátero se a sua secção meridiana é um quadrado, ou seja, a altura é igual ao diâmetro da base: $h = 2R$



12.4. ÁREAS DE UM CILINDRO

A planificação de um cilindro reto de raio de base R e altura h determina um retângulo de dimensões h e $2\pi R$ (perímetro da base do cilindro) e dois círculos de raio R.



Desta forma, pode-se concluir que:

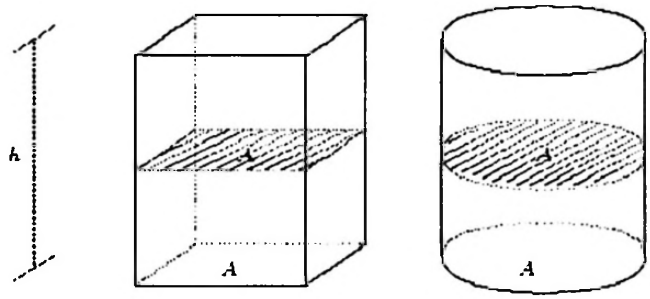
$A_{base} = \pi R^2$ (uma das bases, se for contar as duas o valor é $2\pi R^2$)

$A_{lateral} = 2\pi Rh$

$A_{total} = 2.A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi R(R + h)$

12.5. VOLUME DE UM CILINDRO

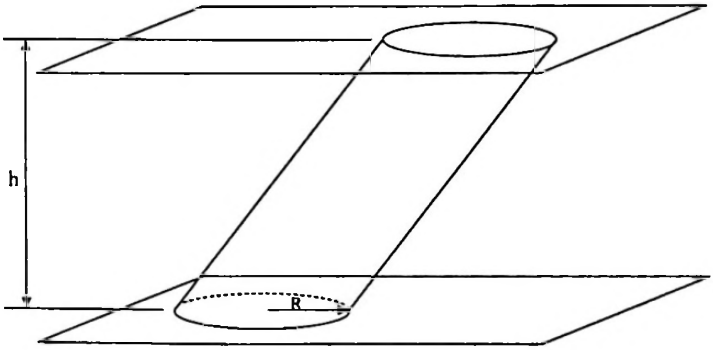
A demonstração do valor do volume de um cilindro será realizado lançando mão do Princípio de Cavalieri. Considere um prisma de altura h e base de área A e um cilindro também de altura h e base de mesma área A, ambos possuindo suas bases pertencentes ao mesmo plano. Apesar da figura abaixo induzir o leitor a pensar que os dois sólidos são retos, esta condição não é obrigatória. Tanto o prisma e o cilindro podem ser oblíquos.



Pelas definições de prisma e cilindro tem-se que qualquer plano paralelo ao plano de suas bases intersecta os dois sólidos determinando figuras congruentes às de suas bases, como ilustrado na figura. Assim, pelo princípio de Cavalieri, tem-se que os volumes do prisma e do cilindro são iguais:

$$V_{cilindro} = A_{base}.h \Rightarrow V_{cilindro} = \pi R^2.h$$

Como foi observado durante a demonstração, esta fórmula também é válida para cilindros não retos (oblíquos). Neste caso, a altura do cilindro será considerada como a distância entre os planos que contém as bases dos cilindros.



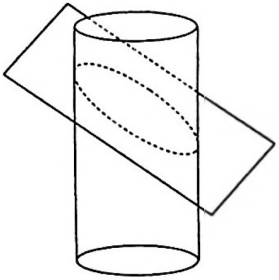
Volume do cilindro não reto (oblíquo)

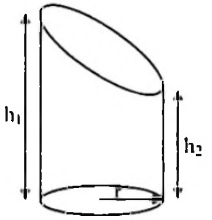
$V = A_{base}.h \Rightarrow$

$V = \pi R^2 h$

12.6. TRONCO DE CILINDRO

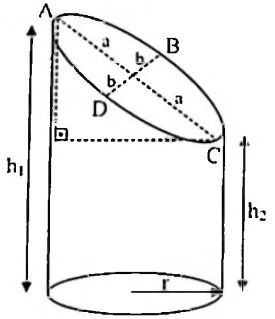
Um tronco de cilindro é obtido fazendo um corte em um cilindro por meio de plano não paralelo às bases do cilindro. Na verdade, o resultado deste corte são dois troncos de cilindro, cada um pertencente a um semi espaço definido pelo plano secante. Na segunda figura está considerado apenas o tronco de cilindro localizado abaixo do plano secante ao cilindro.

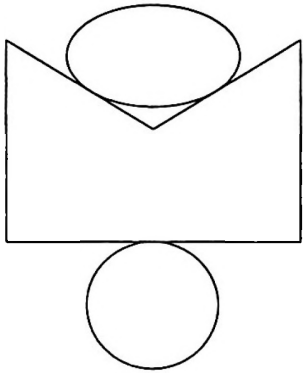




O tronco de cilindro fica determinado pelo raio r da base e pelas alturas máximas h_1 e mínima h_2 da seção inclinada em relação ao plano da base do cilindro. Pode-se demonstrar que a seção inclinada é uma elipse.

2.6.1. Áreas de um Tronco de Cilindro





Cortando o tronco de cilindro por um segmento de reta que passa pelo ponto mais alto do superfície inclinada e é perpendicular à base, a planificação do tronco é formada pela união de um pentágono (formado pela junção de dois trapézios retângulos), uma circunferência e uma elipse. O comprimento do eixo menor BD da superfície inclinada elíptica é igual ao diâmetro da base: $\overline{BD} = 2r$. O comprimento do eixo maior pode ser calculado pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + (h_1 - h_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{4r^2 + (h_1 - h_2)^2}$$

Área Lateral: $A_L = 2A_{trapézio} = 2\dfrac{(h_1 + h_2)}{2}\dfrac{2\pi r}{2} \Rightarrow A_L = \pi r(h_1 + h_2)$

Área da Base: $A_b = \pi r^2$

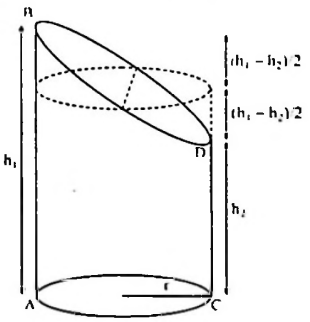
Área da Superfície Inclinada: $A_{inclinada} = \pi\dfrac{\overline{AC}}{2}\dfrac{\overline{BD}}{2} = \pi\dfrac{2r}{2}\dfrac{\sqrt{4r^2 + (h_1 - h_2)^2}}{2} \Rightarrow$

$$A_{inclinada} = \pi r\sqrt{r^2 + \frac{(h_1 - h_2)^2}{2}}$$

Área Total do Tronco de Cilindro: $A_T = A_L + A_b + A_{inclinada} \Rightarrow$

$$A_T = \pi r\left[h_1 + h_2 + r + \sqrt{r^2 + \frac{(h_1 - h_2)^2}{2}}\right]$$

12.6.2. Volume do Tronco de Cilindro



Na figura ao lado, um plano α, paralelo à base do cilindro, foi traçado de modo que esteja à mesma distância dos pontos B e D, respectivamente os pontos mais distantes e mais próximos da base do cilindro. Como a diferença de cotas entre B e D vale $h_1 - h_2$, tem-se que as distâncias de B e D ao plano α são iguais e valem $\dfrac{h_1 - h_2}{2}$.

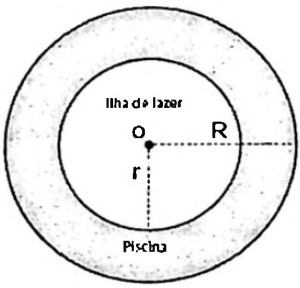
Perceba que a parte do sólido acima do plano α é congruente à região do espaço compreendida entre o plano α e a elipse determinada pela seção no cilindro. Deste modo, o volume do sólido é igual ao de um cilindro de altura $H = h_2 + \dfrac{h_1 - h_2}{2} = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$

Logo, o volume do tronco de cilindro vale:

$$V_{tronco\ de\ cilindro} = \pi r^2 H \Rightarrow V_{tronco\ de\ cilindro} = \pi r^2\frac{(h_1 + h_2)}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1) (ENEM-13) Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m^3, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, $4m^3$.



Considere 3 como valor aproximado para π.
Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de
A) 1,6. B) 1,7. C) 2,0. D) 3,0. E) 3,8.
Solução: Alternativa A
Como o volume inicial de água é 12 m^3:
$V = \pi R^2 h \Rightarrow 12 = 3R^2.1 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$ m
O volume final de água é dado pela subtração entre os volumes do cilindro maior, de raio R, e do cilindro menor, de raio r:

$$V_f \leq \pi(R^2 - r^2)h \Rightarrow 4 \leq 3(4 - r^2) \Rightarrow 4 \leq (12 - 3r^2).1 \Rightarrow r \leq \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow r \leq 1{,}63 \text{ m}$$

Dentre as alternativas apresentadas o valor mais próximo é r = 1,6 m

2) (ENEM-10) Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4 cm e altura 13,5 cm. O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura.
Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de

a) R$ 0,20, pois haverá uma redução de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

b) R$ 0,40, pois haverá uma redução de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

c) R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.

d) R$ 0,80, pois haverá um aumento de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

e) R$ 1,00, pois haverá um aumento de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

Solução: Alternativa B

Como a nova embalagem possui o diâmetro da base igual à altura: $2r_2 = h_2$

Como os volumes são iguais:

$\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \Rightarrow (2)^2(13,5) = r_2^2.2r_2 \Rightarrow r_2^3 = 27 \Rightarrow r_2 = 3\text{ cm} \Rightarrow h = 6\text{ cm}$

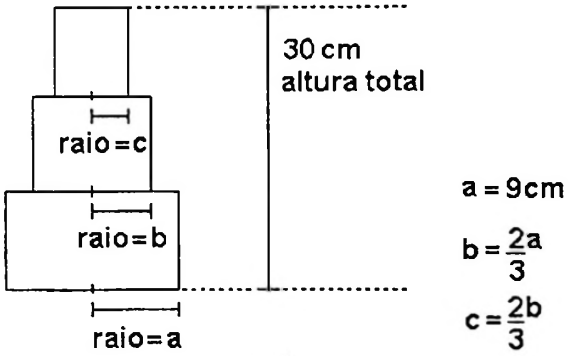
A área lateral da embalagem original é $S_1 = 2\pi r_1 h_1 = 2\pi.2.13,5 = 54\pi\text{ cm}^2$

A área lateral da nova embalagem é $S_2 = 2\pi r_2 h_2 = 2\pi.3.6 = 36\pi\text{ cm}^2$

Como $\frac{S_2}{S_1} = \frac{36\pi}{54\pi} = \frac{2}{3}$ então o gasto com a nova embalagem é 2/3 do valor da embalagem inicial, ou seja, sofreu uma redução de 1/3 de seu valor. Assim, o valor de cada embalagem nova vale:

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}(R\$0,60) = R\$0,40$$

3) (UEL-98) Certa peça de um motor é feita de aço maciço e tem a forma de três cilindros retos, de alturas iguais, um sobre o outro. Se a peça for seccionada por um plano contendo os centros das bases dos cilindros, tem-se a situação abaixo ilustrada:



O volume dessa peça, em centímetros cúbicos, é

a) 1.580π b) 1.330π c) 1.170π d) 970π e) 190π

Solução: Alternativa B

Inicialmente é necessário determinar o raio de cada cilindro:

$$b = \frac{2a}{3} = \frac{2.9}{3} = 6 \text{ cm} \quad \text{e} \quad c = \frac{2b}{3} = \frac{2.6}{3} = 4 \text{ cm}$$

O volume total é a soma dos volumes dos três cilindros.

$V = \pi a^2 h_1 + \pi b^2 h_2 + \pi c^2 h_3 = \pi(9)^2(10) + \pi(6)^2(10) + \pi(4)^2(10) =$

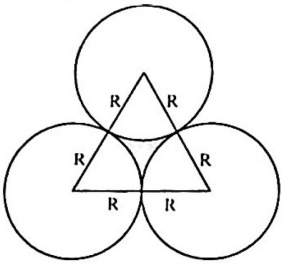
$= 810\pi + 360\pi + 160\pi = 1330\pi \text{ cm}^3$

4) (Escola Naval-11) Três cilindros circulares retos e iguais têm raio da base R, são tangentes entre si dois a dois e estão apoiados verticalmente em um plano. Se os cilindros têm altura H, então o volume do sólido compreendido entre cilindros vale

a) $\frac{R^2H(4\sqrt{3}-\pi)}{4}$ b) $\frac{3\pi\sqrt{3}R^2H}{2}$ c) $\frac{R^2H(4\sqrt{3}-\pi)}{2}$

d) $\frac{R^2H(3\sqrt{3}-\pi)}{2}$ e) $\frac{R^2H(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$

Solução: Alternativa E



A figura ao lado representa um corte feito paralelamente às bases dos cilindro. O volume do sólido compreendido entre os 3 cilindros é igual ao produto da área hachurada pela altura dos cilindros. O triângulo definido pelos centros dos cilindros possui área igual a

$$S_1 = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}R^2$$

Cada um dos setores circulares tem área igual a $S_2 = \frac{\pi}{6}R^2$.

Assim, a região hachurada possui área igual a:

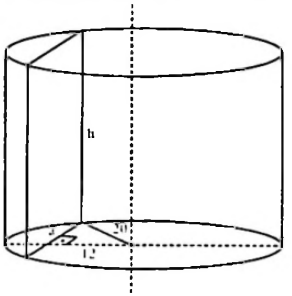
$$S = S_1 - 3S_2 = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{(2\sqrt{3}-\pi)R^2}{2}$$

Logo, o volume do sólido vale $V_{SÓLIDO} = \frac{R^2H(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$

5) (Escola Naval-15) Sabendo-se que um cilindro de revolução de raio igual a 20 cm, quando cortado por um plano paralelo ao eixo de revolução, a uma distância de 12 cm desse eixo, apresenta secção retangular com área igual à área da base do cilindro. O volume desse cilindro, em centímetros cúbicos é

a) $6000\pi^2$ b) $5000\pi^2$ c) $4000\pi^2$ d) $3000\pi^2$ e) $2000\pi^2$

Solução: Alternativa B



Suponhamos que a secção retangular tenha base igual a 2a e altura h. Traçando o diâmetro da base do cilindro que é perpendicular à secção retangular, determina-se um triângulo retângulo indicado na figura. Aplicando o teorema de Pitágoras:

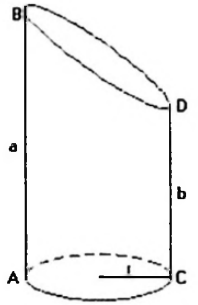
$20^2 = 12^2 + a^2 \Rightarrow a = 16$ cm $\Rightarrow$ base da secção = 32

Assim: $S_{secção} = S_{base} \Rightarrow 2a.h = \pi r^2 \Rightarrow$

$32.h = \pi.400 \Rightarrow h = 12{,}5\pi$ cm

Logo: $V = \pi r^2 h = \pi.400.12{,}5\pi = 5000\pi^2$ cm^2

6) (Unicamp-93) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura a seguir. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base r, da altura máxima AB = a e da altura mínima CD = b. Justifique seu raciocínio.



Solução:

Sabe-se que o volume do tronco de cilindro é igual ao volume de um cilindro de mesmo raio de base e altura (a + b)/2: $V = \pi r^2 \dfrac{(a+b)}{2}$

7) (ITA-04) Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360π cm^3, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm^3, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2.

a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$ d) $108\sqrt{427}$ e) $45\sqrt{427}$

Solução: Alternativa A

Seja ℓ a aresta da base da pirâmide. Como esta base é um hexágono, então ℓ é igual ao raio R da circunferência que é base do cilindro:

$S_{hex} = 6\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 54\sqrt{3} = 6\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell = 6$ cm

$V_{cil} = \pi R^2 h_{cil} \Rightarrow 360\pi = 36\pi h_{cil} \Rightarrow h_{cil} = 10$ cm $\Rightarrow h_{pir} = 20$ cm

Se g é o valor da altura de cada face lateral da pirâmide:

$$g^2 = (h_{ap})^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{400+27} = \sqrt{427}\text{ cm}$$

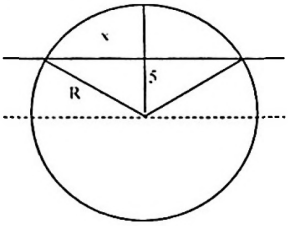
Assim: $A_l = 6\frac{\ell.h_{ap}}{2} = 6\frac{6.\sqrt{427}}{2} \Rightarrow A_l = 18\sqrt{427}\text{ cm}^2$

8) (ITA-00) Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5cm do eixo e separa na base um arco de 120°. Sendo de $30\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ a área da secção plana regular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm^3:

(A) $30\pi - 10\sqrt{3}$ (B) $30\pi - 20\sqrt{3}$ (C) $20\pi - 10\sqrt{3}$

(D) $50\pi - 25\sqrt{3}$ (E) $100\pi - 75\sqrt{3}$

Solução: Alternativa E



I) $x = 5\sqrt{3} \Rightarrow S = 30\sqrt{3} = 2x.h \Rightarrow 15\sqrt{3} = 5\sqrt{3}h \Rightarrow h = 3$ cm

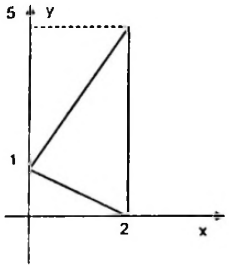
II) $S_T = 2\pi R^2/6 - x.5 = 2\pi(10)^2/6 - 25\sqrt{3} \Rightarrow S_T = 100\pi/3 - 25\sqrt{3}$

III) $V = S_T.h \Rightarrow S_T = 100\pi - 75\sqrt{3}$

9) (ITA-13) No sistema xOy os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão *volume/área total da superfície*, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1. b) $\frac{100}{105}$ c) $\frac{10}{11}$ d) $\frac{100}{115}$ e) $\frac{5}{6}$

Solução: Alternativa B



$$\frac{V}{S_T} = \frac{S_b.H}{2S_b + S_L} = \frac{\pi R^2.H}{2\pi R^2 + 2\pi RH} = \frac{RH}{2R + 2H}$$

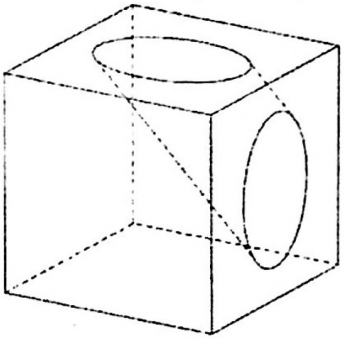
Por Pitágoras, os lados de ABC são $\sqrt{5}$, 5 e $2\sqrt{5}$.

A área de ABC é dada por $S = \frac{5.2}{2} = 5$

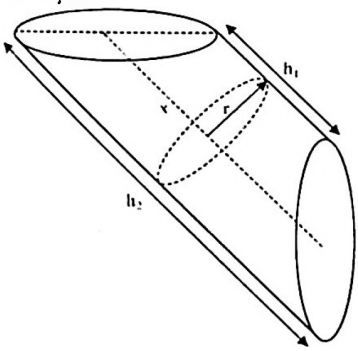
Portanto: $S = \frac{a.b.c}{4R} \Rightarrow 5 = \frac{\sqrt{5}.5.2\sqrt{5}}{4R} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$

Logo: $\frac{V}{S_T} = \frac{RH}{R + 2H} = \frac{\frac{5}{2}.8}{5 + 16} = \frac{20}{21} = \frac{100}{105}$

10) (UFPE-04) O sólido ilustrado na figura abaixo foi obtido perfurando-se um cubo de aresta 4 com uma broca circular de raio 1, cujo o eixo passou pelos pontos médios de duas faces adjacentes do cubo. Indique o inteiro mais próximo do volume do cubo perfurado. (Dados: use as aproximações $\pi \approx 3{,}14$ e $\sqrt{2} \approx 1{,}41$).



Solução:



O sólido retirado é a união de dois troncos de cilindro. Logo, o volume do sólido obtido é a subtração entre o volume do cubo e dos dois troncos de cilindro.

Sejam h_1 e h_2 a mínima e a máxima distância entre as bases (que são elipses!), respectivamente. Seja x o comprimento do segmento de reta que liga os pontos médios das faces perfuradas do cubo. Como a inclinação deste segmento em relação às faces é 45°, segue que $x = 2\sqrt{2}$.

Por semelhança tem-se $\frac{h_1 + h_2}{2} = x = 2\sqrt{2}$

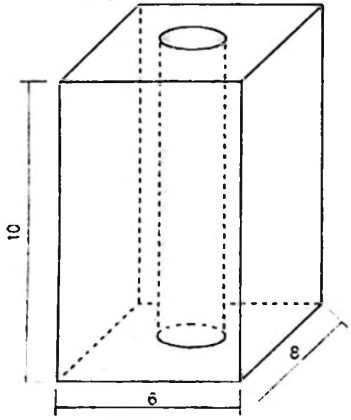
Deste modo:

$$V = V_{cubo} - V_{tronco\ de\ cilindro} \Rightarrow V = a^3 - \pi r^2\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) = 4^3 - (3{,}14)(1)^2(2\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$V = 64 - 8{,}85 = 55{,}15$$

Exercícios de Vestibular

1) (UFAL-08) Um paralelepípedo retângulo tem dimensões da base 6cm e 8cm, e altura 10cm. Uma cavidade, na forma de um cilindro reto com raio da base medindo 1cm, atravessa o paralelepípedo da base inferior até a superior.



Qual a área total (dentro e fora) do sólido resultante, em cm^2?
A) $376 + 18\pi$ B) $376 + 16\pi$ C) $296 + 18\pi$ D) $296 + 22\pi$ E) $296 + 20\pi$

2) (Unesp-09) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando a aproximação $\pi = 3$, e que 1000 litros correspondem a $1m^3$, se utilizássemos vasilhames na forma de um cilindro circular reto com 0,4m de raio e 1m de altura, a quantidade de látex derramado daria para encher exatamente quantos vasilhames?
A) 12. B) 20. C) 22. D) 25. E) 30.

3) (UEPB-11) A capacidade de um cilindro obtido através da rotação em torno do lado menor de um retângulo de dimensões 3 cm e 4 cm é:
a) $3,6\pi$ ml b) 36π ml c) $0,036\pi$ ml d) $4,8\pi$ ml e) 48π ml

4) (UCS-11) Uma lata sem tampa, de 20 cm de altura, cujo volume é $2000\pi\ cm^3$, tem a forma de um cilindro circular reto. Quantos cm^2 de metal serão necessários para confeccionar a lata?
a) 100π b) 300π c) 420π d) 500π e) 600π

5) (UCS-12) A água colhida por um pluviômetro cilíndrico de 40 cm de diâmetro, durante uma chuva torrencial, é depois colocada em um recipiente também

cilíndrico, cuja circunferência da base mede 24π cm. Qual é a altura que a água havia alcançado no pluviômetro, se no recipiente ela alcançou 200 mm de altura?
a) 1,2 cm b) 12 cm c) 3,6 cm d) 7,2 cm e) 72 cm

6) (Uepel-11) Um tanque metálico tem a forma de um cilindro circular reto e contém água até os de sua altura. Sabe-se que a altura é o dobro do raio da base e esse mede 2m. Então, o volume de água no tanque é
a) 6π m^3 b) 12π m^3 c) 10π m^3 d) 8π m^3 e) 9π m^3

7) (UEMG-09) As medalhas, com 70 milímetros de diâmetro e 6 milímetros de espessura, incluirão em seu desenho os cinco anéis olímpicos, o logotipo e o emblema dos jogos de Pequim 2008, e terão nas fitas que as prendem um desenho de nuvens e dragões (...)

Último Segundo

Sabendo-se que a medalha olímpica é feita de metais, entre eles o cobre chileno, de base circular e com as dimensões citadas no texto acima, o volume de metais de cada medalha CORRESPONDE a
A) $6{,}89\pi$ cm^3. B) $7{,}00\pi$ cm^3. C) $7{,}35\pi$ cm^3. D) $8{,}02\pi$ cm^3.

8) (UCS-10) Uma embalagem em forma de prisma regular de base quadrada e altura h_q será substituída por uma embalagem em forma de cilindro circular reto e altura h_c. Sendo o raio da base da embalagem cilíndrica igual à medida do lado da base da embalagem em forma de prisma, qual deverá ser a relação entre as alturas h_q e h_c para que as duas embalagens tenham o mesmo volume?
a) $h_q = h_c$ b) $h_q^2 = h_c$ c) $h_q = \pi h_c$ d) $h_c = \pi h_q$ e) $h_c^2 = h_q$

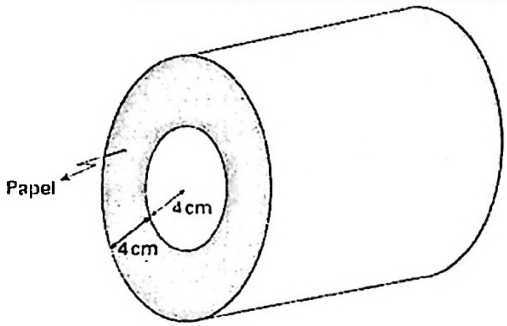
9) (UEPB-11) A área lateral de um cilindro equilátero cuja seção meridiana é igual a 81 cm^2 mede:
a) 3π cm^2 b) 81π cm^2 c) 9π cm^2 d) 27π cm^2 e) 81 cm^2

10) (UFPB-11) A capacidade de um cilindro obtido através da rotação em torno do lado menor de um retângulo de dimensões 3 cm e 4 cm é:
a) $3{,}6\pi$ ml b) 36π ml c) $0{,}036\pi$ ml d) $4{,}8\pi$ ml e) 48π ml

11) (UFAM-08) Maria ganhou um vidro de perfume no formato de um cilindro de 5 cm de raio da base e 10 cm de altura. Depois de um mês usando o perfume restou $0{,}25\,\ell$ no vidro. Então a fração que representa o volume que Maria já usou é:

a) $\frac{\pi - 1}{\pi}$ b) π c) $\frac{\pi}{\pi - 1}$ d) $\frac{2\pi}{\pi - 1}$ e) $\frac{\pi - 1}{5\pi}$

12) (FGV-12) Uma bobina cilíndrica de papel possui raio interno igual a 4cm e raio externo igual a 8 cm. A espessura do papel é 0,2 mm.



Adotando nos cálculos $\pi = 3$, o papel da bobina, quando completamente desenrolado, corresponde a um retângulo cuja maior dimensão, em metros, é aproximadamente igual a

A) 20. B) 30. C) 50. D) 70. E) 90.

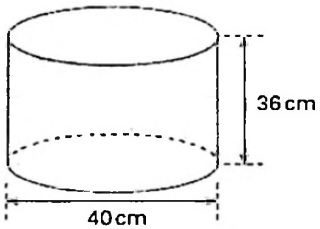
13) (FGV-11) Após t horas do início de um vazamento de óleo de um barco em um oceano, constatou-se ao redor da embarcação a formação de uma mancha com a forma de um círculo cujo raio r varia com o tempo t mediante a função $r(t) = \frac{30}{\sqrt{\pi}} t^{0,5}$ metros. A espessura da mancha ao longo do círculo é de 0,5 centímetro

Desprezando a área ocupada pelo barco na mancha circular, podemos afirmar que o volume de óleo que

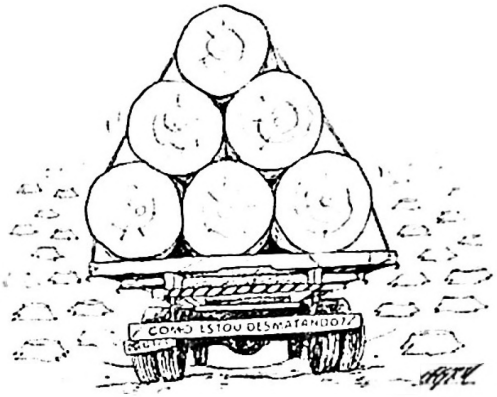
vazou entre os instantes t = 4 horas e t = 9 horas foi de:

A) 12,5 m^3 B) 15 m^3 C) 17,5 m^3 D) 20 m^3 E) 22,5 m^3

14) (FGV-10) Uma lata de tinta está cheia em 5/6 de sua capacidade. Dentro da lata caiu um pincel de 45cm de comprimento. É certo que o pincel ficará completamente submerso na tinta? Por quê?



15) (UFG-12) Observe a charge a seguir.



Disponível em: <http://veronicauerj.blogspot.com.br> Acesso em: 28 mar. 2012 [Adaptada].

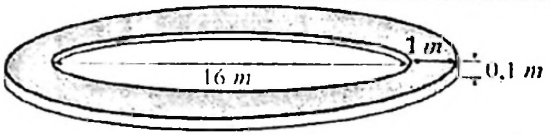
Considerando-se que as toras de madeira no caminhão são cilindros circulares retos e idênticos, com 10 m de comprimento e que a altura da carga é de 2,7 m acima do nível da carroceria do caminhão, então a carga do caminhão corresponde a um volume de madeira, em metros cúbicos de, aproximadamente,

(A) 17,2 (B) 27,3
(C) 37,4 (D) 46,5
(E) 54,6

Dados: $\sqrt{3} \approx 1.7$ e $\pi \approx 3.1$

16) (UFMG-12) João comprou um balde em forma de um cilindro circular reto, cujo diâmetro da base D, e cuja altura H medem, cada um deles, 30 cm. Ele precisa introduzir, nesse balde, verticalmente, uma peça metálica, também em forma ver de um cilindro circular reto, cujo diâmetro da base d, e cuja altura I medem, respectivamente, 20 cm e 27 cm. Suponha que o balde contém água até um nível h.
Considerando essas informações,
1. CALCULE o volume total do balde, em cm^3.
2. CALCULE o volume total da peça metálica, em cm^3.
3. João observou que, se a peça fosse introduzida no balde, de modo que 2/3 dela ficassem fora do balde, o nível da água subiria até atingir a borda, sem transbordar. Suponha que, em seguida, a peça foi introduzida, de modo que a metade dela ficou fora do balde. Determine o volume da água que transborda, nesse vaso.

17) (UFPB-12) Sr. Ptolomeu construirá em sua chácara um jardim de formato circular com 16 m de diâmetro. Contornando o jardim, haverá uma calçada, medindo 1 m de largura por 0,1 m de altura, conforme figura a seguir:



Use: $\pi = 3.14$

Supondo que o preço médio do m^3 da calçada a ser construída é de 100 reais, conclui-se que a despesa do Sr. Ptolomeu com a construção da calçada será, aproximadamente, de:

a) 685,30 reais b) 653,80 reais c) 583,30 reais
d) 533,80 reais e) 835,30 reais

18) (UFPB-12) Uma fábrica produz embalagens metálicas fechadas, em formato de um prisma reto, medindo 20 cm de altura, cuja base é um quadrado de lado 10 cm. Para diminuir o desperdício de material, técnicos da fábrica avaliaram que, se as embalagens fossem produzidas em formato de um cilindro fechado, com a mesma altura e volume da embalagem em formato de prisma, haveria uma economia de material usado. Com base nessa avaliação, é correto afirmar que, ao fazer as embalagens em formato de cilindro, a economia da fábrica com o material utilizado será de (Use $\sqrt{\pi} = 1,77$):

a) 6,5% b) 7,6% c) 9,2% d) 13,4% e) 15,5%

19) (UFPB-13) A prefeitura de certo município adquiriu um caminhão pipa para fazer o abastecimento de água da cidade. O tanque desse caminhão possui formato e medidas mostrados nas figuras 1 e 2 a seguir:

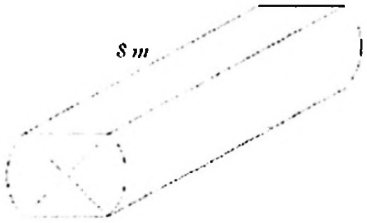


Figura 1

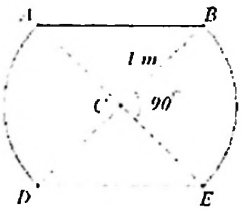


Figura 2

A Figura 1 representa a perspectiva do tanque e a indicação de seu comprimento longitudinal de 8m.

• A figura 2 representa um corte da seção transversal do tanque, em que:

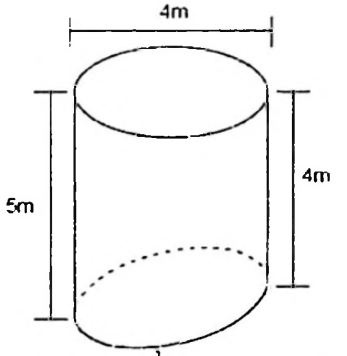
• ACD e BCE são setores circulares iguais, com ângulo central igual a 900, e raio igual a 1m.

• AB e DE são segmentos paralelos.

Com base nessas informações, conclui-se que o volume do tanque do caminhão pipa, em m^3, é de:

a) $6\pi + 6$ b) $5\pi + 8$ c) $4\pi + 8$ d) $3\pi + 8$ e) $4\pi + 10$

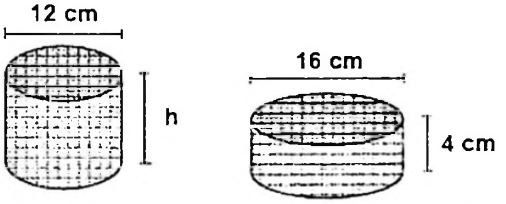
20) (UFPE-09) Um reservatório de forma cilíndrica foi construído sobre um plano inclinado, como ilustrado na figura a seguir. O raio do cilindro mede 2m e, na parte mais funda, a altura do reservatório é de 5m, e na parte mais rasa, a altura é de 4m.



Qual o volume do reservatório, em m^3? Indique o valor inteiro mais próximo. Dado: use a aproximação $\pi \approx 3,14$.

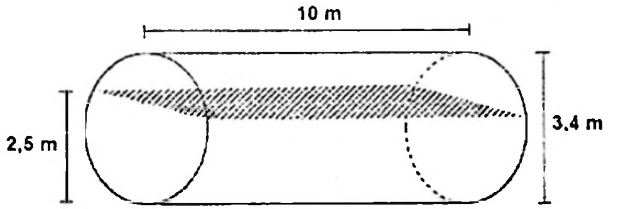
A) $57m^3$ B) $58m^3$ C) $59m^3$ D) $60m^3$ E) $61m^3$

21) (UFPR-12) As duas latas na figura ao lado possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura h?



a) 5 cm. b) 6 cm. c) 6,25 cm. d) 7,11 cm. e) 8,43 cm.

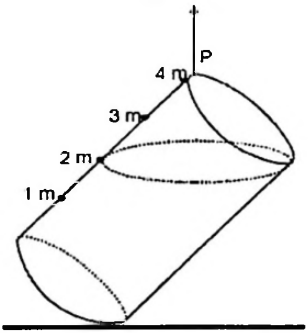
22) (UFPR-13) Um reservatório possui internamente o formato de um cilindro com 3,4 m de diâmetro e 10 m de comprimento, conforme indica a figura.



a) Qual o volume total que esse reservatório comporta?

b) Num certo momento, a altura do líquido no interior do reservatório é de 2,5 m, como indica a figura. Qual a área da superfície do líquido exposta ao ar dentro do reservatório?

23) (UFRN-10) Um tanque cilíndrico, cheio de combustível, de raio, R = 1 m e altura, H = 4 m, ao ser suspenso por um cabo de aço fixado no ponto P, inclinou-se até a posição mostrada na figura. Parte do combustível foi derramado, de modo que o restante ficou nivelado como se vê na figura ao lado.



A quantidade de combustível que restou no tanque foi, aproximadamente:
A) 9,42 m^3 B) 3,14 m^3 C) 6,28 m^3 D) 12,56 m^3

24) (Udesc-10) A planificação da superfície lateral de um cilindro circular reto de altura h e raio r gera a região retangular ABCD, conforme é ilustrado na Figura 1. Suponha que esta região seja utilizada para construir um novo cilindro, cuja altura é a medida do segmento AB , sem haver sobreposição.

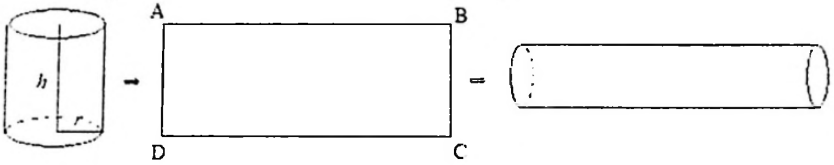


Figura 1: Planificação e construção de um cilindro

O volume do novo cilindro é:
a) $rh^2/2$ b) $r^2h/2$ c) $rh^2\pi/2$ d) $r^2h\pi/2$ e) πr^2h

25) (Udesc-11) A Figura 1 ilustra duas moedas brasileiras, a de R$ 1,00 e a de R$ 0,50, descritas abaixo.

Figura 1: Moedas brasileiras

Moeda de R$ 1,00 – As faces da moeda são compostas por dois círculos concêntricos. O diâmetro do círculo maior é igual a 2,8 cm e o diâmetro do círculo menor é igual a 1,8 cm. A espessura desta moeda é igual a 1,5 mm.

Moeda de R$ 0,50 – As faces da moeda são compostas por um círculo de diâmetro igual a 2,2 cm. A espessura desta moeda é igual a 3 mm. Com base nestas informações, analise as proposições abaixo.

I. O volume de metal necessário para cunhar a região situada entre os círculos concêntricos da moeda de R$ 1,00 é aproximadamente $0,1725\pi$ cm^3.

II. Para cunhar uma moeda de R$ 1,00 é necessário aproximadamente $0,069\pi$ cm^3 de metal a mais que para cunhar uma moeda de R$ 0,50.

III. A área entre os círculos concêntricos da moeda de R$ 1,00 é $0,34\pi$ cm^2 maior que a do círculo interno.

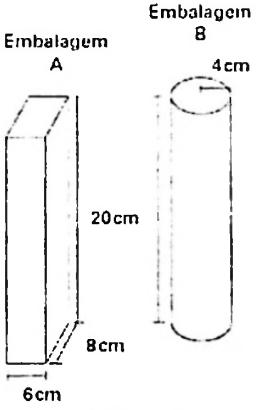
Assinale a alternativa correta.

a. ( ) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
b. ( ) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
c. ( ) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
d. ( ) Todas as afirmativas são verdadeiras.
e. ( ) Todas as afirmativas são falsas.

26) (UECE-11) Um cilindro circular reto cuja medida do raio da base é 5 m é cortado por um plano perpendicular às suas bases (paralelo ao eixo do cilindro). A distância do plano ao eixo do cilindro é 3 m. Se a diferença entre a área lateral do cilindro e a área retangular determinada sobre o plano é 234 m^2, considerando π igual a 3,14, então a medida do volume do cilindro, em m^3, é

A) 578. B) 875. C) 758. D) 785.

27) (Mackenzie-06) Uma empresa usa, para um determinado produto, as embalagens fechadas da figura, confeccionadas com o mesmo material, que custa R$0,10 o cm^2. Supondo $\pi = 3$, a diferença entre os custos das embalagens A e B é de

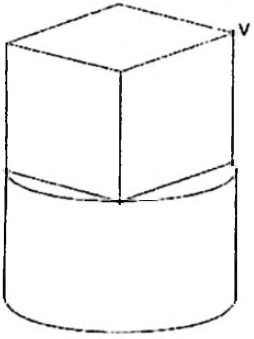


a) R$9,00 b) R$7,00 c) R$10,00 d) R$8,00 e) R$0,00

28) (EsPCEx-06) Um tonel, em forma de cilindro circular reto, tem 60 cm de altura. Uma miniatura desse tonel tem 20 cm de altura e raio diretamente proporcional à altura. Se a miniatura tem 100 mL de volume, então o volume do tonel original é de:

a) 30 L b) 27 L c) 2,7 L d) 3 L e) 300 mL

29) (Insper-12) Na figura a seguir, a base inferior do cubo de aresta a está inscrita na base superior do cilindro circular reto de altura a.



A distância entre o vértice V do cubo e o centro da base inferior do cilindro é igual a

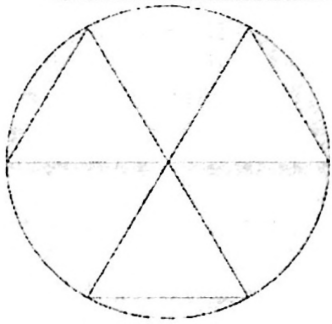
a) $\frac{5a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$

30) (FGV-08) Certa lata de bebida energética tem forma cilíndrica com dimensões de 2πcm de diâmetro e 10cm de altura. Se a lata tivesse seção quadrada de lado 2π e conservasse o mesmo volume, a redução percentual na sua altura seria de aproximadamente:

A) 25% B) 20% C) 27% D) 22% E) 29%

O enunciado abaixo é referente às duas questões seguintes

31) (Insper-04) Considere na figura o desenho de uma piscina que uma pessoa está projetanto para sua casa de campo. A região sombreada representa água e os triângulos equiláteros serão ilhas para banho de sol. Suponha que a circunferência da piscina tenha 16 metros de raio. Adote $\pi = \frac{13}{4}$ e $\sqrt{3} = \frac{7}{4}$.



Se a profundidade da piscina for de 150 cm, o volume de água necessário para enchê-la será aproximadamente igual a
a) $736m^3$. b) $738m^3$. c) $740m^3$. d) $742m^3$. e) $744m^3$.

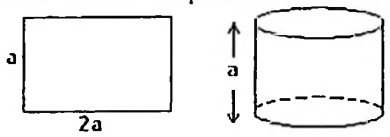
32) (Insper-04) Para que não haja vazamento, toda a parede (incluindo o fundo) da piscina deve receber uma camada de impermeabilizante. Se cada galão de impermeabilizante é suficiente para cobrir uma área de aproximadamente $80m^2$, serão necessários para impermeabilizar toda a piscina
a) 10 galões. b) 11 galões. c) 12 galões. d) 13 galões. e) 14 galões.

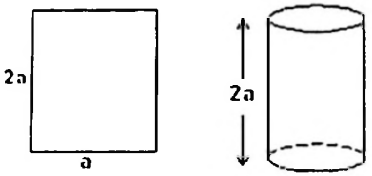
33) (Insper-07) Um famoso edifício na moderna Xangai tem a forma de um cilindro chanfrado (ou seja, a base superior não é paralela à base do chão). O diâmetro do edifício é de aproximadamente 48 metros, a altura do lado mais alto mede 225 metros e a altura do lado mais baixo mede 185 metros. Toda a lateral do edifício é recoberta de vidro. Desconsiderando eventuais perdas ou quebras durante a construção, foram necessários aproximadamente
(Observação: se necessário, utilize $\pi \cong 25/8$)
a) $10.750m^2$ de vidro para recobrir o edifício.
b) $15.750m^2$ de vidro para recobrir o edifício.
c) $20.750m^2$ de vidro para recobrir o edifício.
d) $25.750m^2$ de vidro para recobrir o edifício.
e) $30.750m^2$ de vidro para recobrir o edifício.

34) (Insper-08) Para estimular a venda de seus produtos, uma conhecida marca de cervejas criou um recipiente térmico para manter as latas da bebida geladas, e o colocou à venda em três tamanhos: pequeno, médio e grande. Os três tamanhos têm, respectivamente, capacidades para armazenar 16, 54 e 128 latas de cerveja, além do espaço para o gelo, que deve ser adicionado junto com as latas para mantê-las geladas. Considere que:
• os recipientes têm todos um formato cilíndrico, sendo a altura igual ao dobro do diâmetro da base,

• o volume de cada recipiente é diretamente proporcional à quantidade de latas que comporta,
• os preços dos recipientes são proporcionais à área total da superfície do cilindro, dado que o principal custo do produto refere-se ao material de isolamento térmico.
Se o recipiente pequeno custa R$60,00, a soma dos preços de um recipiente médio mais um recipiente grande é igual a
a) R$187,50. b) R$281,25. c) R$375,00. d) R$468,75. e) R$562,50.

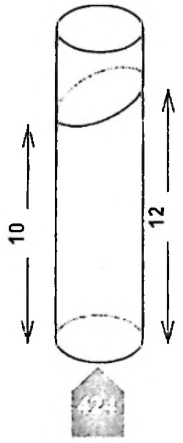
35) (PUC/PR-12) Certa empresa fabrica latas cilíndricas de dois tipos, A e B. As superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas. Observe a ilustração abaixo:





Se V_A e V_B indicam os volumes das latas dos tipos A e B, respectivamente, tem-se:
A) $V_B = 2V_A$ B) $V_B = 4V_A$ C) $V_A = 4V_B$ D) $V_A = 2V_B$ E) $V_A = V_B$

36) (UFPE-00) Uma barra de chocolate na forma de um cilindro circular reto com raio da base medindo 2 e altura 14 é cortado transversalmente por um plano de forma que os pontos do corte, situados à menor e à maior distância da base, distam 10 e 12, respectivamente, como ilustrado na figura abaixo. Dentre os sólidos em que fica dividida a barra de chocolate, qual o inteiro mais próximo do volume do menor?



37) (UCS-09) A superfície lateral de embalagens em forma de cilindro circular reto é confeccionada unindo-se dois lados opostos de folhas de flandres retangulares de 12 cm x 18 cm. Conforme os lados que são unidos, obtêm-se embalagens de alturas diferentes. Qual é a razão entre o volume V_1 da embalagem de altura menor e o volume V_2 da embalagem de altura maior?

a) 1 b) 2 c) 1/2 d) 3/2 e) 1/4

38) (Insper-08) Para estimular a venda de seus produtos, uma conhecida marca de cervejas criou um recipiente térmico para manter as latas da bebida geladas, e o colocou à venda em três tamanhos: pequeno, médio e grande. Os três tamanhos têm, respectivamente, capacidades para armazenar 16, 54 e 128 latas de cerveja, além do espaço para o gelo, que deve ser adicionado junto com as latas para mantê-las geladas. Considere que:

• os recipientes têm todos um formato cilíndrico, sendo a altura igual ao dobro do diâmetro da base,

• o volume de cada recipiente é diretamente proporcional à quantidade de latas que comporta,

• os preços dos recipientes são proporcionais à área total da superfície do cilindro, dado que o principal custo do produto refere-se ao material de isolamento térmico.

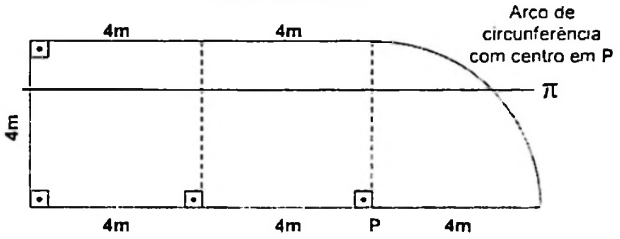
Se o recipiente pequeno custa R$60,00, a soma dos preços de um recipiente médio mais um recipiente grande

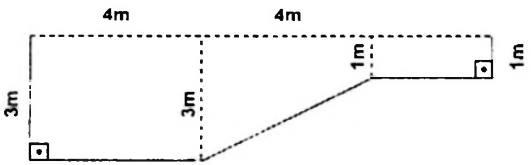
é igual a

a) R$187,50. b) R$281,25. c) R$375,00. d) R$468,75. e) R$562,50.

39) (UFPE-99) Seja V o volume, em m^3, de uma piscina cujas formas e medidas são ilustradas nas figuras abaixo, indique o inteiro mais próximo de V.

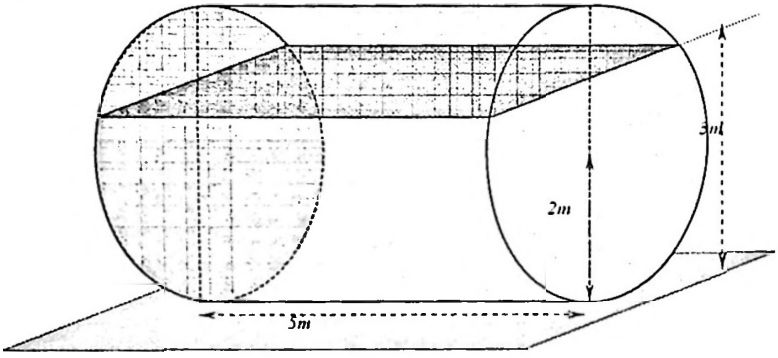
VISTA SUPERIOR



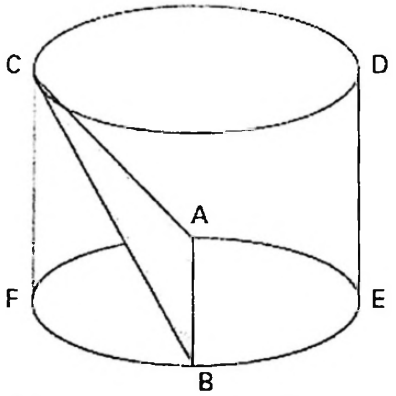


CORTE VERTICAL SEGUNDO π

40) (UFPE-99) O reservatório em forma de cilindro reto de raio da base **2m** e altura **5m** encontra-se na horizontal e preenchido com água até o nível de **3m**, conforme ilustrado na figura a seguir. Calcule o volume, em m^3, de água no reservatório e assinale o inteiro mais próximo do valor obtido.



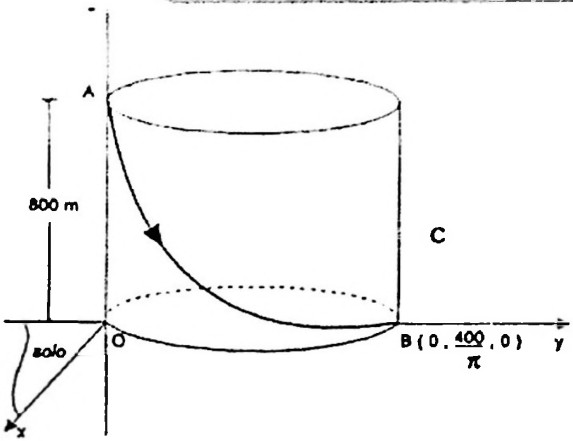
41) (Insper-10) Na figura está representado um cilindro circular reto em que:
- o segmento CD é um diâmetro da base superior;
- os segmentos AB e EF são diâmetros perpendiculares da base inferior;
- os pontos C, D, E e F são coplanares.



Se o triângulo ABC é equilátero e o segmento AE mede 2cm, então o volume do cilindro é igual a

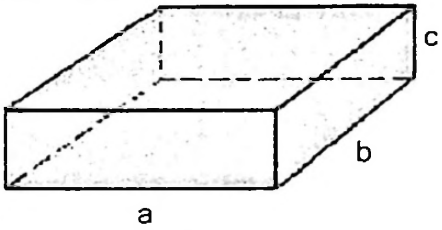
a) πcm^3. b) $2\pi cm^3$. c) $3\pi cm^3$. d) $4\pi cm^3$. e) $5\pi cm^3$.

42) (UFRJ-96) Um pára-quedista está no ponto A situado a 800m do solo e, devido a condições técnicas, é obrigado a seguir uma trajetória que está sempre na superfície lateral do cilindro C de revolução cujo raio r da base é igual a 200 m.



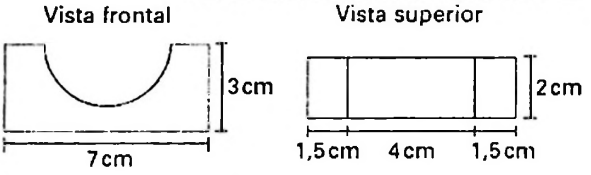
Determine o comprimento do menor caminho percorrido pelo pára-quedista para atingir o ponto de pouso B(0, 400/π, 0).

43) (UFU-11) Durante uma feira de exposição de animais, um tratador de cavalos é encarregado de levar água a alguns animais em uma baia. É colocado um tanque vazio na baia na forma de um paralelepípedo retangular com a = 80 cm, b = 2 m e c = 50 cm, conforme ilustra a figura. O tratador transporta água de um reservatório para o tanque, em um balde de formato cilíndrico com base de 40 cm de diâmetro e 50 cm de altura. Estima-se que a cada vez que vai ao reservatório, ele enche o balde e, no caminho, derrame 5% de seu conteúdo. Para que o nível de água no tanque atinja a metade de sua capacidade, o número mínimo de vezes que o tratador deverá buscar água no reservatório é igual a (Utilize π = 3,1).



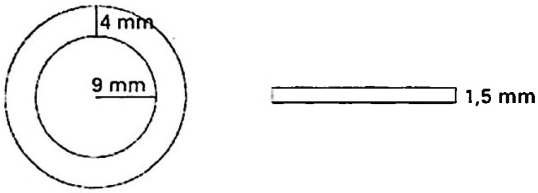
A) 6 B) 5 C) 7 D) 8

44) (UFSCar-07) Retirando-se um semicilindro de um paralelepípedo retoretângulo, obtivemos um sólido cujas fotografias, em vista frontal e vista superior, estão indicadas nas figuras. Se a escala das medidas indicadas na fotografia é 1:100, o volume do sólido fotografado, em m^3, é igual a

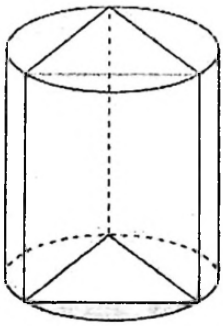


A) $2(14 + 2\pi)$. B) $2(14 + \pi)$. C) $2(14 - \pi)$. D) $2(21 - \pi)$. E) $2(21 - 2\pi)$.

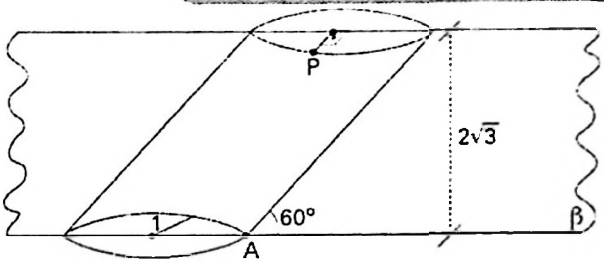
45) (Unesp-08) Uma moeda circular é composta por duas partes: a parte central, de material prateado, de raio 9mm, e a parte externa, de material dourado, em forma de um anel de 4mm de largura, conforme figura. A espessura de cada parte da moeda é igual a 1,5mm. Qual a razão entre os volumes das partes prateada e dourada?



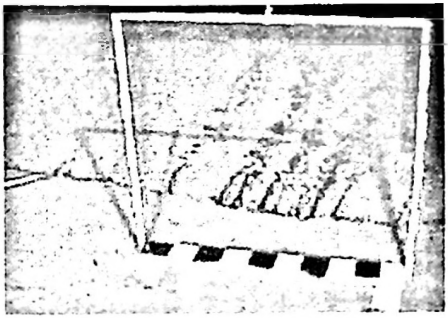
46) (Unesp-08) Um porta-canetas tem a forma de um cilindro circular reto de 12 cm de altura e 5cm de raio. Sua parte interna é um prisma regular de base triangular, como ilustrado na figura, onde o triângulo é eqüilátero e está inscrito na circunferência. A região entre o prisma e o cilindro é fechada e não aproveitável. Determine o volume dessa região. Para os cálculos finais, considere as aproximações $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1,7$.



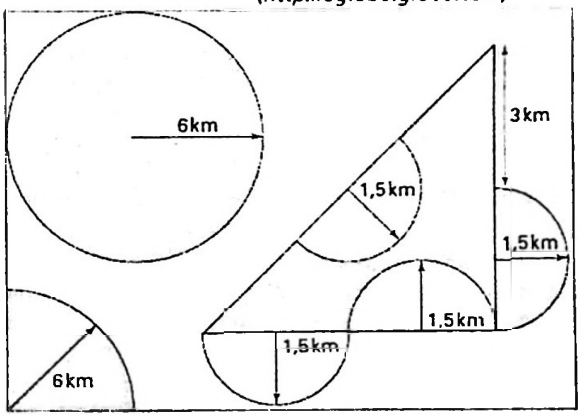
47) (Fuvest-03) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de **60°** (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se **P** e **A** são os pontos representados na figura, calcule **PA**.



48) (Unesp-12) No vazamento de petróleo da empresa americana Chevron do último dia 7 de novembro, na bacia de Campos/RJ, a mancha de óleo na superfície do mar assumiu grandes dimensões e teve seu pico de área entre os dias 12 e 14 daquele mês. O vazamento levou dias para ser contido, pois o petróleo continuava a escapar por fissuras, como mostrado na foto. A figura mostra, de forma hipotética e aproximada, em cinza, as áreas da mancha de óleo na superfície do mar.



(http://oglobo.globo.com)



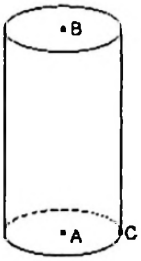
manchas de óleo

água do mar

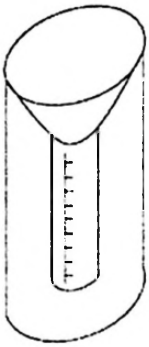
Dados $1dm^3 = 1L$ e $\pi \approx 3$ e sabendo que a altura média da lâmina de óleo sobre as águas era de 0,003mm e que 1 barril de petróleo cru contém 160 litros de óleo, o número aproximado de barris que vazaram no incidente foi

A) 2360. B) 2860. C) 2960. D) 3320. E) 5250.

49) (Fuvest-01) Na figura a seguir, tem-se um cilindro circular reto, onde A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento BC, cujas distâncias a AC e AB são ambas iguais a *d*, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de *d*.



0) (Unicamp-07) Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida ao lado. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60cm de altura e sua base tem 1/10 da área da abertura superior do pluviômetro. (Obs.: a figura ao lado não está em escala).



a) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.
b) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500m de comprimento por 300m de largura.

51) (AFA-94) Em m^3, qual o volume de um cilindro cuja base está circunscrita a um triângulo equilátero de $2\sqrt{3}$ m de lado e cuja altura é a mesma do triângulo equilátero inscrito em sua base?

a) 6π b) 8π c) 12π d) 16π

52) (AFA-06) Um reservatório de forma cilíndrica (cilindro circular reto) de altura 30 cm e raio da base 10 cm está cheio de água. São feitos, simultaneamente, dois furos no reservatório: um no fundo e outro a 10 cm de altura do fundo. Cada um desses furos permite uma vazão de 1 litro por minuto. A quantidade de água restante no reservatório após $\frac{4\pi}{3}$ minutos é, em litros.

a) π b) $3\pi/4$ c) $2\pi/3$ d) $\pi/4$

53) (Escola Naval-92) Um copo, com a forma de um cilindro circular reto de raio de base 2 e altura 4, está apoiado em uma mesa horizontal e contém água até altura 3. Inclina-se o copo até que a água comece a derramar. Nesse instante, o ângulo α que o plano da base do copo faz com o plano da mesa é tal que tg α vale:
a) 1/4 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 3/4

54) (ITA-72) Dado um cilindro de revolução de raio r e altura h; sabe-se que a média harmônica entre o raio r e altura h é 4 e que sua área total é 2π. O raio r deve satisfazer:
a) $r^3 - r + 2 = 0$ b) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ c) $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$
d) $r^3 - 3r - 2 = 0$ e) nenhuma das respostas anteriores

55) (ITA-87) A área lateral de um cilindro de revolução, de x metros de altura, é igual a área de sua base. O volume deste cilindro é:
a) $2\pi x^3\ m^3$ b) $4\pi x^3\ m^3$ c) $\sqrt{2}\pi x^3\ m^3$ d) $\sqrt{3}\pi x^3\ m^3$ e) $6\pi x^3\ m^3$

56) (ITA-92) Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, h cm e H cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de 1/3 em relação ao seu volume original. Deste modo:
a) 2H = 3h b) H = 2h c) H = 3h d) 2H = 5h e) n.d.a.

57) (ITA-94) Num cilindro circular reto sabe-se que a altura h e o raio da base r são tais que os números π, h, r formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma 6π. O valor da área total deste cilindro é:
a) π^3 b) $2\pi^3$ c) $15\pi^3$ d) $20\pi^3$ e) $30\pi^3$

58) (ITA-95) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2, vale:
a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{9\pi(\pi+2)}{4}$ c) $\pi(\pi+2)$ d) $\frac{\pi^2}{2}$ e) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$

59) (EsPCEx-02) Dois recipientes, um em forma de cilindro e o outro, de paralelepípedo, cujas bases estão num mesmo plano, são unidos por uma tubulação com uma válvula no meio. Inicialmente, a válvula está fechada, o paralelepípedo está vazio e o cilindro é ocupado, em parte, por um líquido cujo volume é de 2000π litros, atingindo uma altura de 2 metros. A válvula é aberta e, após certo tempo, verifica-se que os dois recipientes têm o mesmo nível do líquido. Considerando desprezível o volume da tubulação que une os dois reservatórios e sabendo que a

área da base do paralelepípedo é de $1{,}5\pi$ m^2, o volume final, em litros, de líquido no paralelepípedo é

a) 600π b) 800π c) 1000π d) 1200π e) 1500π

60) (EsPCEx-01) Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas. Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na figura 1, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo 3,46 cm para o diâmetro interno, 4 cm para o diâmetro externo e 1 cm para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo 3,8 cm^3;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a figura 2, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na figura 3.

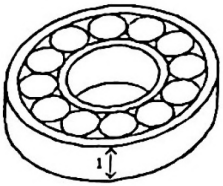


FIGURA 1

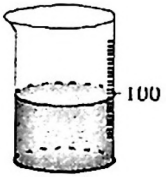


FIGURA 2

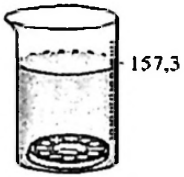


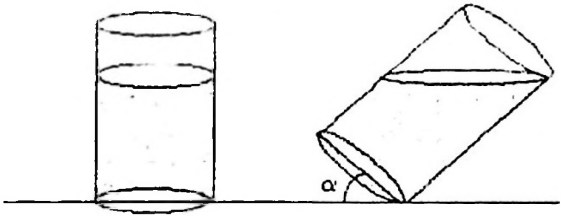
FIGURA 3

Aproximações aceitas: $1{,}73^2 \cong 3$ $3{,}46^2 \cong 12$ $\pi \cong 3{,}1$

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é:

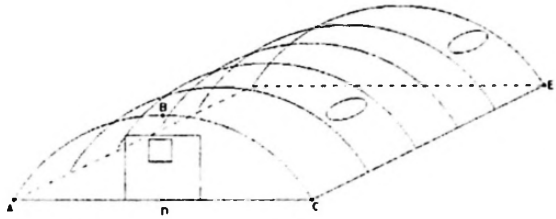
a) 3,4 b) 4,6 c) 3,8 d) 4,2 e) 5,0

61) (EsPCEx-00) Num recipiente em forma de cilindro circular reto, com raio de base 2 cm e altura $6\sqrt{3}$ cm (dimensões internas), há um volume de água de $16\sqrt{3}\pi$ cm^3. O maior ângulo α que o plano da base do cilindro pode fazer com a horizontal para que a água não derrame ao se inclinar o cilindro é de, aproximadamente,



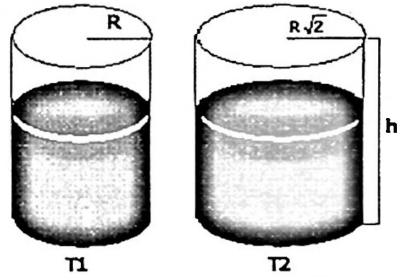
Dados (aproximados)
tg 30° = 0,58 tg 60° = 1,73 tg 40° = 0,84 tg 70° = 2,75 tg 50° = 1,19
a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 70°

62) (EsPCEx-07) Uma barraca de campanha militar possui o formato apresentado no desenho abaixo.



A curva ABC é um arco de 90° de uma circunferência com 10 metros de raio. O segmento mede 20 metros. Admitindo $\pi = 3,14$, podemos concluir que o volume do interior da barraca é de aproximadamente:
a) 480 m^3 b) 570 m^3 c) 618 m^3 d) 1140 m^3 e) 2880 m^3

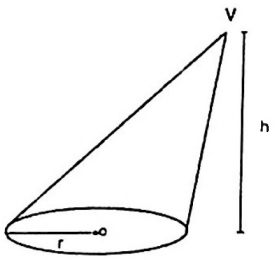
63) (EsPCEx-11) A figura abaixo representa dois tanques cilíndricos, T_1 e T_2, ambos com altura h, e cujos raios das bases medem R e $R\sqrt{2}$, respectivamente. Esses tanques são usados para armazenar combustível e a quantidade de combustível existente em cada um deles é tal que seu nível corresponde a 2/3 da altura. O tanque T_1 contém gasolina pura e o tanque T_2 contém uma mistura etanol-gasolina, com 25% de etanol. Deseja-se transferir gasolina pura do tanque T_1 para T_2 até que o teor de etanol na mistura em T_2 caia para 20%. Nessas condições, ao final da operação, a diferença entre a altura dos níveis de T_1 e T_2 será



a) h/2 b) h/3 c) h/4 d) h/5 e) h/6

Cone

13.1. DEFINIÇÃO: Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano, e um ponto V fora dele. Chama-se cone circular, ou cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.

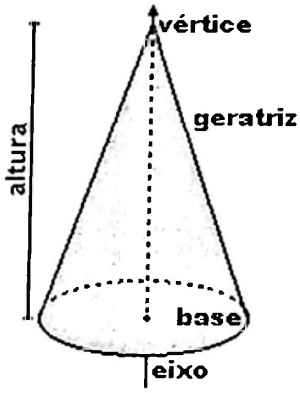


Um cone é dito reto quando o eixo é perpendicular ao plano da base e é oblíquo quando não é um cone reto. Ao lado apresentamos um cone oblíquo.

Um cone circular reto é denominado cone de revolução por ser obtido pela rotação (revolução) de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

Um cone é dito equilátero se a sua secção meridiana é um triângulo equilátero, ou seja, a sua geratriz é igual ao diâmetro da base.

13.2. ELEMENTOS DE UM CONE



Vértice: é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.

Base: é a região plana contida no interior da curva, inclusive a própria curva.

Eixo do cone: é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.

Geratriz: é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.

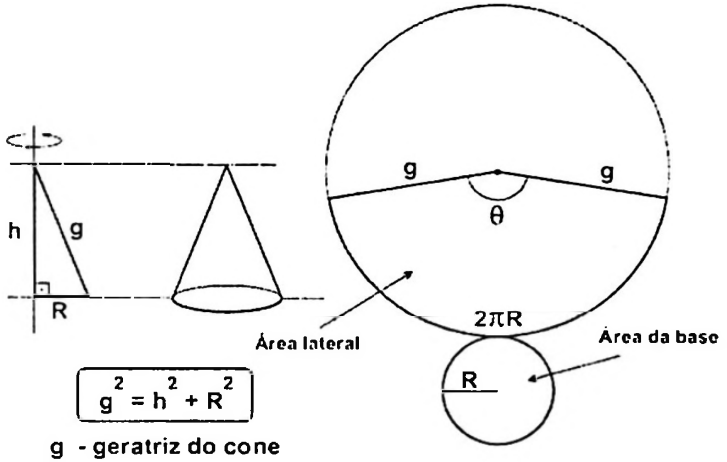
Altura: é a distância do vértice do cone ao plano da base.

Superfície lateral: é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base.

Superfície total: é a reunião da superfície lateral com a base do cone.

Seção meridiana: é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contem o eixo do mesmo.

13.3. CÁLCULO DAS ÁREAS DE UM CONE RETO



$$g^2 = h^2 + R^2$$

g - geratriz do cone
h - altura do cone
R - raio da base do cone

Na figura, tem-se um cone reto de raio de base R, altura h e geratriz g. A planificação de um cone reto é formado pela união de um círculo (base do cone) e um setor circular (superfície lateral).

Área da base: Como a base do cone é um círculo de raio R segue que $A_{base} = \pi R^2$

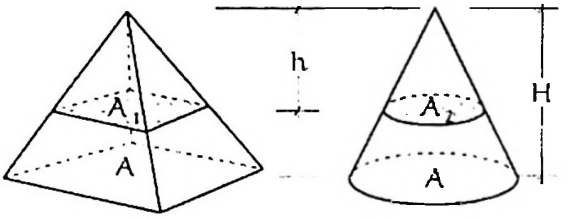
Área Lateral: Desde que a planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de raio g e arco de comprimento $2\pi R$ tem-se que $\theta = \dfrac{2\pi R}{g}$.

Logo:

$$A_{lateral} = \frac{\theta}{2} g^2 = \frac{2\pi R}{2g} g^2 \Rightarrow A_{lateral} = \pi R g$$

Área Total: $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi R(R + g)$

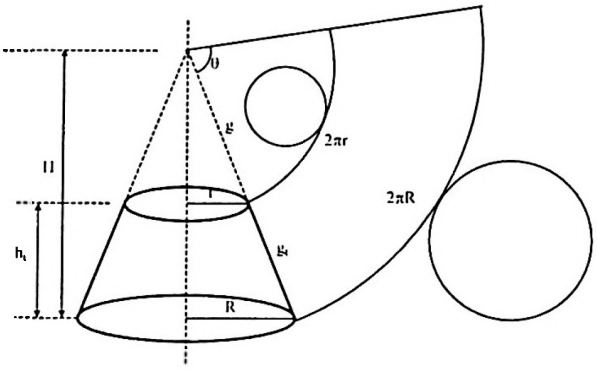
13.4. VOLUME DO CONE



Considere uma pirâmide de base A e altura H e um cone também de base A e altura H. Os dois sólidos possuem suas bases sob o mesmo plano, conforme ilustra a figura ao lado. A um distância h dos vértices dos sólidos é traçado um plano paralelamente às bases, determinando uma seção de área A_1 na pirâmide e uma seção de área A_2 no cone. Por semelhança de triângulo na pirâmide tem-se que $\frac{A_1}{A}=\left(\frac{h}{H}\right)^2$. Também por semelhança de triângulos, agora no cone, demonstra-se que $\frac{A_2}{A}=\left(\frac{h}{H}\right)^2$. Assim, conclui-se que $A_1 = A_2$. Portanto, qualquer plano paralelo às bases dos sólidos determina seções de mesma área nos mesmos. Pelo princípio de Cavalieri, tem-se que $V_{cone} = V_{pirâmide}$:

$$V_{cone}=\frac{1}{3}A_{base}.H \quad \Rightarrow \quad V_{cone}=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

13.5. TRONCO DE CONE



Um tronco de cone é determinado quando um plano intersecta um cone paralelamente à sua base, como indica a figura. Todo tronco de cone possui duas bases, uma maior B (mesma do cone original) e outra menor b (obtida pela seção do plano). A altura h_t de um tronco de cone é definida como a distância entre as bases. A geratriz g_t de um tronco de cone é o segmento de reta, pertencente à superfície lateral do tronco, unindo dois pontos das bases. Considerando as dimensões

apresentadas na figura, pode-se determinar as expressões dos elementos, áreas e volume de um tronco de cone.

13.5.1. Elementos de um Tronco de Cone

As expressões das áreas de tronco de cone são mais facilmente demonstradas analisando a planificação do tronco, que é formada pela união de dois círculos (bases do tronco) e um setor de coroa circular (superfície lateral).

Relação Fundamental: $g_t^2 = (R-r)^2 + h_t^2$

Área das Bases: $A_b = \pi r^2$ e $A_B = \pi R^2$

Área Lateral: Perceba, na planificação da superfície lateral, que o arco de comprimento $2\pi r$ e raio g e o arco de comprimento $2\pi R$ e raio $g + g_t$ possuem o mesmo ângulo central 0. Logo:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} = \frac{2\pi R}{g+g_t} \Rightarrow gR = (g+g_t)r \Rightarrow g = \frac{g_t r}{R-r} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi(R-r)}{g_t}$$

$$A_{lateral} = \frac{\theta[(g_t+g)^2 - g^2)}{2} = \frac{\theta g_t(g_t+2g)}{2} = \frac{\cancel{2}\pi(R-r)}{\cancel{g_t}}\cancel{g_t}\left(g_t + 2\frac{g_t r}{R-r}\right) \Rightarrow$$

$$A_{lateral} = \pi\cancel{(R-r)}g_t\left(\frac{R-r+2r}{\cancel{R-r}}\right) \Rightarrow \mathbf{A_{lateral} = \pi g_t(R+r)}$$

Área Total: $A_{total} = A_b + A_B + A_{lateral} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi g_t(R+r) \Rightarrow$

$$\mathbf{A_{total} = \pi[r^2 + R^2 + g(R+r)]}$$

Volume: O cálculo da volume do tronco de cone é análogo ao cálculo do volume do tronco de pirâmide, chegando-se inclusive à mesma fórmula:

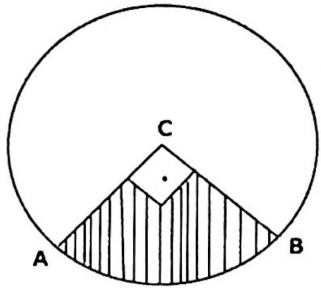
$$V_{tronco} = \frac{h_t}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B.A_b} + A_b\right).$$

Desenvolvendo esta expressão:

$$V_{tronco} = \frac{h_t}{3}\left(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2.\pi r^2} + \pi r^2\right) \Rightarrow \mathbf{V_{tronco} = \frac{\pi h_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)}$$

Exercícios Resolvidos

1) (EsPCEx-16) Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo $\pi/2$ rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto C é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios CA e CB. O volume desse cone, em cm^3, é igual a



desenho ilustrativo-fora de escala

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ b) $\frac{\sqrt{3}}{5}\pi$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$ d) $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$ e) $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

Solução: Alternativa C

A circunferência da base do cone será igual ao arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$:

$2\pi r = 0R = \frac{\pi}{2}4 = 2\pi \Rightarrow r = 1$ cm

A geratriz do cone será igual ao raio da circunferência original: $g = R = 4$ cm

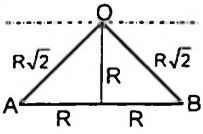
Pela relação fundamental do cone: $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 16 = 1 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ cm

Logo: $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi.1^2.\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi$

2) (ITA-03) Considere o triângulo isósceles *OAB*, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}R^3$ b) πR^3 c) $\frac{4\pi}{3}R^3$ d) $\sqrt{2}\pi R^3$ e) $\sqrt{3}\pi R^3$

Solução: Alternativa C



Quando giramos o triângulo obtemos um sólido que é equivalente a tirarmos dois cones coaxiais e com mesmo vértice (ponto O) de um cilindro. Portanto:

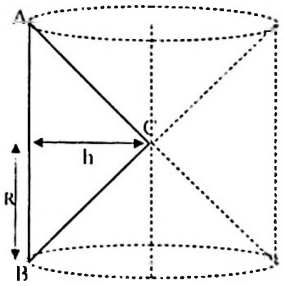
$V = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi R^2(2R) - 2.\pi.R^2(R)/3 \Rightarrow$

$V = 2\pi R^3 - 2\pi R^3/3 \Rightarrow V = 4\pi R^3/3$

3) (AFA-17) Considere o sólido geométrico obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno da reta que passa por C e é paralela ao lado $\overline{AB}$. Sabe-se que este triângulo é isósceles, com $\overline{AC} \equiv \overline{BC} = R\sqrt{2}$ m, $\overline{AB} = 2R$ m (sendo R uma constante real não nula), e que o volume do sólido obtido é $V = 4\pi\sqrt{3}$ m³. A medida de R, em metros, é igual a

a) $\sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{3}$

Solução: Alternativa D



O sólido obtido é equivalente a retirar dois cones do interior de um cilindro reto, como ilustrado na figura ao lado. A altura de ΔABC vale $h = R$.
Deste modo, o volume do sólido é:

$$V = V_{cilindro} - 2V_{cone} \Rightarrow V = \pi R^2.2R - 2\frac{\pi R^2}{3}R \Rightarrow$$

$$4\pi\sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}R^3 \Rightarrow R^3 = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \Rightarrow$$

$$R = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$$

4) (ITA-12) A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a 3π cm^2. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$. b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$. c) 4π e $\pi\sqrt{2}$. d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$. e) π e $2\pi\sqrt{2}$.

Solução: Alternativa A

Perímetro da Base: $2\pi R = \frac{2\pi}{3}g \Rightarrow g = 3R$

Área lateral: $S = \frac{\theta}{2}g^2 \Rightarrow 3\pi = \frac{\pi}{3}(3R)^2 \Rightarrow R = 1$ cm

Relação Fundamental: $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 1 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$ cm

Área total: $S_T = 3\pi + \pi R^2 = 3\pi + \pi = 4\pi$ cm²

Volume: $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³

5) (ITA-97) A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a:

a) $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ d) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$ e) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

Solução: Alternativa B

Por semelhança segue que: $d/1 = r/5 \Rightarrow r = 5d$

O volume do tronco será dado pela subtração entre os volumes dos dois cones:

$V - V' = (V.V')^{1/2} \Rightarrow V^2 - 2V.V' + V'^2 = V.V' \Rightarrow V^2 + V'^2 = 3V.V' \Rightarrow$

$R^4.\Pi^2 + r^4.d^2 = 3.R^2.\Pi.r^2.d \Rightarrow 5^4 + 5^4.d^6 = 3.5^2.5^2.d^3 \Rightarrow d^6 - 3d^3 + 1 = 0 \Rightarrow$

$$d^3 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \overset{d<1}{\Rightarrow} \quad d = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

6) (ITA-04) A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3, é igual a:

a) πR^3 b) $\pi\sqrt{2}R^3$ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$ d) $\pi\sqrt{3}R^3$ e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

Solução: Alternativa E

Sejam g e h as medidas da geratriz e da altura do cone, em cm, respectivamente. Então, a seção meridiana do cone tem perímetro igual a 2(g + R). Assim, sendo S_{total} a área total do cone e $S_{círculo}$ a área do círculo descrito, cujo raio será R + g, tem-se que: $S_{total} = \frac{1}{3}.S_{círculo} \Rightarrow \pi R(R+g) = \frac{1}{3}.\pi(R+g)^2 \Leftrightarrow 3R = R + g \Leftrightarrow g = 2R.$

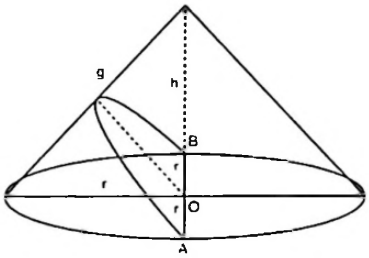
Além disso: $g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 4R^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$. Portanto, o volume do cone é:

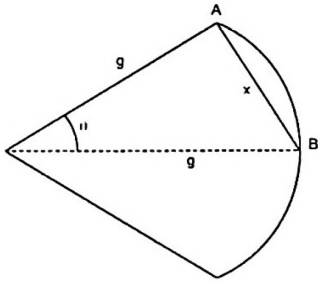
$$V_{cone} = \frac{S_{base}.h}{3} = \frac{\pi R^2.R\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$$

7) (Escola Naval-11) Considere um cone circular reto com raio da base $2\sqrt{2}$ cm e geratriz $4\sqrt{2}$ cm. Sejam A e B pontos diametralmente opostos situados sobre a circunferência da base deste cone. Pode-se afirmar que o comprimento do menor caminho, traçado sobre a superfície lateral do cone e ligando A e B, mede, em cm,

a) $4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}\pi$ c) 8 d) 4 e) $3\sqrt{3}\pi$

Solução: Alternativa C



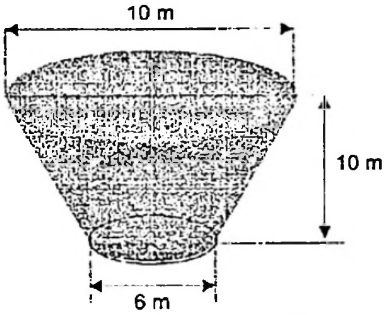


A 1ª figura mostra a mínima trajetória entre dois pontos diametralmente opostos A e B. Esta trajetória é obtida pela interseção de um plano ortogonal à superfície lateral do cone com as geratrizes do cone. A 2ª figura mostra a planificação da superfície lateral do cone. Esta planificação é obtida cortando a superfície lateral do cone através da geratriz que passa pelo ponto A. Nesta planificação o ponto A está em uma extremidade do arco de circunferência enquanto que o ponto B é o ponto médio do mesmo arco. A menor distância entre A e B é o segmento de reta $\overline{AB}$.
Assim, o comprimento do arco de circunferência com extremos A e B é dada por $\overset{\frown}{AB} = \pi r = 2\sqrt{2}\pi$.

Logo, o ângulo central correspondente à corda AB é dado por: $\theta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{g} = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2}$

Portanto: $\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{2g} = \dfrac{x}{8\sqrt{2}} \Rightarrow x = 8\text{ cm}$

8) (Escola Naval-14) A Marinha do Brasil comprou um reservatório para armazenar combustível com o formato de um tronco de cone conforme figura abaixo. Qual é a capacidade em litros desse reservatório?



a) $\dfrac{40}{3}10^2\pi$ b) $\dfrac{19}{2}10^5\pi$ c) $\dfrac{49}{3}10\pi$ d) $\dfrac{49}{3}10^4\pi$ e) $\dfrac{19}{3}10^3\pi$

Solução: Alternativa D
Aplicando os valores na fórmula do volume do tronco de cone:

$$V = \frac{\pi H}{3}\left[R^2 + Rr + r^2\right] = \frac{\pi.10}{3}\left[25 + 15 + 9\right] = \frac{490\pi}{3}\text{m}^3 = \frac{49}{3}10^4\pi\,\ell$$

9) (ITA-12) Um cone circular reto de altura 1 *cm* e geratriz $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\dfrac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ *cm*, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em *cm*, igual a

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.

Solução: Alternativa D

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + r^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm} \Rightarrow V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{9}\text{ cm}^3$$

Sabe-se que $V_{cubo} = a^3 = \frac{\pi}{243}\text{ cm}^3$. Assim: $\frac{1-d}{1} = \sqrt[3]{\frac{\frac{\pi}{243}}{\frac{\pi}{9}}} \Rightarrow d = \frac{2}{3}\text{ cm}$

10) (IME-02) Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que razão entre a área total do cilindro e a área total do cone é 7/4.

Solução:

Sejam R e h, respectivamente, o raio da base e a altura do cone e do cilindro. A geratriz do cone é $g = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Temos $\frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{\pi R^2 + \pi Rg} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 8(R + h) = 7R + 7g \Leftrightarrow R + 8h = 7g$.

Como R, h e g são positivos, isto é equivalente a:

$(R + 8h)^2 = 49g^2 \Leftrightarrow R^2 + 64h^2 + 16hR = 49(R^2 + h^2) \Leftrightarrow$

$$48R^2 - 16hR - 15h^2 = 0 \Leftrightarrow 48\left(\frac{R}{h}\right)^2 - 16\left(\frac{R}{h}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{R}{h} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 48 \times (-15)}}{48} = \frac{8 \pm 28}{48} \Leftrightarrow \frac{R}{h} = \frac{3}{4} \text{ (pois } \frac{R}{h} > 0\text{)}.$$

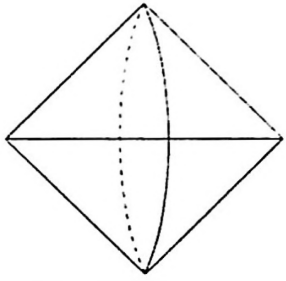
Como $\frac{R}{h}$ é a tangente do ângulo α formado pelo eixo do cone e sua geratriz, e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, temos $\alpha = \text{arc tg } \frac{3}{4}$

Exercícios de Vestibular

1) (Udesc-13) Se a geratriz, a altura e o raio menor de um tronco de cone reto são, respectivamente, $\sqrt{13}$ cm, 3 cm e 3 cm, então o volume do cone original é:

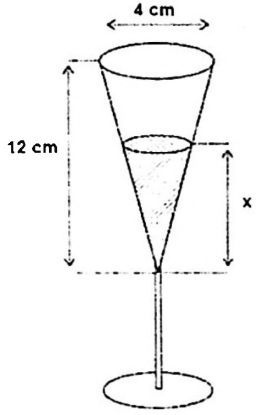
a) 98π cm³ b) 49π cm³ c) $13{,}5\pi$ cm³ d) $62{,}5\pi$ cm³ e) 76π cm³

2) (UESPI-09) Qual o volume do sólido obtido, pelo giro de um quadrado de lado medindo $3\sqrt{2}$, em torno de uma de suas diagonais?



a) 14π b) 15π c) 16π d) 17π e) 18π

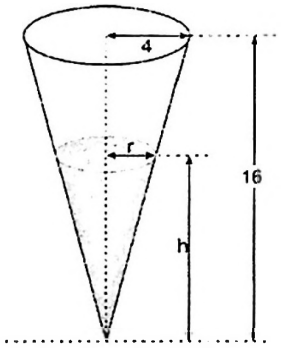
3) (UFPR-10) A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?

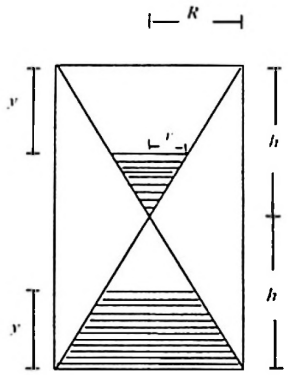
b) Obtenha uma expressão para o volume V de líquido nessa taça, em função da altura x indicada na figura.

4) (UCS-11) Um tanque cônico tem 16 m de profundidade e o raio de seu topo circular mede 4 m. Quando o tanque contém líquido até a altura h, a medida do raio da superfície da água é r. Observe a figura abaixo. Quaisquer que sejam, segundo o contexto do problema, os valores possíveis de r e h, é válida a relação expressa pela igualdade



a) h + r = 20. b) h r = 64. c) 4r – h = 0. d) h r = 20. e) 4r - h = 20.

5) (UFRN-98) A figura abaixo registra o momento em que 7/8 do volume de areia da ampulheta encontra-se na parte inferior.



Calcule o valor da fração numérica que representa a proporção entre y e h naquele momento.

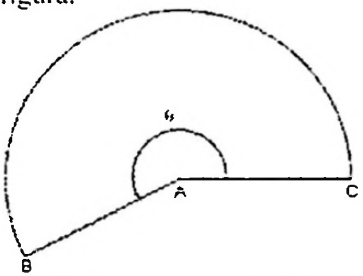
6) (UFMG-97) Seja S um sólido que está contido entre dois planos paralelos, α e β, e que intercepta esses planos. Denote por $A(x)$ a área da seção obtida pela interseção de S com um plano paralelo a α e cuja distância a α seja x.
Se para cada x tem-se $A(x) = ax^2 + bx + c$, com $0 \leq x < h$, em que h é a distância entre α e β, então o volume V de S pode ser calculado usando-se a fórmula

$$V = \frac{h}{6}\left[A(0) + 4A\left(\frac{h}{2}\right) + A(h) \right]$$

A) **DETERMINE** a expressão de $A(x)$ na situação em que S é um cone circular reto de altura H e raio da base R.

B) **Usando a fórmula dada no texto, CALCULE**, em função de H e R, o volume V do cone S do item A).

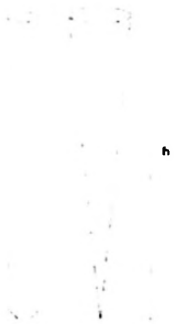
7) (UFMG-99) Observe a figura.



Nessa figura, o setor circular BAC, de ângulo θ, é a superfície lateral de um cone circular reto, desenvolvida num plano. O raio da base desse cone é 6 e seu volume é 96π.

1. **CALCULE** o comprimento da geratriz desse cone.
2. **CALCULE** a medida, **em graus**, do ângulo θ.

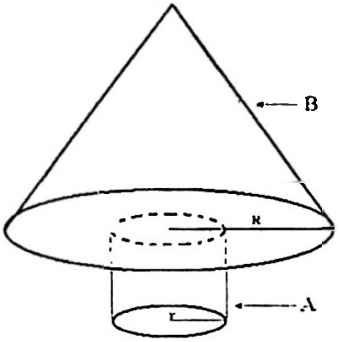
8) (UFPR-12) Num laboratório há dois tipos de recipientes, conforme a figura ao lado. O primeiro, chamado de "tubo de ensaio", possui internamente o formato de um cilindro circular reto e fundo semiesférico. O segundo, chamado de "cone de Imhoff", possui internamente o formato de um cone circular reto.



a) Sabendo que o volume de um cone de Imhoff, com raio da base igual a 2 cm, é de 60 ml, calcule a altura h desse cone.

b) Calcule o volume (em mililitros) do tubo de ensaio com raio da base medindo 1 cm e que possui a mesma altura h do cone de Imhoff.

9) (FURG-10) Um artesão produz velas natalinas na forma de árvore de Natal, conforme a figura abaixo. O sólido A corresponde a um cilindro equilátero e o sólido B é um cone cuja geratriz é igual ao diâmetro de sua base. Sabendo que as dimensões são dadas em centímetros e que o raio do cilindro, r, é a terça parte do raio do cone, R, o volume, em cm^3, do molde desse enfeite, em função do R, é:



10) (UFC-01) Considere um cone eqüilátero de vértice V. Sejam A e B pontos pertencentes à circunferência da base do cone e diametralmente opostos. Sejam P e Q pontos pertencentes aos segmentos de reta VA e VB, respectivamente, e tais que a medida de VP seja igual a 4/5 e a de VQ seja 3/5. Lembrando-se que a superfície lateral de um cone, quando desenrolada, transforma-se em um setor circular plano, determine nesse plano a distância entre os pontos P e Q.

11) (UECE-10) A superfície lateral de um cone circular reto, quando planificada, torna-se um setor circular de 12 cm de raio com um ângulo central de 120 graus. A medida, em centímetros quadrados, da área da base deste cone é
a) 144π b) 72π c) 36π d) 16π

12) (UFV-04) Um chapéu, no formato de um cone circular reto, é feito de uma folha circular de raio 30cm, recortando-se um setor circular de ângulo $\theta = 2\pi/3$ radianos e juntando os lados. A área da base do chapéu, em cm^2, é:
a) 140π b) 110π c) 30π d) 100π e) 120π

13) (UFC-09) Ao seccionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2. A relação (volume S_2)/(volume S_1) é igual a:
A) 33. B) 27. C) 26. D) 9. E) 3.

14) (FGV-12) Um ralador de queijo tem a forma de cone circular reto de raio da base 4cm e altura 10cm. O queijo é ralado na base do cone e fica acumulado em seu

interior (figura 1). Deseja-se retirar uma fatia de um queijo com a forma de cilindro circular reto de raio da base 8cm e altura 6cm, obtida por dois cortes perpendiculares à base, partindo do centro da base do queijo e formando um ângulo α (figura 2), de forma que o volume de queijo dessa fatia corresponda a 90% do volume do ralador.

Ralador

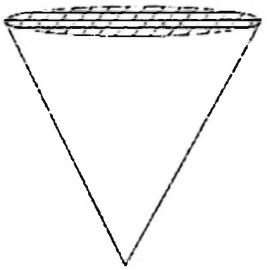


Figura 1

Fatia de queijo

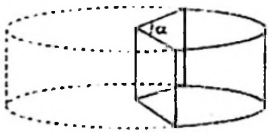
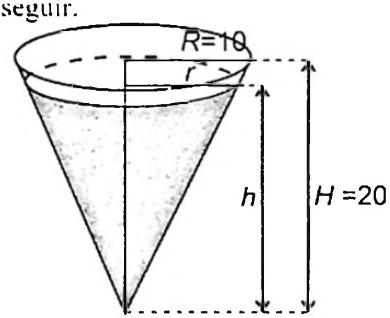


Figura 2

Nas condições do problema, α é igual a

a) 45°. b) 50°. c) 55°. d) 60°. e) 65°.

15) (UFG-13) Um cone circular reto de madeira, homogêneo, com 20 cm de altura e 20 cm de diâmetro da base, flutua livremente na água parada em um recipiente, de maneira que o eixo do cone fica vertical e o vértice aponta para baixo, como representado na figura a seguir.



Denotando-se por h a profundidade do vértice do cone, relativa à superfície da água, por r o raio do círculo formado pelo contato da superfície da água com o cone e sabendo-se que as densidades da água e da madeira são 1,0 g/cm³ e 0,6 g/cm³, respectivamente, os valores de r e h, em centímetros, são, aproximadamente:

(A) 5,8 e 11,6 (B) 8,2 e 18,0
(C) 8,4 e 16,8 (D) 8,9 e 15,0
(E) 9,0 e 18,0

Dados: $\sqrt[3]{3} \sim 1.44$
$\sqrt[3]{5} \sim 1.71$

16) (UFES-11) Um reservatório de água A tem a forma de um cone circular reto de 3m de raio por 6m de altura. Ele está completamente cheio e com a base apoiada

num piso horizontal. Por motivo de reparos, todo o conteúdo de A será transferido para um reservatório B , inicialmente vazio, com formato de um cilindro circular reto, com 2m de raio na base, com 5m de altura e com a base no mesmo piso horizontal da base de A. Considere que, em cada instante, o volume da água que sai de A chega completamente em B . Calcule

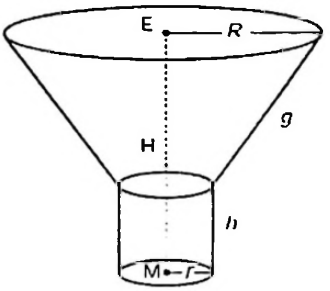
A) os volumes de A e B ;

B) o nível da água em B quando o nível da água em A estiver na metade da altura de A;

C) o nível da água em A quando o nível da água em B estiver na metade da altura de B ;

D) a expressão que dá o nível da água em B em função do nível da água em A.

17) (UFMG-12) Um funil é formado por um tronco de cone e um cilindro circular retos, como representado na figura ao lado.



Sabe-se que g = 8 cm, R = 5 cm, r = 1 cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm

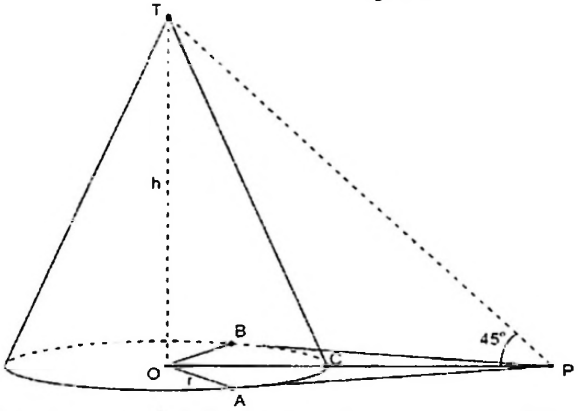
Considerando essas informações,

1. CALCULE o volume do tronco de cone, ou seja, do corpo do funil.

2. CALCULE o volume total do funil.

3. Suponha que o funil, inicialmente vazio, começa a receber água a 127 ml/s. Sabendo que a vazão do funil é de 42 ml/s, CALCULE quantos segundos são necessários para que o funil fique cheio.

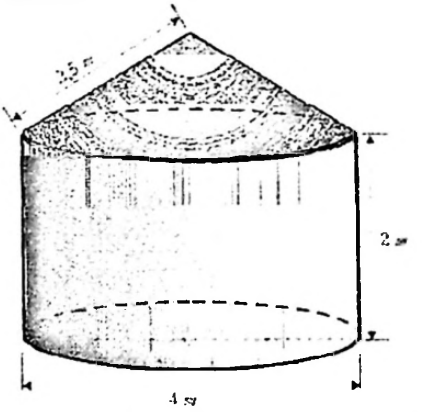
18) (UFMG-13) Um cone circular reto de raio $r = \sqrt{3}$ e altura $h = 2\sqrt{3}$ é iluminado pelo sol a um ângulo de 45°, como ilustrado a seguir.



a sombra projetada pelo cone é delimitada pelos segmentos PA e PB , tangentes ao círculo da base do cone nos pontos A e B , respectivamente.

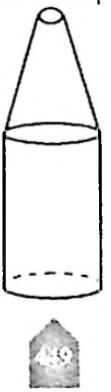
Com base nessas informações,
1. DETERMINE a distância de P ao centro O do círculo.
2. DETERMINE o ângulo AÔB
3. DETERMINE a área da sombra projetada pelo cone.

19) (UFPB-11) A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural do município. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por 2 m construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura abaixo.



Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de (use $\pi = 3{,}14$):
a) 100.960 b) 125.600 c) 140.880 d) 202.888e) 213.520

20) (UFPB-13) Um tipo comum de garrafa plástica usada atualmente tem um formato de cilindro circular reto, na sua parte inferior, e formato de tronco de cone, na sua parte superior (não considerando a tampa).



Certa indústria de refrigerantes encomendou a confecção de uma garrafa, do tipo descrito e ilustrado ao lado, que atendesse às seguintes especificações:
• O volume da garrafa, não considerando o volume da tampa, deveria ser de 2 litros.
• O volume da parte superior (tronco de cone) deveria ser 21,5% do volume da garrafa.
• A altura da parte inferior (cilindro) deveria ser de 20cm.
Com base nas especificações apresentadas, é correto afirmar que o raio, em centímetros, da parte inferior da garrafa é aproximadamente de:
USE $\pi = 3,14$
a) 4,5 b) 5 c) 5,5 d) 6 e) 6,5

21) (Fuvest-91) Considere um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c. Sejam V_a, V_b, V_c os volumes dos sólidos gerados pela rotação do triângulo em torno dos lados a, b e c respectivamente.
a) Calcule V_a, V_b e V_c em função das medidas de a, b e c.
b) Escreva aV_a em função de b, c, V_b, e V_c

22) (UFC-99) Um ponto L dista 2r unidades de comprimento do centro de uma circunferência cujo raio mede r unidades de comprimento. A partir de L conduza duas tangentes à circunferência e denote os pontos de tangência por P e T. Então, a área lateral do cone circular reto, gerado pela rotação do triângulo LPT, tendo como eixo de rotação a mediana que parte de L, medida em unidades de área é:
a) πr^2 b) $3\pi r^2/2$ c) $\pi r^2/2$ d) $2\pi r^2$ e) $5\pi r^2$

23) (UNB-01) A aproximadamente 350 km de São Luís, na costa leste do Maranhão, o Parque Nacional dos Lençóis Maranhenses é um palco privilegiado. Com características pouco comuns nos ecossistemas aquáticos continentais brasileiros, a região conta com grande quantidade de lagoas, sendo a lagoa Azul a mais conhecida e visitada. Mesmo sendo uma das poucas que não secam durante o período de estiagem a lagoa tem algumas características que variam bastante ao longo do ano: a forma, a profundidade, o volume etc. A tabela abaixo mostra essas características em dois meses do ano de 1998.

características	set./98	nov./98
área da superfície da água	26.452,2 m^2	282,8 m^2
volume de água	12.272,1 m^3	13,8 m^3
profundidade máxima	1,20 m	0,12 m
comprimento máximo	287 m	36,4 m
largura máxima	129 m	13,8 m
perímetro	690 m	63 m

Galileu, ago. 2000, p. 6 (com adaptações)

Considerando as informações acima, julgue os itens que se seguem.

(1) Os dados apresentados na tabela permitem concluir que o formato da lagoa Azul não pode ser o de um paralelepípedo retângulo.
(2) Se, em nov./98, o formato da lagoa fosse o de um cilindro circular reto, com área da base e volume correspondendo aos valores apresentados na tabela, então a sua profundidade seria superior a 50% da profundidade máxima listada na tabela para aquele mês.
(3) Sabendo que a área de uma elipse cujo eixo maior mede 2a e o eixo menor mede 2b é igual a πab, se a superfície da água da lagoa Azul fosse aproximada por uma elipse em set./98, então, tomando-se como base o comprimento máximo e a largura máxima dados na tabela, a área dessa elipse seria inferior a 30.000 m^2.
(4) Suponha que, em set./98, a lagoa Azul tivesse o formato de um tronco de cone circular reto, com base maior coincidindo com a superfície da lagoa e de área igual à mostrada na tabela. Se seu perímetro fosse reduzido, no período de set./98 a nov./98, na mesma proporção evidenciada na tabela, mantendo-se inalterado o formato e abaixando-se o nível da água apenas por evaporação, então, no período considerado, a área da superfície da água seria reduzida para um valor superior a 282,8 m^2.

24) (Udesc-10) Considere um tronco de cone de volume igual a 338π m^3, altura igual ao dobro do seu maior raio e geratriz que forma um ângulo α com o plano da sua base. Se $tg\alpha = 6$, então o comprimento da geratriz é:
a) $2\sqrt{13}$ m b) $\sqrt{37}$ m c) $\sqrt{35}$ m d) $\sqrt{74}$ m e) $\sqrt{8}$ m

25) (Udesc-12) Um recipiente de uso culinário com 16 cm de altura possui o formato de um tronco de cone reto (conforme ilustra a Figura 2) e está com água até a metade da sua altura.

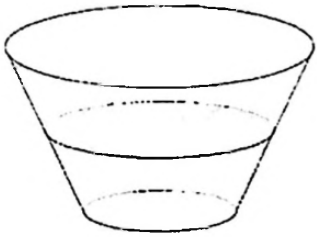


Figura 2: Recipiente culinário

Sabendo que a geratriz desse recipiente é igual a 20 cm e que o diâmetro de sua base é igual a 4 cm, classifique as proposições abaixo e assinale (V) para verdadeira ou (F) para falsa.
( ) O volume de água no recipiente corresponde à quarta parte da quantidade necessária para enchê-lo totalmente.

( ) Se a água do recipiente for retirada à taxa constante de 28 cm^3 por segundo, então o tempo necessário para esvaziá-lo será superior a 20 segundos.
( ) Para aumentar 4 cm do nível de água no recipiente, é necessário acrescentar mais 364π cm^3 de água.
A alternativa correta, de cima para baixo, é:
a) ( ) V – F – F b) ( ) F – V – F c) ( ) F – V – V
d) ( ) F – F – V e) ( ) V – V – F

26) (UEL-13) Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura h cm e raio r cm (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

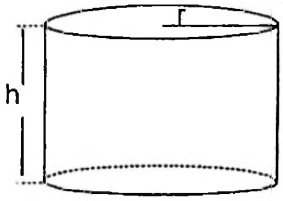


Figura 1

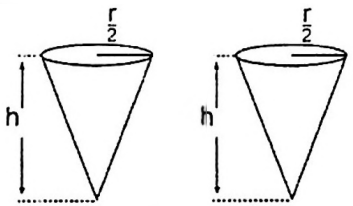


Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, determine quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata. Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

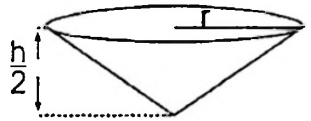
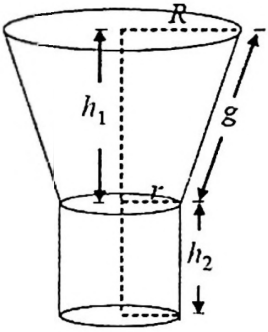


Figura 3

Observação:
Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

27) (UEM-09) Um funil de metal será construído para fins industriais. A parte superior do funil tem a forma de um tronco de cone circular reto e a inferior tem a forma de um cilindro circular reto, como mostra a figura A abaixo.



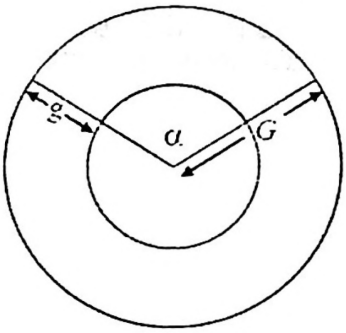


Figura A Figura B

O tronco de cone tem raio da base maior R = 2m, raio da base menor r = 1 m e altura h_1 = 3 m. O cilindro tem altura h_2 = 2 m. Planificando-se a parte superior do funil, obtém-se uma folha de metal com a forma de um setor de coroa circular com ângulo central igual a α radianos, de raio maior G (em metros) e tal que a diferença entre os raios maior e menor é igual a g (em metros), como ilustrado na figura B acima. Considerando o exposto, assinale o que for correto.

01) O cone reto que, quando seccionado por um plano paralelo à sua base, produz o tronco de cone da parte superior do funil tem altura H = 6 m.

02) A folha de metal, ilustrada na figura B, em forma de um setor de coroa circul tem raio maior G = $2\sqrt{10}$ m e ângulo central $\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}$ radianos.

04) A área da superfície da parte superior do funil é igual a 27 m^2.

08) A razão entre a capacidade volumétrica da parte superior do funil em relação à da parte inferior é igual a 9/2.

16) A capacidade volumétrica do funil é $9\pi m^3$.

28) (UEM-10) Um reservatório de água tem a forma de um tronco de cone circular reto de bases paralelas, em que o raio da base menor mede 1,5 m, o raio da base maior mede 2 m e a distância entre a base menor e a base maior é de 2 m. O reservatório encontra-se suspenso, e a base menor, paralela ao solo, está mais próxima a este do que a base maior. A distância da base menor ao solo é de 8 m. Considere as seguintes informações: S é o cone que contém o tronco, V é o vértice de S, C_1 é o centro da base menor, C_2 é o centro da base maior, e A é um ponto qualquer fixado na circunferência da base maior. Considerando essas informações, que a quantidade de água dentro do reservatório tem 1m de profundidade e que π = 3,14 , assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

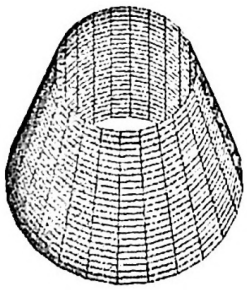
01) A distância de V até a base menor é de 6 m.

02) O volume do cone S é de 32π m^3.

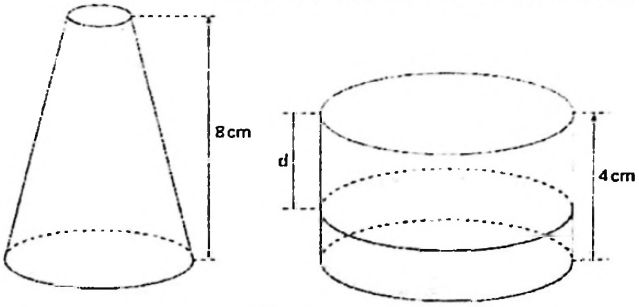
04) Se P é o ponto onde a reta AV intercepta o solo e Q é o ponto onde a reta C_1V intercepta o solo, a distância entre P e Q é de 1 m.
08) A superfície da água contida no reservatório determina um círculo de diâmetro igual a 3,5 m.
16) O volume de água no reservatório é de $127/\pi 48$ m^3.

29) (UEM-11) O principal monumento da cidade de Maringá é a sua catedral, cuja altura é de 124 m, já incluída a cruz, que é de 10 m. A catedral possui o formato de um cone com, aproximadamente, 50 m de diâmetro externo e 40 m de diâmetro interno. Além disso, a geratriz do cone externo que delimita a catedral mede, aproximadamente, 116,7 m. Levando-se em conta esses dados e supondo a catedral formada por uma "casca" delimitada por dois cones de bases concêntricas e geratrizes paralelas e usando $\pi = 3$, é correto afirmar que
01) a altura livre da catedral (distância entre a base e o ponto mais alto do teto) é superior a 80 m.
02) a superfície lateral do cone externo que delimita a catedral é superior a 9600 m^2.
04) em aglomerações estima-se o número de pessoas presentes, considerando que cada metro quadrado comporte 6 pessoas. Sendo assim, se o térreo da catedral, completamente vazio, pudesse ser livremente tomado por pessoas em uma aglomeração, poderia comportar mais de 8000 pessoas.
08) a coroa circular, na base da catedral, delimitada pelos cones externo e interno, possui área inferior a 600 m^2.
16) se o cone externo que delimita a catedral fosse planificado teríamos um setor circular de ângulo superior a 45 graus.

30) (UFPA-08) Um arquiteto planeja uma catedral cuja forma é um tronco de cone reto com altura de 90m, raio maior 90m e raio menor 60m. O tronco de cone é perfurado por um cilindro reto com raio 60m, cujo eixo é o mesmo do cone. Calcule o volume do espaço limitado pelo tronco de cone, o cilindro e o piso.



31) (Mackenzie-09) Um frasco de perfume, que tem a forma de um tronco de cone circular reto de raios 1 cm e 3 cm, está totalmente cheio. Seu conteúdo é despejado em um recipiente que tem a forma de um cilindro circular reto de raio 4 cm, como mostra a figura.



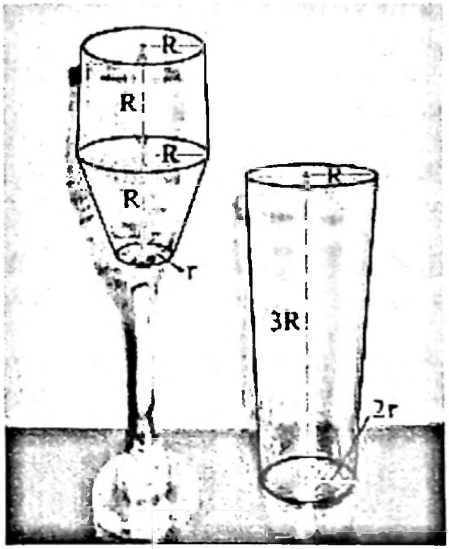
Se d é a altura da parte não preenchida do recipiente cilíndrico e, adotando-se $\pi = 3$, o valor de d é

a) 10/6 b) 11/6 c) 12/6 d) 13/6 e) 14/6

32) (Unesp-08) Seja C um cone circular reto de altura H e raio R. Qual a altura h, a medir a partir da base, tal que a razão entre os volumes do cone e do tronco de altura h do cone seja 2?

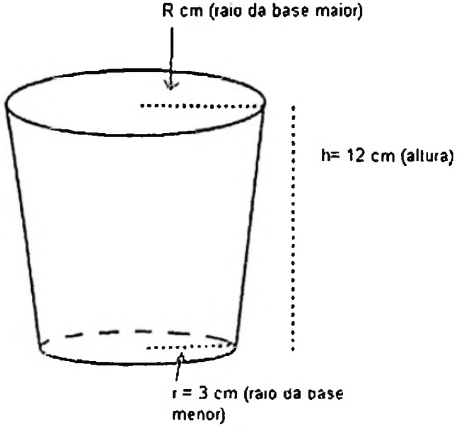
a) $\frac{(1-\sqrt{2})}{2}H$ b) $2\sqrt{2}H$ c) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}H$ d) $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)H$ e) $\frac{(2-\sqrt{2})H}{2}$

33) (Unesp-14) A imagem mostra uma taça e um copo. A forma da taça é, aproximadamente, de um cilindro de altura e raio medindo R e de um tronco de cone de altura R e raios das bases medindo R e r. A forma do copo é, aproximadamente, de um tronco de cone de altura 3R e raios das bases medindo R e 2r.



Sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e raios das bases B e b é $\frac{1}{3}\pi.h.(B^2 + B.b + b^2)$ e dado que $\sqrt{65} \cong 8$, determine o raio aproximado da base do copo, em função de R, para que a capacidade da taça seja 2/3 da capacidade do copo.

34) (UFU-12) Considere um balde para colocação de gelo no formato de um tronco de cone circular reto apresentando as medidas indicadas na figura a seguir.



Considerando que esse balde esteja com 25% de sua capacidade ocupada com gelo derretido (água) e, consequentemente, com volume de água igual a $0{,}097\pi$ litros, qual é o valor (em cm) do raio da base maior R?

a) 8,5 b) 9 c) 8 d) 7,5

35) (Fuvest-96) As bases de um tronco circular reto são círculos de raio 6 cm e 3 cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

a) a altura do tronco de cone;

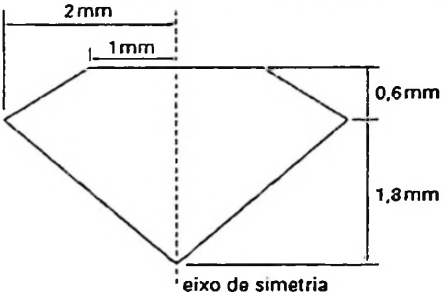
b) o volume do tronco de cone.

36) (URFN-97) O tronco de um cone circular reto tem raio da base R, altura 2R e raio da seção superior R/3. Calcule seu volume em função de R.

37) (Unicamp-12) Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente $3{,}5 g/cm^3$, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

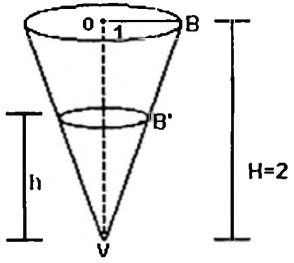
b) A figura abaixo apresenta a seção transversal de um brilhante.



Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.

38) (Ciaba-94) Um cone está circunscrito a uma esfera de raio 4 cm. Sendo 12 cm o raio da base do cone, a altura do cone é:
a) 16/3 cm b) 9 cm c) $\sqrt{3}/2$ cm d) 20/3 cm e) 8 cm

39) (Ciaba-94) Um recipiente tem a forma de um cone invertido, como mostra a figura. A altura do cone é 2 dm e o raio da base é 1 dm. O recipiente está com água até a metade de sua capacidade. A distância do nível da água ao vértice em, dm, é:



a) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 4

40) (AFA-98) A razão entre os volumes de dois cones eqüiláteros de alturas **h** e **2h** é
a) 1/2 b) 1/4 c) 1/6 d) 1/8

41) (AFA-00) Seja um tronco de cone reto com altura h e bases de raio R e r (R > r). Retira-se desse sólido um cone reto invertido com base coincidente com a base menor do tronco e altura h. Se o volume do sólido resultante é igual ao volume do sólido retirado, então
a) $R^2 + Rr - r^2 = 0$ b) $R^2 + Rr - 2r^2 = 0$
c) $2R^2 - Rr - r^2 = 0$ d) $2R^2 + Rr - 2r^2 = 0$

42) (Ciaba-11) Um hexágono regular de lado igual a 8 cm está inscrito na base de um cone de revolução de volume igual a 128π cm^3. A razão entre a área total do cone e a área total de um cilindro, com o mesmo volume e a mesma base do cone, é de

a) 0,3 b) 0,6 c) 0,9 d) 0,27 e) 0,36

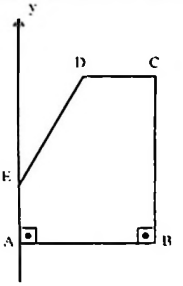
43) (AFA-02) A área total do sólido gerado pela rotação do polígono ABCDE em torno do eixo y, que contém o lado AE, é, em m^2, igual a

a) 144π

b) 150π

c) 168π

d) 170π



Dados:

$\overline{AE} = 2m$

$\overline{AB} = 6m$

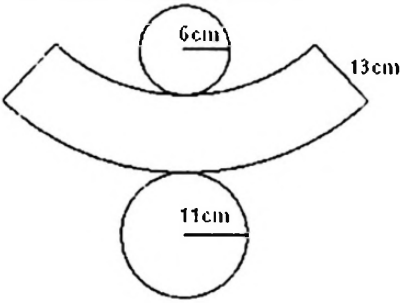
$\overline{BC} = 6m$

$\overline{CD} = 3m$

44) (EsPCEx-99) A razão entre a altura de um cilindro reto e a altura de um cone circular reto, de mesmo volume, é igual a 1/3. Sendo R o raio do cilindro e r o raio do cone, pode-se afirmar que

a) R = r/9 b) R = r/3 c) R = 3r d) R = r e) R = 2r

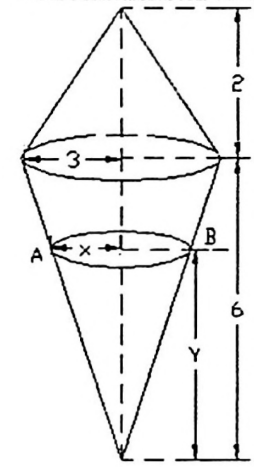
45) (EsPCEx-10) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é



Desenho fora de escala

a) 13 cm b) 12 cm c) 11 cm d) 10 cm e) 9 cm

46) (EsPCEx-98) O sólido geométrico abaixo é formado por dois cones circulares retos de mesma base. Sabendo-se que a seção que contém os pontos A e B é paralela à base comum dos cones e divide todo o sólido em duas partes de igual volume, então o valor de $x^3 + y^3$ é:



a) 96 b) 128 c) 144 d) 162 e) 248

47) (EsPCEx-96) Um trapézio isósceles, cujas bases medem 2 cm e 4 cm e cuja altura é 1 cm, sofre uma rotação de 180° em torno do eixo que passa pelos pontos médios das bases. O volume, em cm^3, do sólido gerado por essa rotação é:
a) $4\pi/3$ b) $5\pi/3$ c) 2π d) $7\pi/3$ e) $8\pi/3$

48) (EsPCEx-12) Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo. Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será

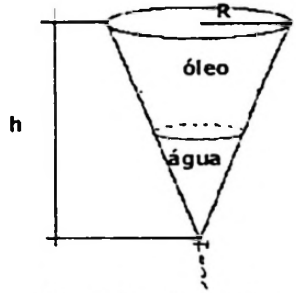


Figura fora de escala

a) $\frac{\sqrt[3]{7}h}{2}$ b) $\frac{\sqrt[3]{7}h}{3}$ c) $\frac{\sqrt[3]{12}h}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{23}h}{2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{23}h}{3}$

47) (ITA-71) Dado um cone reto de geratriz g e altura h, calcular a que distância da vértice deveremos passar um plano paralelo à base, a fim de que a secção obtida seja equivalente à área lateral do tronco formado.

a) $\sqrt{g(g-h)}$; b) $\sqrt{g(g-\sqrt{g^2-h^2})}$; c) $\sqrt{g^2-\sqrt{g^2-h^2}}$;

d) $\sqrt{h^2-g\sqrt{g^2-h^2}}$; e) N.d.r.a.

50) (ITA-72) O volume do sólido gerado por um triângulo, que gira em torno de sua hipotenusa cujos catetos são 15 cm e 20 cm, é:

a) 1080π cm^3 b) 960 cm^3 c) 1400 cm^3 d) 1600π cm^3

e) nenhuma das respostas anteriores

51) (ITA-75) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são (sen x) cm e (cos x) cm. Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa, e obteve como resultado π cm^3. Considerando este resultado como certo, podemos afirmar que:

a) $x = \pi/6$ b) $x = \pi/3$ c) $x = \pi/4$ d) $x = \pi/5$ e) nda

2) (ITA-81) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de 24π cm^2 e o raio de sua base mede 4 cm?

a) $16\sqrt{20}\,\pi/3$ cm^3 b) $\sqrt{24}\,\pi/4$ cm^3 c) $\sqrt{24}\,\pi/3$ cm^3

d) $8\sqrt{24}\,\pi/3$ cm^3 e) $\sqrt{20}\,\pi/3$ cm^3

53) (ITA-87) Considere um trapézio isósceles de altura igual à base menor e de base maior igual ao triplo da menor. Sendo *l* a medida de cada um dos lados não paralelos, calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação completa desse trapézio em torno de sua base maior.

54) (ITA-15) Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista *h* do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2}$-*h*. b) $\sqrt[3]{2}$-1. c) $(\sqrt[3]{2}-1)h$. d) *h*. e) $\frac{h}{2}$

55) (ITA-93) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e 15π dm^2 de área lateral, o valor de seu volume em dm^3 é:

a) 9π b) 15π c) 36π d) 20π e) 12π

56) (ITA-92) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288°. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

a) $16\pi\ cm^2$ b) $\frac{308\pi}{9} cm^2$ c) $\frac{160\pi}{3} cm^2$ d) $\frac{100\pi}{9} cm^2$ e) n.d.a.

57) (ITA-98) Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se n planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando n + 1 cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. então, o volume, em cm^3, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

a) $\frac{\pi}{33}$ b) $\frac{2\pi}{33}$ c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{2\pi}{15}$ e) π

58) (ITA-99) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$ e) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

59) (ITA-01) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128m^3$, temos que o raio da base e altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8 b) 8 e 6 c) 8 e 7 d) 9 e 6 e) 10 e 8

60) (IME-64) Um tronco de cone de revolução, de bases paralelas, tem a sua geratriz igual à soma dos raios das suas bases. Sabendo-se que a sua área lateral é igual a 66,56 cm^2, e que a sua altura é de 4 cm, calcular o seu volume.

61) (IME-70) O raio da base de um cone mede 2,5 metros e o volume 30 metros cúbicos. Calcule:

a) a superfície lateral do cone;

b) o ângulo do setor obtido desenvolvendo a superfície lateral deste cone sobre um plano.

62) (IME-78) Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r. No plano da base desse cone toma-se um ponto A, 'a uma distância x do ponto O (x > r). Pelo segmento VA traçam-se dois

planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, a pertencem ao plano da base).
a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.
b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto. Qual a condição para que este problema tenha solução?

63) (IME-84) Um triângulo equilátero ABC, de lado a, gira em torno de um eixo XX' de seu plano, passando por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada pelo triângulo e designando por θ, o ângulo $X\hat{A}B$ pede-se determinar os valores de θ para que:
a) S seja máximo
b) S seja mínimo
c) $S = 3\pi a^2$
Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.

64) (IME-89) Um cone tem por vértice um ponto A de uma esfera, de centro O e raio r, e por base o círculo de interseção da esfera com um plano perpendicular à eta OA, em um ponto H, situado a uma distância x do vértice A. Calcule, em unção de r e x: a) o volume do cone; b) a superfície lateral do cone.

65) (IME-90) Dois círculos de raio R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

66) (IME-91) Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:
a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.
b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

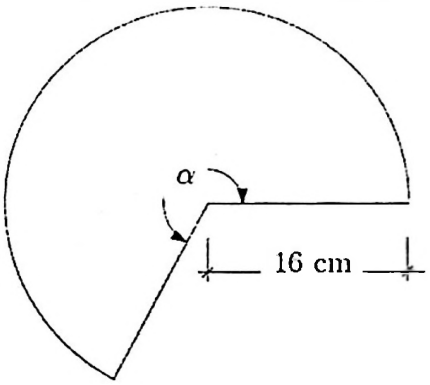
67) (IME-94) Seja C um semi-círculo com centro O e diâmetro PQ = 2π. sobre o segmento OP, toma-se um ponto N tal que ON = x , $0 \leq x \leq r$. Por N traça-se uma reta perpendicular a PQ que encontre o semi-círculo em M. A reta tangente ao semi-círculo em M corta a reta PQ em um ponto T:
a) Calcule, em função de r e x , o volume V_1 gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de PQ.

b) Calcule, em função de r e x, o volume V_2 gerado pela rotação do triângulo MPT em torno de PQ.

c) Considerando a razão $y = \frac{V_2}{V_1}$, quando x varia no intervalo [0 , r], faça o esboço do respectivo gráfico.

68) (IME-83) São dados duas superfícies cônicas de revolução, congruentes e de eixos paralelos. Seccionam-se essas duas superfícies por dois planos π e π' perpendiculares ao eixo de revolução, passando cada qual pelo vértice de uma das superfícies. Designam-se por (c) e (c') os cones resultantes situados entre dois planos. Seja h a distância entre π e π'. Cortam-se (c) e (c') por um terceiro plano σ, paralelo a π e π', a uma distância variável x de π.
a) Mostre que a soma dos perímetros das seções (k) e (k'), determinadas por σ em (c) e (c') é constante.
b) Determine x de forma que a soma das áreas das duas seções (k) e (k') seja igual ao produto de um número real m pela área base de um dos cones (c) ou (c'). Entre que valores poderá variar m?

69) (IME-51) O setor circular representado na figura abaixo é a superfície lateral planificada de um cone reto de base circular. Determinar o volume do cone.

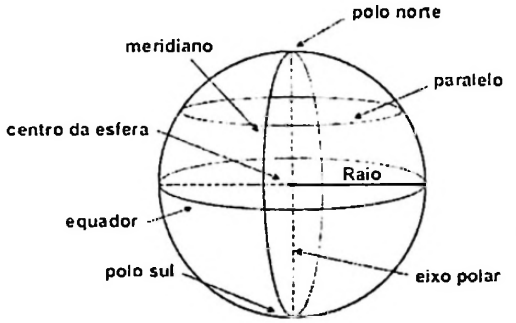


$\alpha = \frac{\pi}{2}.\sqrt{7}$ radianos

70) (ITA-58) Um tronco de cone reto tem bases circulares de raios **R** e **r**. Qual a altura para que a superfície lateral seja igual à soma das superfícies das bases?

Esfera

14.1. DEFINIÇÃO: Esfera é um sólido limitado por uma superfície curva de revolução que tem todos os pontos igualmente distantes de um ponto interior chamado centro. Pode-se também definir esfera como sendo resultado da rotação de um semicírculo ao redor de seu diâmetro. A superfície esférica é resultado da revolução de uma semicircunferência em torno do diâmetro.

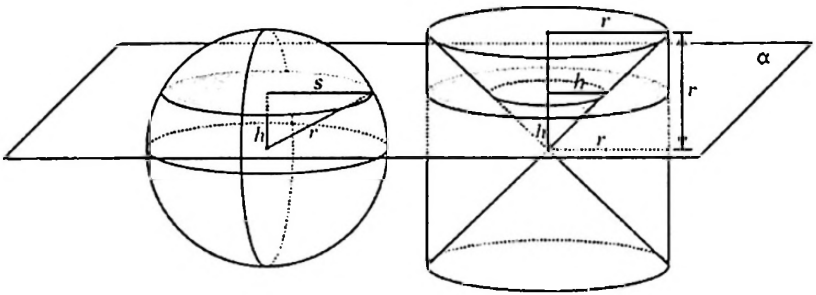


A figura identifica os principais elementos de uma esfera. Em destaque está o raio, distância entre o centro da esfera e um ponto qualquer de sua superfície.

Perceba a sutil diferença existente entre os conceitos de esfera e superfície esférica, semelhante à diferença entre círculo e circunferência. Esfera é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância menor ou igual a R (raio da esfera) de um ponto fixo (centro da esfera). Por outro lado, a superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância R (raio da esfera) de um ponto fixo (centro da esfera). Em outras palavras, na esfera os pontos internos da superfície esférica fazem parte do sólido.

14.2. VOLUME DA ESFERA

Considere uma esfera de raio r. Um outro sólido é construído retirando-se do interior de um cilindro reto (de raio de base igual a r e altura 2r) dois cones, como ilustrado na figura, ambos retos de raio de base r e altura r. O vértice comum dos cones coincide com o centro do cilindro original.



Seja α um plano paralelo às bases originais do cilindro. Este plano intersecta a esfera determinando sobre esta uma seção circular. A interseção do plano α com sólido determinação uma coroa circular, conforme indicado na figura.

Supondo que o plano α está à distância h do centro da esfera e do centro do sólido. Deste modo, o raio s da seção circular de α sobre a esfera vale $s = \sqrt{r^2 - h^2}$. Assim, a área deste círculo é igual a $S_1 = \pi s^2 = \pi(r^2 - h^2)$.

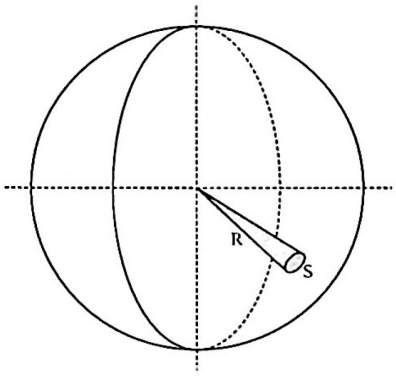
Por semelhança de triângulo, tem-se que o raio interno da coroa circular é h. O raio externo da coroa circular, independentemente do plano α, vale r. Logo, a área desta coroa circular é $S_2 = \pi(r^2 - h^2)$.

Conclui-se, portanto, que para qualquer plano α paralelo às bases originais do cilindro, tem-se $S_1 = S_2$. Pelo princípio de Cavalieri, segue que o volume da esfera é igual do sólido:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2.V_{cone} = \pi r^2.2r - 2\frac{1}{3}\pi r^2.r = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow \mathbf{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

14.3. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

1ª demonstração:



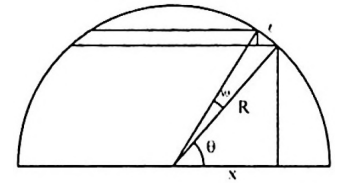
Suponha uma esfera de raio R. Na superfície desta esfera considere uma região circular muito pequena de área S. Como o círculo destacado possui área muito pequena, pode-se considerar que o sólido determinado por S e o centro da esfera é um cone de altura R e base S, cujo ângulo de abertura é infinitesimal. Fazendo a união de todos estes infinitos possíveis cones infinitesimais obtém-se todo o volume da esfera. Assim:

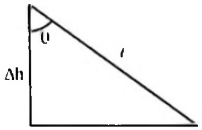
$$V_{esfera} = \sum V_{cone} = \sum \frac{1}{3} S_{base}.R = \frac{R}{3}\sum S_{base}$$

Por outro lado, observe que a soma de todas as áreas S das regiões circulares, tomadas ao longo da superfície da esfera, é igual a própria área da esfera:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{R}{3} S_{esfera} \Rightarrow \mathbf{S_{esfera} = 4\pi R^2}$$

2ª demonstração:





Considere uma semi-esfera de raio R, cuja seção meridional está ilustrada na 1ª figura ao lado. Dois planos intersectam a semi-esfera, paralelamente à base da mesma, caracterizados pelos ângulos θ e θ + Δθ (em relação ao centro da esfera), determinando o sólido da 2ª figura. Seja ℓ o comprimento do arco equivalente ao ângulo Δθ na seção semi-circular mostrada na 1ª figura. Sabe-se que $\ell = \Delta\theta.R$

Seja x o raio da seção determinada pela interseção do plano relativo ao ângulo θ e a semi-esfera. Projetando R na horizontal tem-se que $x = R.\cos\theta$

Supondo que Δθ é um ângulo muito pequeno, pode-se considerar que o arco relativo ao ângulo Δθ é um segmento de reta de comprimento $\ell = \Delta\theta.R$. Deste modo, pode-se identificar um triângulo retângulo cuja hipotenusa é ℓ, muito pequeno, que está ampliado na 3ª figura. Com tudo que foi exposto anteriormente, pode-se supor que a 2ª figura é a superfície de um tronco de cone de geratriz ℓ e cujas bases possuem raios iguais a R.cos θ e R.cos (θ + Δθ).

A área lateral desta superfície de tronco de cone vale

$$S = \pi[R.\cos\theta + R.\cos(\theta + \Delta\theta)]\ell$$

Como Δθ é pequeno comparado com θ segue que $\theta + \Delta\theta \cong \theta$. Logo:

$$S = 2\pi R.\cos\theta.\ell = 2\pi R(\ell.\cos\theta) = 2\pi R.\Delta h$$

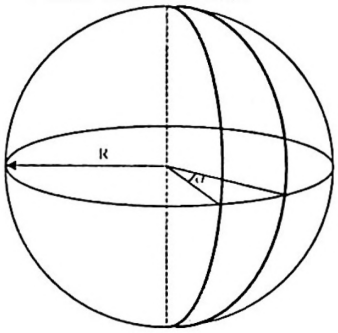
Assim, foi demonstrado que a área lateral da 2ª figura é proporcional a Δh. Deste modo, para Δh = R tem-se a área lateral de uma semi superfície esférica: $S_{\text{semi superfície esférica}} = 2\pi R^2$. Como a área da superfície esférica é o dobro da área da semi superfície esférica de mesmo raio:

$$S_{\text{e superfície esférica}} = 4\pi R^2$$

Observação: O resultado que a porção da área de uma superfície esférica limitada por dois planos paralelos é proporcional à distância entre esses planos será usado para demonstrar a área da zona esférica.

14.4. PORÇÕES DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

14.4.1. Fuso Esférico



Fuso Esférico é o resultado da interseção de uma superfície esférica com um diedro cuja aresta contenha um diâmetro da superfície esférica. O fuso é caracterizado pela medida do ângulo α, medida do diedro.

Perceba que a área de um fuso é proporcional a medida do ângulo α. Assim, a área de um fuso é:

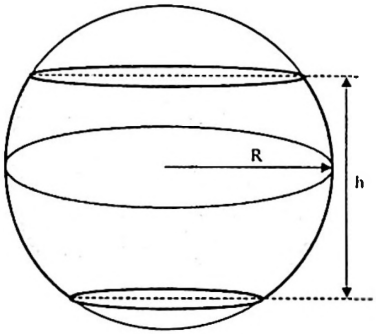
i) Se α medido em graus:

$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{360} A_{esfera} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{\alpha.\pi.R^2}{90}$$

ii) Se α medido em radianos:

$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{2\pi} A_{esfera} \Rightarrow \mathbf{A_{fuso} = 2\alpha R^2}$$

14.4.2. Zona Esférica



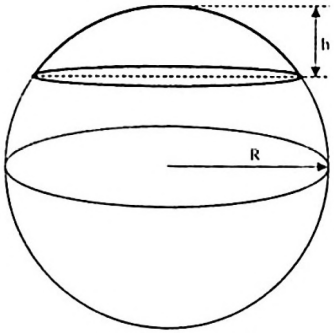
Zona esférica é a porção da superfície esférica limitada por dois planos paralelos. Também pode ser definida pela rotação de um arco de circunferência em torno de um diâmetro que não cruza o arco e nem passa por um de seus extremos. A zona esférica possui duas bases, ambas circulares, resultado da interseção dos planos paralelos com a superfície esférica. A altura da zona esférica é igual à distância entre suas bases.

A expressão da área de uma zona esférica pode ser demonstrada utilizando um resultado intermediário da demonstração da área da esfera, onde conclui-se que a área da superfície da esfera limitada por dois planos paralelos é proporcional à distância entre os planos.

Área	Altura
S_{zona}	h
$4\pi R^2$	2R

$$\Rightarrow 2R.S_{zona} = h.4\pi R^2 \Rightarrow \mathbf{S_{zona} = 2\pi Rh}$$

14.4.3. Calota Esférica



Uma calota esférica é o resultado da revolução de um arco de circunferência em torno de um diâmetro cujo único ponto de interseção com o arco é um dos extremos do arco.

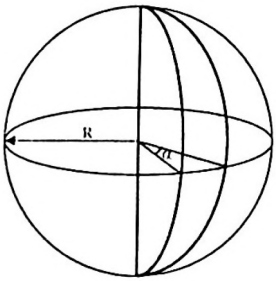
Para caracterizar uma calota basta indicar a sua altura, equivalente à maior distância do centro da base da calota a um ponto da superfície da calota. Na verdade, perceba que a interseção de um plano em uma superfície esférica gera duas calotas esféricas. Na figura ao lado está hachurada apenas uma das calotas, porém é imediato identificar outra de altura 2R – h.

Uma calota esférica também pode ser interpretada como uma zona esférica de uma única base. Para tanto, basta supor que, além do plano α secante à superfície esférica, existe outro plano β, paralelo a α, tangente à superfície esférica. Como a área da porção da superfície esférica limitada por dois planos paralelos é diretamente proporcional à sua altura, segue que

$$S_{calota} = 2\pi Rh$$

14.5. PORÇÕES DE UMA ESFERA

14.5.1. Cunha Esférica



Cunha esférica é região limitada por uma esfera e por um diedro cuja aresta contém o diâmetro da esfera. Para caracterizar uma cunha basta determinar o ângulo α do diedro.

É imediato observar que o volume da cunha esférica é proporcional ao ângulo α. Assim, o volume da cunha esférica é dado por:

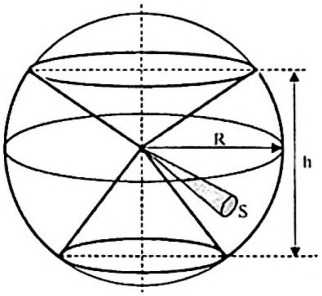
i) Se α medido em graus:

$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360} V_{esfera} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\alpha \pi R^3}{270}$$

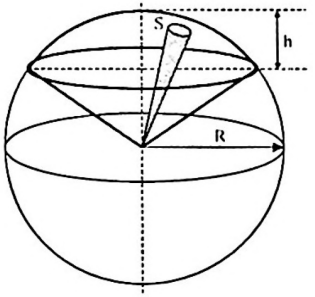
ii) Se α medido em radianos:

$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{2\pi} V_{esfera} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{2\alpha R^3}{3}$$

14.5.2. Setor Esférico



Considere uma circunferência de centro O e, nesta circunferência, destaque um setor circular. Um setor esférico é um sólido gerado pela rotação do setor circular em torno de um diâmetro que não intersecta o arco do setor circular ou cujo único ponto de interseção com o arco é um de seus extremos. O caso em que o diâmetro não intersecta o arco do setor circular está representado na 1ª figura ao lado e o caso em que o diâmetro passa por um extremo do setor circular está representado na 2ª figura.



Outra forma de obter a 1ª figura é fazendo dois planos paralelos intersectarem uma esfera e, da região da esfera limitada pelos planos, retirar os dois cones cujas bases são as interseções dos planos com a esfera e cujos vértices coincidem com o centro da esfera. Na 2ª figura, o setor esférico pode ser obtido reunindo ao menor sólido determinado pela interseção de um plano em uma esfera o cone cuja base é a interseção do plano com a esfera e cujo vértice é o centro da esfera.

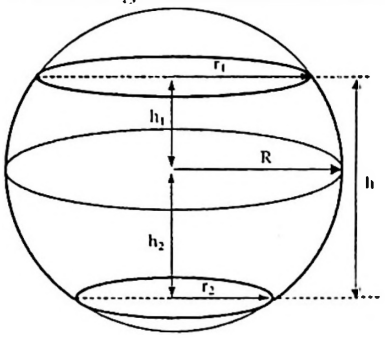
O cálculo do volume do setor esférico para os dois casos citados acima é idêntico. Tome um círculo muito pequeno, de área S, na superfície do setor esférico, como indicado nas figuras ao lado. Cada ponto deste círculo deve ser unido com o centro da esfera original. Como a área S é bem pequena pode-se supor que o sólido gerado pela união de todos os pontos de S com o centro da esfera é um cone de área de base S e altura igual a R. Perceba agora que fazendo a união dos volumes de todos os possíveis cones assim determinados tem-se o volume do setor esférico. Logo:

$$V_{setor} = \sum V_{cone} = \sum \frac{1}{3} S.R = \frac{R}{3} \sum S$$

Na 1ª figura $\sum S$ representa a área da zona esférica correspondente e na 2ª figura $\sum S$ representa a área da calota esférica correspondente ao setor esférico. Assim:

$$V_{setor} = \frac{R}{3}(2\pi Rh) \Rightarrow V_{setor} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

14.5.3. Segmento Esférico de Duas Bases



Segmento Esférico de Duas Bases é a porção do volume de uma esfera limitada por dois planos paralelos, ambos secantes à esfera. As duas bases são círculos, originados da interseção dos planos com a esfera. Suponha que as bases possuam raios r_1 e r_2, que a altura (distância entre os planos paralelos) do segmento seja h e que a esfera original possui raio R.

O volume de um segmento esférico pode ser obtido pela soma dos volumes do setor esférico correspondente à mesmas bases com os cones cujas bases são as interseções dos planos com a esfera e cujos vértices coincidem com o centro da esfera. Portanto:

$$V_{segmento} = \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{\pi}{6}\left[4R^2 h + 2(R^2 - h_1^2)h_1 + 2(R^2 - h_2^2)h_2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[4R^2 h + 2R^2 h_1 - h_1^3 + 2R^2 h_2 - h_2^3\right] = \frac{\pi}{6}\left[4R^2 h + 2R^2 \underbrace{(h_1 + h_2)}_{h} - (h_1^3 + h_2^3)\right] =$$

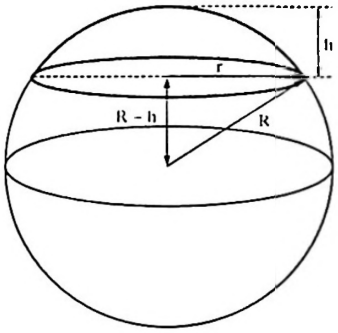
$$= \frac{\pi}{6}\left[6R^2 h - 2\underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)\right] = \frac{\pi h}{6}\left[6R^2 - 2h_1^2 + 2h_1 h_2 - 2h_2^2)\right] =$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[3(R^2 - h_1^2) + 3(R^2 - h_2^2) + (h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{V_{segmento} = \frac{\pi h}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right]}$$

Obs: A demonstração apresentada contempla apenas a situação em que as bases pertencem à hemisférios distintos, ou seja, no caso em que $h = h_1 + h_2$. Pode-se também analisar o caso em que as bases pertencem ao mesmo hemisfério, quando $h = |h_1 - h_2|$, onde chega-se ao mesmo resultado encontrado. Esta outra demonstração fica a cargo do leitor.

14.5.4. Segmento Esférico de Uma Base



Quando um plano secciona uma esfera são determinados dois sólidos, cada um deles denominados de **Segmentos Esféricos de Uma Base.** O raio da esfera original e a máxima distância entre a seção circular e um ponto da superfície esférica (denominada de altura) determinam o segmento esférico de uma base, como ilustrado na figura ao lado.

Relação Fundamental:

No triângulo destacado da figura ao lado tem-se: $R^2 = r^2 + (R-h)^2 = r^2 + R^2 - 2hR + h^2 \Rightarrow \mathbf{r^2 = h(2R-h)}$

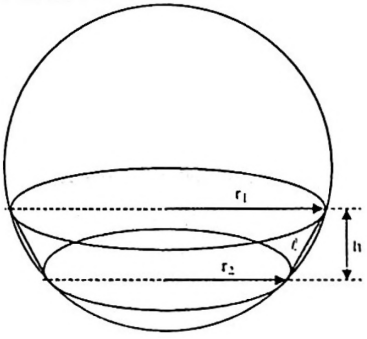
Área Total: $A_{total} = A_{calota} + A_{base} = 2\pi Rh + \pi r^2 = 2\pi Rh + \pi h(2R-h) \Rightarrow$
$\mathbf{A_{total} = \pi h(4R-h)}$

Volume:

Um Segmento Esférico de uma Base pode ser interpretado como um Segmento Esférico de duas Bases onde uma das bases possui raio igual a zero. Assim, fazendo $r_1 = r$ e $r_2 = 0$ segue que:

$$V_{segmento} = \frac{\pi h}{6}\left[3r^2 + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[6hR - 3h^2 + h^2\right] \Rightarrow \mathbf{V_{segmento} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)}$$

14.5.6. Anel Esférico

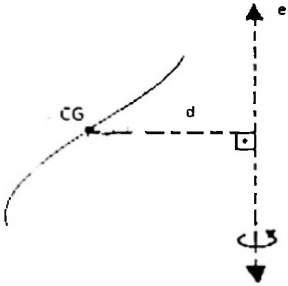


Anel esférico é o sólido determinado pela rotação de um segmento circular em torno de um diâmetro que não intercepta o segmento ou que o intercepta em um de seus extremos. O volume de um anel esférico vale:

$$V_{anel} = V_{segmento\ esférico} - V_{tronco\ de\ cone} =$$
$$= \frac{\pi h}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right] - \frac{\pi h}{3}\left[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right] =$$
$$= \frac{\pi h}{6}\left[r_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[(r_1 - r_2)^2 + h^2\right] \Rightarrow$$
$$\mathbf{V_{anel} = \frac{\pi h \ell^2}{6}}$$

14.6. TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN

São assim denominados porque foram originalmente descobertos pelo matemático grego Pappus de Alexandria e redescobertos na Europa por Paul Guldin.

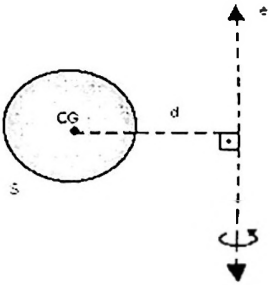


Teorema 1: A área S de uma superfície de revolução é dada por **S = L.C**, onde L é o comprimento da curva geratriz e C é a distância percorrida pelo centróide dessa curva em uma rotação completa.

Sendo d a distância do centro de gravidade (CG) da curva ao eixo tem-se que $C = 2\pi d$.

Se L é o comprimento da curva, segue que:

$$S = 2\pi.d.L$$



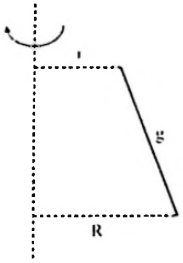
Teorema 2: O volume V de um sólido de revolução é dado por **V = S.C**. Onde S é a área da superfície geratriz e C é a distância percorrida pelo centróide dessa área em uma rotação completa.

Sendo d a distância do centro de gravidade (CG) da superfície ao eixo e S a área da superfície, conclui-se que:

$$V = 2\pi.d.S$$

14.6.1. Aplicações

14.6.1.1. Área Lateral do Tronco de Cone

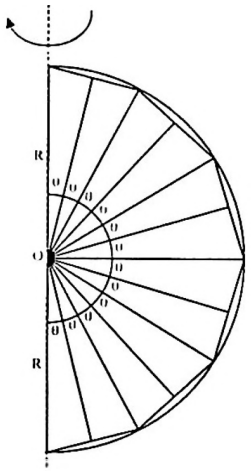


Seja um segmento de reta de comprimento g, cujas extremidades distam r e R de um eixo. A rotação deste segmento em torno do eixo gera um tronco de cone de geratriz g e raios de base r e R. Sabe-se que o centro de gravidade G de um segmento de reta encontra-se em seu ponto médio. Por semelhança de triângulo segue que a distância de G ao eixo vale $x_G = \frac{R+r}{2}$.

Aplicando o teorema de Pappus-Guldin:

$$S = 2\pi.x_G.L = 2\pi\frac{R+r}{2}g \quad \Rightarrow \quad S = \pi g(R+r)$$

14.6.1.2. Área da Superfície Esférica



De modo a aplicar o teorema de Pappus-Guldin para calcular a área de uma superfície esférica, deve-se inicialmente determinar o centro de gravidade de uma semicircunferência de raio R. Esta semicircunferência será rotacionada em torno de um eixo que passa pelos extremos da semicircunferência. Dividindo a semicircunferência em n arcos iguais e unindo os pontos que delimitam os arcos obtém-se n segmentos de reta, conforme indica a figura ao lado, para n = 6. Os centros de gravidade de cada segmento são seus respectivos pontos médios. Além disso, os triângulos determinados pelo centro O e por cada segmento de reta são todos isósceles e congruentes entre si. Traçando-se a altura de cada um destes triângulos divide-se o ângulo raso da semicircunferência em 2n ângulos iguais a θ, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2n}$. O comprimento da altura de cada um dos n triângulos é igual a R.cos θ. Se L_i, $1 \le i \le n$, é o comprimento de cada segmento de reta, tem-se que $L_i = 2R.\text{sen}\,\theta$.

A coordenada x do centro de gravidade dos n segmentos de reta é determinada da seguinte maneira:

$$x_G = \frac{x_1.L_1 + x_2.L_2 + x_3.L_3 + \ldots + x_n.L_n}{\sum L_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{(R.\cos\theta.\text{sen}\theta)(2R.\text{sen}\theta) + (R.\cos\theta.\text{sen}3\theta)(2R.\text{sen}\theta) + \ldots + (R.\cos\theta.\text{sen}(n-1)\theta)(2R.\text{sen}\theta)}{\sum L_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{(2R^2.\cos\theta.\text{sen}\theta)[\text{sen}\theta + \text{sen}3\theta + \text{sen}5\theta + \ldots + \text{sen}(n-1)\theta]}{\sum L_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{(2R^2.\cos\theta.\text{sen}\theta)[2\text{sen}\theta.\text{sen}\theta + 2\text{sen}3\theta.\text{sen}\theta + 2\text{sen}5\theta.\text{sen}\theta + \ldots + 2\text{sen}(n-1)\theta.\text{sen}\theta]}{2\,\text{sen}\theta.\left(\sum L_i\right)} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{(R^2.\cos\theta)[\cos\theta - \cancel{\cos 2\theta} + \cancel{\cos 2\theta} - \cancel{\cos 4\theta} + \cancel{\cos 4\theta} - \cancel{\cos 6\theta} + \ldots + \cancel{\cos 2(n-1)\theta} - \cos 2n\theta]}{\sum L_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{2R^2.\cos\theta.\text{sen}^2 n\theta}{\sum L_i} \Rightarrow x_G = \frac{2R^2.\cos(\pi/2n).\text{sen}^2(\pi/2)}{\sum L_i} \Rightarrow x_G = \frac{2R^2.\cos(\pi/2n)}{\sum L_i}$$

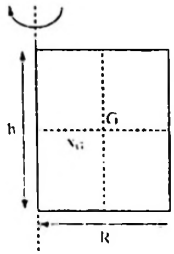
Aumentando-se o valor de n tem-se que a união dos n segmentos de reta se aproxima da semicircunferência. Assim, fazendo n tender ao infinito segue que $0 = \pi/2n$ tende para 0 e $\sum l_i$ tende para o perímetro da semicircunferência. Logo:

$$x_G = \frac{2R^2.1}{\pi R} \Rightarrow x_G = \frac{2R}{\pi}$$

Aplicando o teorema de Pappus-Guldin:

$$S = 2\pi.x_G.L = 2\pi\frac{2R}{\pi}(\pi R) \Rightarrow S = 4\pi R^2$$

14.6.1.3. Volume do Cilindro

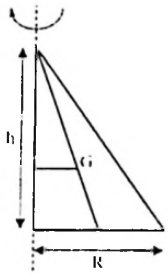


Um retângulo de altura h e largura R será rotacionado em torno de um eixo que passa por um de seus lado iguais a h. Esta rotação gera um cilindro de raio de base igual a R e altura h. O centro de gravidade G de um retângulo é determinado pela interseção dos segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados opostos do retângulo. Assim, tem-se que a distância x_G do centro de gravidade ao eixo vale $x_G = R/2$.

Pelo teorema de Pappus-Guldin:

$$V = 2\pi.x_G.S = 2\pi\frac{R}{2}Rh \Rightarrow V = \pi R^2 h$$

14.6.1.4. Volume do Cone

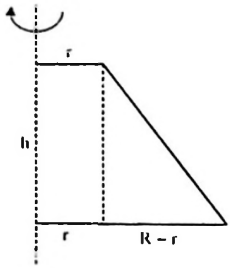


Considere um triângulo retângulo de catetos h e R que será rotacionado em torno do cateto h. Esta rotação gera um cone de altura h e raio de base R. O centro de gravidade G de um triângulo coincide com o baricentro do triângulo. Assim, G divide a mediana em relação a R na razão de 2 para 1. Logo, por semelhança de triângulos segue que: $\frac{x_G}{\frac{R}{2}} = \frac{\frac{2h}{3}}{h} \Rightarrow x_G = \frac{R}{3}$

Pelo teorema de Pappus-Guldin o volume do cone vale:

$$V = 2\pi.x_G.S = 2\pi\frac{R}{3}\frac{Rh}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

14.6.1.5. Volume do Tronco de Cone



Seja um trapézio retângulo de altura h e bases iguais a r e R. Este trapézio será rotacionado sobre o lado que é perpendicular às bases, gerando um tronco de cone. De modo a calcular o centro de gravidade G do trapézio deve-se dividir a figura em um retângulo e um triângulo.

$$x_G = \frac{x_{retângulo}.S_{retângulo} + x_{triângulo}.S_{triângulo}}{S_{trapézio}} =$$

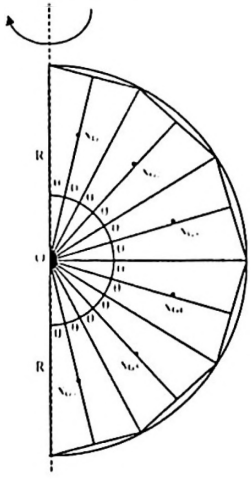
$$\frac{\frac{r}{2}hr + \left(r + \frac{R-r}{3}\right)\frac{(R-r)h}{2}}{S_{trapézio}} = \frac{h}{2}\frac{r^2 + \frac{(R+2r)(R-r)}{3}}{S_{trapézio}} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{h}{2}\frac{3r^2 + R^2 + Rr - 2r^2}{3.S_{trapézio}} \Rightarrow x_G.S_{trapézio} = \frac{h(R^2 + Rr + r^2)}{6}$$

Pelo teorema de Pappus-Guldin o volume do tronco de cone é igual a:

$$V = 2\pi.x_G.S_{trapézio} = 2\pi\frac{h(R^2 + Rr + r^2)}{6} \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

14.6.1.6. Volume da Esfera



A construção proposta neste caso é bastante semelhante à situação do cálculo da área da superfície esférica, com a única diferença que agora tem-se um semicírculo e não uma semicircunferência. Mais uma vez deve-se inscrever no semicírculo n triângulos isósceles congruentes, conforme a figura ao lado, onde $\theta = \frac{\pi}{2n}$.

Sabe-se que o centro de gravidade de um triângulo coincide com seu baricentro. Como os triângulos são isósceles, pode-se determinar o baricentro tomando sobre a altura em relação à base, a partir do vértice O, uma distância igual à 2/3 de seu comprimento.

Seja S_i a área de cada triângulo (note que $S_1 = S_2 = ... = S_n$). A coordenada x do centro de gravidade G do semicírculo é dada por:

$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2 + ... + x_{Gn}.S_n}{\sum S_i} = \frac{S_1(x_{G1} + x_{G2} + ... + x_{Gn})}{\sum S_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{\left(\frac{R^2.\text{sen}2\theta}{2}\right)\left(\frac{2}{3}R.\cos\theta.\text{sen}\theta + \frac{2}{3}R.\cos\theta.\text{sen}3\theta + ... + \frac{2}{3}R.\cos\theta.\text{sen}(n-1)\theta\right)}{\sum S_i} \Rightarrow$$

$$x_G = \frac{2.R^3.\text{sen}\theta.\cos^2\theta\left(\text{sen}\theta + \text{sen}3\theta + ... + \text{sen}(n-1)\theta\right)}{3\left(\sum S_i\right)}$$

O valor de sen θ + sen 3θ + ... + sen (n − 1)θ já foi determinado na demonstração da área da superfície esférica e vale $\frac{\text{sen}^2 n\theta}{\text{sen}\theta}$.

Assim: $x_G = \frac{2R^3.\cancel{\text{sen}\theta}.\cos^2\theta.\text{sen}^2 n\theta}{3\left(\sum S_i\right).\cancel{\text{sen}\theta}} = \frac{2R^3\cos^2\theta.\text{sen}^2(\pi/2)}{3\left(\sum S_i\right)} = \frac{2R^3\cos^2\theta}{3\left(\sum S_i\right)}$

Aumentando-se o valor de n tem-se que a união dos n triângulos se aproxima do semicírculo. Assim, fazendo n tender ao infinito segue que θ = π/2n tende para 0 e $\sum S_i$ tende para a área do semicírculo. Logo:

$$x_G = \frac{2R^3.1^2}{3\frac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow x_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Aplicando o teorema de Pappus-Guldin:

$$V = 2\pi.x_G.S = 2\pi\frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercícios Resolvidos

1) (IME-08) A área de uma calota esférica é o dobro da área do seu círculo base. Determine o raio do círculo base da calota em função do raio R da esfera.

Solução:

Sendo r e h o raio da base e a altura da calota, respectivamente, e R o raio da superfície esférica que origina a calota, tem-se que:

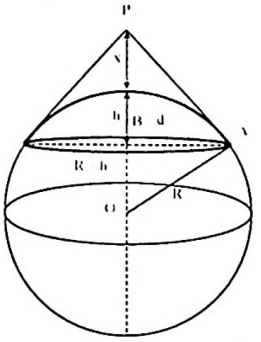
$2\pi Rh = 2\pi r^2 \Leftrightarrow Rh = r^2 = R^2 - (R-h)^2 \Leftrightarrow Rh = 2Rh - h^2 \Leftrightarrow h(h-R) = 0.$

Como $h > 0$: $h = R \Rightarrow r = R$, ou seja, a calota é um hemisfério, e sua base é, portanto, um círculo máximo da esfera, supondo que a calota não é degenerada.

2) (Ciaba-15) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente 1/6 da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a 12800 km.

a) 1300 km. b) 1500 km. c) 1600 km. d) 3200 km. e) 6400 km.

Solução: Alternativa E



Sejam O o ponto está o astronauta, O o centro do planeta, A a interseção da reta tangente com o planeta e B o ponto de interseção do eixo do planeta que passa por P e o plano da base da calota.

$$S_{calota} = \frac{S_{esfera}}{6} \Rightarrow 2\pi Rh = \frac{4\pi R^2}{6} \Rightarrow h = \frac{R}{3}$$

$$\Delta PAO \sim \Delta ABO: \quad \frac{PO}{AO} = \frac{AO}{BO} \Rightarrow \frac{x+R}{R} = \frac{R}{\frac{2R}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{R} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{2} = 6400\,km$$

3) (ITA-05) A circunferência inscrita num triângulo eqüilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$ b) 6 c) 5 d) 4 e) $2\sqrt{5}$

Solução: Alternativa C

Sejam:

R = raio da esfera

r = raio da circunferência inscrita no triângulo eqüilátero.

d = distância entre o centro da esfera e o plano que contém o triângulo.

D = distância entre o centro da esfera e os vértices do triângulo.

Como o triângulo é eqüilátero, o raio da circunferência inscrita é igual a um terço da altura: $r = \frac{1}{3}\frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

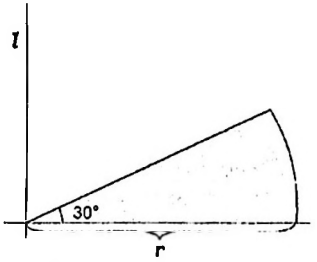
Como o centro da esfera, o centro do triângulo e um dos pontos de tangência da esfera com o triângulo formam um triângulo retângulo:

$R^2 = r^2 + d^2 \Rightarrow 16 = 3 + d^2 \Rightarrow d^2 = 13$.

Como o centro da esfera, o centro do triângulo eqüilátero e um dos vértices do triângulo formam um triângulo retângulo:

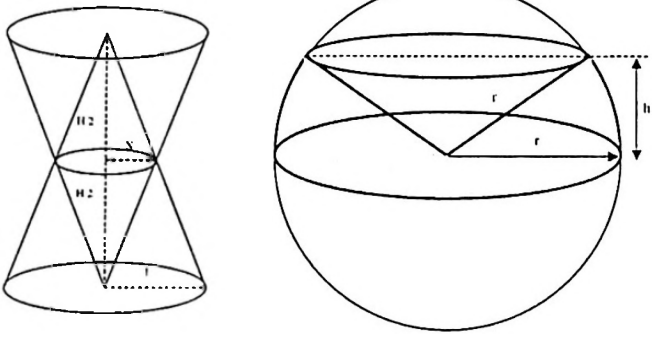
$D^2 = (2r)^2 + d^2 = 12 + 13 = 25 \Rightarrow D = 5$ cm

4) (Escola Naval-13) Considere dois cones circulares retos de altura H e raio da base 1 cm, de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo *l*. O valor de H é, em cm,



a) $(2+\sqrt{3})r^3$ b) $2\sqrt{3}r^3$ c) $\frac{4}{3}r^3$ d) $2r^3$ e) $4r^3$

Solução: Alternativa E



O 1º sólido é formado pela união de dois cones iguais de altura H/2 e raio de base 1/2. Assim: $V_1 = 2\frac{\pi r_1^2}{3}\frac{H}{2} = \frac{\pi H}{12}$

O 2º sólido formado pela rotação é um setor esférico de raio r e altura h dada por:

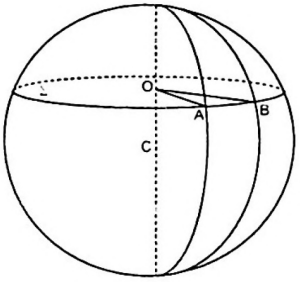
$h = r.\text{sen } 30^\circ = r/2$

Assim: $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 \frac{r}{2} = \frac{\pi r^3}{3}$

Como $V_1 = V_2$: $\frac{\pi 11}{12} = \frac{\pi r^3}{3} \Rightarrow 11 = 4r^3$

5) (ITA-11) Considere uma esfera Ω com centro em C e raio r = 6cm e um plano $\sum$ que dista 2cm de C. Determine a área da interseção do plano $\sum$ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a $\sum$.

Solução:



O plano $\sum$ intersecta a esfera Ω segundo um círculo de raio $\sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ cm e centro O. Esse plano tem em comum com a cunha descrita um setor circular, AOB, de ângulo central igual ao diedro da cunha ($30° = \frac{\pi}{6}$), já que $\sum$ é ortogonal à aresta do diedro. Logo, a área pedida é:

$$S = \frac{\frac{\pi}{6}.\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{8\pi}{3}\text{cm}^2$$

6) (ITA-07) Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume 8/3 cm³, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

Solução:

As arestas do tetraedro formarão pares de diagonais reversas de faces opostas do cubo. Sendo ℓ a medida da aresta do tetraedro, tem-se: $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8}{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}\text{cm}$

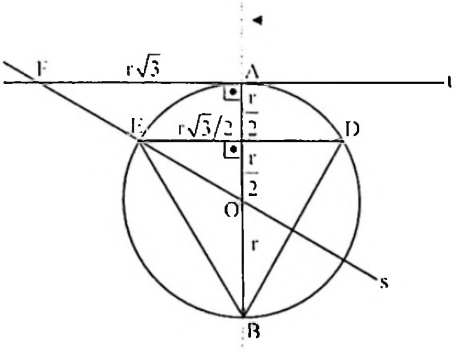
Denominando a a medida da aresta do cubo: $a\sqrt{2} = \ell = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\text{cm}$

Assim, cada uma das oito esferas terá um octante no interior do cubo (e tangenciará outras três). O volume pedido é igual ao do cubo menos o de oito octantes (uma esfera), resultando em: $2^3 - \frac{4}{3}.\pi.1^3 = \left(8 - \frac{4\pi}{3}\right)\text{cm}^3$

7) (ITA-08) Seja C uma circunferência de raio r e centro O e $\overline{AB}$ um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Solução:

Seja P a interseção de $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$. Os triângulos PEO e AFO são semelhantes. Como o lado do triângulo eqüilátero inscrito é $r\sqrt{3}$, segue da semelhança que AF = 2·PE = $r\sqrt{3}$. É conveniente lembrar que o baricentro O do triângulo BDE divide a altura $\overline{BP}$, os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{PO}$, tais que OB = 2·PO.



Quando a região pedida rotaciona em torno de $\overline{AB}$, obtém-se um sólido que é a diferença entre um cone, de vértice O e raio da base $\overline{AF}$, e um setor esférico, originado da revolução do setor circular AOE. Lembrando que o volume de um setor esférico é $\frac{2}{3}\pi r^2 h$, em que h = PA é a projeção do arco AE sobre o eixo de rotação, conclui-se que o volume pedido é

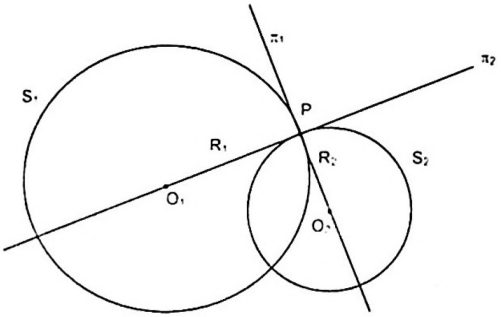
$$V = V_{cone} - V_{setor} = \frac{\pi\left(r\sqrt{3}\right)^2 r}{3} - \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{2} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

8) (ITA-10) As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da interseção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2cm e $\frac{2}{3}$cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Solução:



Sejam S_1 e S_2 as superfícies esféricas consideradas. Considere-se um ponto P em $S_1 \cap S_2$ e os planos π_1 e π_2 respectivamente tangentes a S_1 e a S_2 por P.

A seção reta de qualquer dos diedros formados por π_1 e π_2, passando por P, passa também pelos centros de S_1 e S_2, O_1 e O_2, nesta ordem. Gera-se, assim, o corte representado a seguir:

a) Como o ângulo $O_1\hat{P}O_2$ é reto, tem-se pelo Teorema de Pitágoras que:

$$d(O_1, O_2) = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\text{cm}, \text{ que é a distância entre os centros.}$$

b) Considerando-se as esferas limitadas por S_1 e S_2, a área pedida corresponde à soma das áreas de duas calotas esféricas, uma em cada superfície esférica dada.
Utilizando as notações do item anterior, seja $\overline{PH}$ a altura relativa à hipotenusa no triângulo PO_1O_2, com H em $\overline{O_1O_2}$.

Então: $O_1P^2 = O_1H.O_1O_2 \Rightarrow O_1H = \frac{8}{5}$cm. Também, $O_2H = \frac{9}{10}$cm.

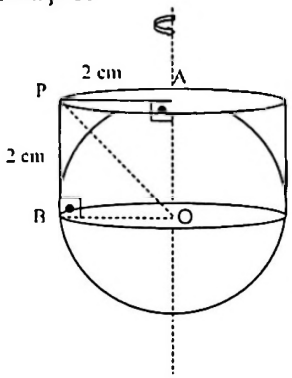
A altura de cada calota citada pode se obtida subtrativamente, a partir dos raios: $2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$cm e $\frac{3}{2} - \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$cm, em S_1 e S_2, nesta ordem. Finalmente, lembrando que a área de uma calota de altura h contida numa superfície esférica de raio R é dada por $2\pi Rh$, área solicitada é dada por: $2\pi(R_1h_1+R_2h_2) = 2\pi\left(2.\frac{2}{5} + \frac{3}{2}.\frac{3}{5}\right) = \frac{17\pi}{5}$cm^2

9) (ITA-12) Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto *P* que dista $2\sqrt{2}$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos *A* e *B*, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Solução:



Inicialmente, note-se que os triângulos OPA e BOP são retângulos, em A e B, respectivamente, e isósceles, com catetos medindo 2 cm, sendo O o centro de ω.

a) A área total da superfície do sólido produzido é dada pela soma das áreas geradas pelas linhas:

$\overline{PA}$: círculo de centro a e raio 2 cm;

$\overline{PB}$: superfície lateral de um cilindro de geratriz e raio da base 2 cm;

$\overset{\frown}{AB}$: (superfície do hemisfério de centro O e raio 2 cm).

Portanto, a área procurada vale:

$S_T = \pi.2^2 + 2\pi.2.2 + 2.\pi.2^2 = 20\pi$ cm^2

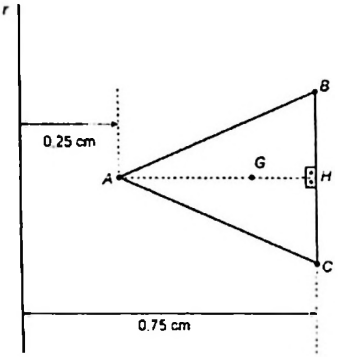
b) O volume solicitado é a diferença entre os volumes do cilindro e do hemisfério já mencionados. Então, o volume é:

$$V = \pi.2^2.2 - \frac{2}{3}.\pi.2^3 = \frac{8\pi}{3}\text{cm}^3$$

10) (ITA-14) Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista 0,25 *cm* do vértice A e 0,75 *cm* da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

A ( ) $\frac{9}{16}$ B ( ) $\frac{13}{96}$ C ( ) $\frac{7}{24}$ D ( ) $\frac{9}{24}$ E ( ) $\frac{11}{96}$

Solução: Alternativa C



Seja H o ponto médio de $\overline{BC}$. Como o triângulo ABC é isósceles, $\overline{AH}$ é altura. Sendo $\overline{BC}$ paralelo ao eixo, tem-se que $AH = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

Daí, por Pitágoras:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{\pi^2+1}{4\pi^2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\pi}.$$

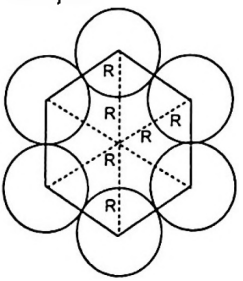
Pelo 2º Teorema de Pappus-Guldin, o volume pedido é:

$V = 2\pi.S.d$, em que S é a área do triângulo e d á a distância do baricentro do mesmo ao eixo. Como $S = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi}$ e $d = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}$ (pelo Teorema do Baricentro), segue que:

$$V = 2\pi.\frac{1}{4\pi}.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{24}\ cm^3$$

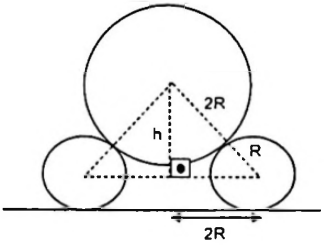
11) (ITA-14) Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Solução:



Sabendo-se que o hexágono é regular, os triângulos formados pela união dos centros das circunferências e o centro do hexágono são equiláteros, logo sua diagonal maior mede 4R.

Após a 7ª esfera ser colocada, a união do seu centro com os centros das demais esferas forma uma pirâmide regular de aresta lateral 3R.



Utilizando o teorema de Pitágoras, conclui-se que a altura da pirâmide(h) é:

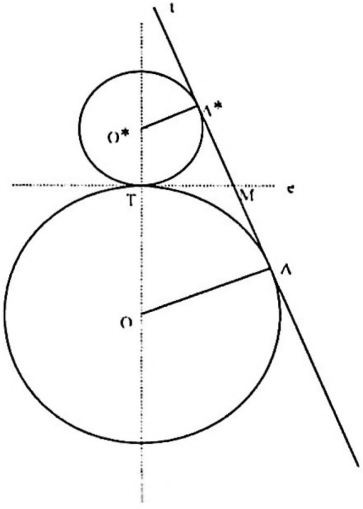
$$(3R)^2 = h^2 + (2R)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{5R^2} = R\sqrt{5}$$

Logo, o centro da 7ª esfera está a uma altura (H) dada por:

$$H = h + R \;\Rightarrow\; H = R\sqrt{5} + R \;\Rightarrow\; H = R.\left(\sqrt{5}+1\right)$$

12) (IME-07) Sejam C e C* dois círculos tangentes exteriores de raios r e r* e centros O e O*, respectivamente, e seja t uma reta tangente comum a C e C* nos pontos não coincidentes A e A*. Considere o sólido de revolução gerado a partir da rotação do segmento AA* em torno do eixo OO*, e seja S a sua correspondente área lateral. Determine S em função de r e r*.

Solução:



Pelo teorema de Guldin, a área pedida é tal que:

$$S = 2\pi.AA^*.d,$$

em que d é a distância de M, médio de AA*, Ao eixo $\overline{OO^*}$.

No trapézio retângulo AA*O*O, de bases r e r* e com um lado oblíquo OO*, pode-se encontrar AA* por:

$$(r + r^*)^2 = (r - r^*)^2 + AA^{*2} \Leftrightarrow AA^* = 2\sqrt{rr^*}$$

Seja e o eixo radical de C e C*. Trata-se de uma reta perpendicular a $\overline{OO^*}$, pelo ponto de Tangência T. O eixo encontra t em M, uma vez que M tem iguais potências em relação aos círculos. Portanto:

$$d = MT = MA = MA^* = \frac{AA^*}{2}$$

Finalmente: $S = 2\pi.\ 2\sqrt{rr^*}.\sqrt{rr^*} = 4\pi rr^*$

Exercícios de Vestibular

1) (Unifei-10) Um cone de revolução e uma esfera são sólidos equivalentes e a altura do cone mede 1/3 do raio da esfera. Qual é a relação existente entre o raio desse cone (r) e o raio da esfera (R)?

2) (UFBA-99) Duas esferas metálicas maciças, com raio $r_1 = 3$ cm e $r_2 = 6$ cm, são fundidas e molda-das em forma de um cone circular reto C, com altura igual a 12 cm. Sendo:

- C_1 o cilindro circular reto de mesma base e altura que C;
- P a pirâmide quadrangular regular reta de base circunscrita à base de C e mesma altura que C;

calcule o comprimento da circunferência de raio R igual ao quádruplo da razão entre os volumes de C_1 e P, indicando, de modo completo, toda a resolução da questão.

3) (UFC-08) Duas esferas de raios iguais a r são colocadas no interior de um tubo de ensaio sob a forma de um cilindro circular reto de raio r da base e altura 4r. No espaço vazio compreendido entre as esferas, a superfície lateral e as bases, superior e inferior, do tubo de ensaio, coloca-se um líquido. Então, o volume desse líquido é:

a) $2\pi r^3/3$ b) $3\pi r^3/4$ c) $4\pi r^3/3$ d) $2\pi r^3$ e) $4\pi r^3$

4) (UFC-06) Um vaso em forma de cilindro circular reto tem medida de raio da base 5 cm, altura 20 cm e contém água até a altura de 19 cm (despreze a espessura das paredes do vaso). Assinale a alternativa na qual consta o maior número de esferas de aço, de 1 cm de raio cada, que podemos colocar no vaso a fim de que a água não transborde.

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

5) (Ucpel-07) Enche-se um tubo cilíndrico de altura h = 20 cm e raio de base r = 2 cm com esferas tangentes ao cilindro e tangentes entre si. O volume interior ao cilindro e exterior às esferas vale

a) $102\pi/3$ cm^3 b) $80\pi/3$ cm^3 c) 40π cm^3 d) $160\pi/3$ cm^3 e) 80π cm^3

6) (UFPR-11) Uma jarra de vidro em forma cilíndrica tem 15 cm de altura e 8 cm de diâmetro. A jarra está com água até quase a borda, faltando 1 cm de sua altura para ficar totalmente cheia.

a) Se uma bolinha de gude de 2 cm de diâmetro for colocada dentro dessa jarra, ela deslocará que volume de água?

b) Quantas bolinhas de gude de 2 cm de diâmetro serão necessárias para fazer com que a água se desloque até a borda superior da jarra?

7) (UFRN-12) Um artesão produz peças ornamentais com um material que pode ser derretido quando elevado a certa temperatura. Uma dessas peças contém uma esfera sólida e o artesão observa que as peças com esferas maiores são mais procuradas e resolve desmanchar as esferas menores para construir esferas maiores, com o mesmo material. Para cada 8 esferas de 10cm de raio desmanchada, ele constrói uma nova esfera. O raio das novas esferas construídas mede
A) 80,0cm B) 14,2cm C) 28,4cm D) 20,0cm.

8) (UEL-10) Uma bola esférica de 16 cm de diâmetro está flutuando em uma piscina. A bola está com 4 cm de seu raio abaixo do nível da água. Qual é o raio da calota esférica imersa na água?
a) $2\sqrt{2}$ cm b) $3\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm d) 6 cm e) 8 cm

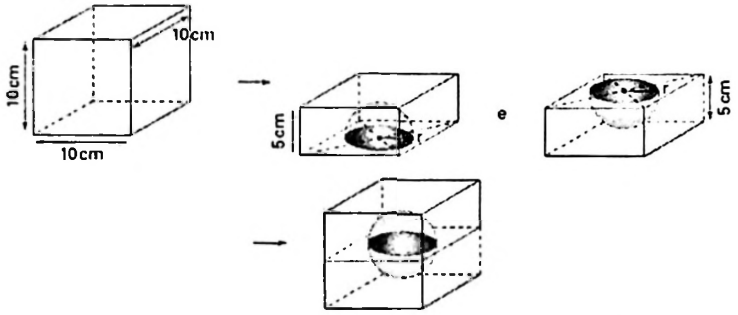
9) (UEM-13) Considere uma esfera, um cilindro circular reto e um cone, todos com o mesmo volume. Além disso, a altura do cilindro é igual à metade da altura do cone, e a altura do cone é igual ao raio da esfera. Assinale o que for correto.
01) O raio da base do cone é menor do que o raio da base do cilindro.
02) O raio da base do cone é igual ao dobro do raio da esfera.
04) A altura do cilindro é igual ao diâmetro da esfera.
08) A área da superfície da esfera é igual ao triplo da área da base do cilindro.
16) Se o raio da esfera mede $\sqrt{5}$ cm, a geratriz do cone mede 5 cm.

10) (Ucpel-10) Um cilindro circular reto de 6 cm de raio da base e 30 cm de altura, contém água até a metade de sua altura. Se colocarmos neste cilindro uma esfera de raio 3 cm, o nível da água sobe até
a) 27 cm b) 18 cm c) 16 cm d) 22,5 cm e) 21 cm

11) (FGV-08) As alturas de um cone circular reto de volume P e de um cilindro reto de volume Q são iguais ao diâmetro de uma esfera de volume R. Se os raios das bases do cone e do cilindro são iguais ao raio da esfera, então, P – Q + R é igual a
a) 0 b) $2\pi/3$ c) π d) $4\pi/3$ e) 2π

12) (Unesp-13) Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4cm de raio, de modo que seus centros ficassem

localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.

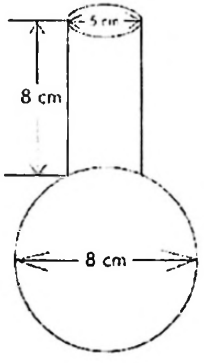


Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de $0{,}85 g/cm^3$ e admitindo $\pi \equiv 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é
A) 636. B) 634. C) 630. D) 632. E) 638.

13) (Ciaba-95) Duas esferas maciças de raios r_1 e r_2 ($r_2 > r_1$) são fundidas e com o material obtido é construído um cone circular reto maciço de altura $r_2 - r_1$. O raio da base do cone mede:

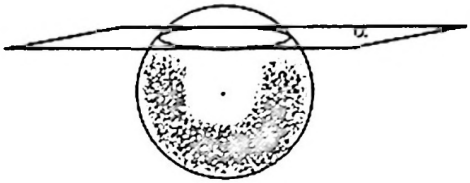
a) $2(r_1 + r_2)$ b) $2\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ c) $2\sqrt{r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2}$ d) $(r_1 + r_2)/2$ e) $r_2 - r_1$

14) (Ucpel-06) A figura abaixo representa o corte longitudinal de uma garrafa. O bojo é uma esfera e o gargalo é um cilindro cujas dimensões são as da figura.



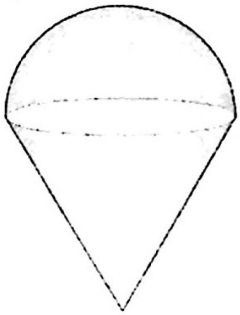
Então o volume da garrafa é
a) $406\pi/3\ cm^3$ b) $412\pi/3\ cm^3$ c) $421\pi/3\ cm^3$ d) $556\pi/3\ cm^3$ e) $565\pi/3\ cm^3$

15) (Furg-09) A figura mostra um círculo de área igual a $16\pi\ cm^2$ obtido pela secção de um plano a com uma esfera. Se a distância do centro da esfera até o plano α é igual a 3cm, então, o volume da esfera é



a) $480\pi/3$ cm^3 b) $240\pi/3$ cm^3 c) $256\pi/3$ cm^3 d) $500\pi/3$ cm^3 e) $625\pi/3$ cm^3

16) (UFPE-12) O sólido ilustrado abaixo é limitado por um hemisfério e um cone. Sejam r o raio do hemisfério (que é igual ao raio da base do cone) e h a altura do cone. Acerca dessa configuração, analise a veracidade das afirmações seguintes:



0-0) se h = 2r o volume do hemisfério e o do cone serão iguais.
1-1) se h = 2r a área lateral do cone será igual a área do hemisfério (sem incluir o círculo da base).
2-2) mantendo o valor de h e duplicando o valor de r o volume total duplicará.
3-3) duplicando os valores de h e r a área total do sólido ficará multiplicada por quatro.
4-4) para r = 3 e h = 4, a área total do sólido é 33π.

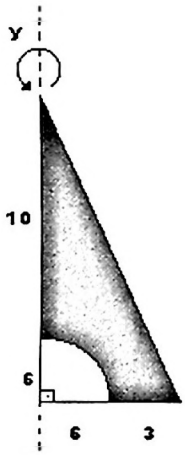
17) (UEMG-13) Em uma pequena cidade do interior de Minas, é realizado, semestralmente, um corte de água durante um dia. Nesse dia, é feita uma manutenção na rede de água, e cada morador aproveita para lavar sua caixa d'água. A cidade possui 156 casas, cada uma delas com uma caixa d'água. As caixas são de diferentes formas:

- 33 delas são no formato de uma semi-esfera de raio 2 m;
- 62 são no formato de um cubo de aresta 10 dm;
- as restantes são no formato de um paralelepípedo de 10 dm x 20 dm x 50 dm.

Sendo assim, o prefeito da cidade resolveu montar um projeto para que, nesse dia, a prefeitura abastecesse todas as casas.
O projeto consiste em construir, no alto da cidade, uma grande caixa d'água no formato de um cilindro que consiga abastecer todas as 156 caixas d'água da

pequena cidade, utilizando caminhões-pipa. No projeto, ficou determinado que a medida do raio da caixa d'água deve ser de 4 metros.
Com base nas informações anteriores, DETERMINE a altura h da caixa d'água a ser construída pela prefeitura, capaz de abastecer, ou seja, encher completamente todas as caixas d'água da cidade, considerando que não houve perda de água na transferência para o caminhão e para as caixas e que o cilindro construído ficará vazio após abastecer toda a cidade. Utilize $\pi = 3$.
A) 20 m. B) 22 m C) 28 m D) 25 m

18) (UFPA-98) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da figura hachuriada em torno do eixo y

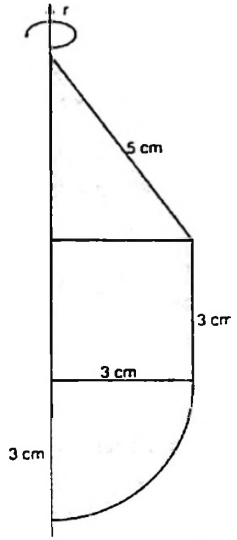


19) (UEPB-07) A área de um círculo máximo de uma esfera vale 81π dm^2. O volume dessa esfera é igual a:
a) 972π dm^3 b) 2916π dm^3 c) 729π dm^3 d) 263π dm^3 e) 324π dm^3

20) (UEG-05) Dona Maria fez um único "brigadeirão" em forma de esfera para seus 8 netos. Para que cada um ficasse com a mesma quantidade de doce, resolveu fazer a divisão em 8 brigadeiros pequenos, todos também em forma de esferas. Que fração do raio do "brigadeirão" deverá ser o raio da esfera de cada um dos 8 brigadeiros?

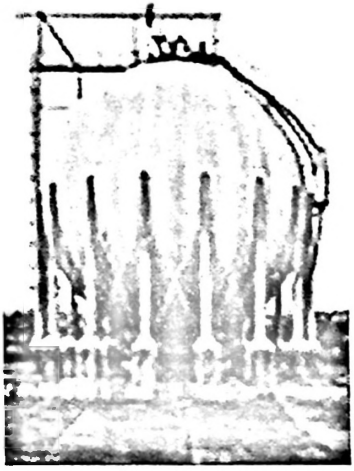
21) (UFU-09) Dispõe-se de um cilindro maciço circular reto, feito de alumínio, cujo raio da base mede 4 cm e a altura 10 cm. Esse cilindro será derretido e com o material fundido serão fabricadas esferas de aço de raio 2 cm. Supondo que nesse processo não ocorra perda de material, então o número de esferas a ser fabricadas, a partir do cilindro dado, é igual a
A) 13 B) 15 C) 14 D) 16

22) (UFPel-07) Todo sólido obtido através do movimento de rotação completa de uma região plana em torno de uma reta, sendo ambas no mesmo plano, é chamado sólido de revolução. Um giro completo na região hachurada, em torno da reta r, determina um sólido de revolução. É correto afirmar que o volume desse sólido é de



a) 75π cm^3. b) 81π cm^3. c) 57π cm^3. d) 99π cm^3. e) 72π cm^3.

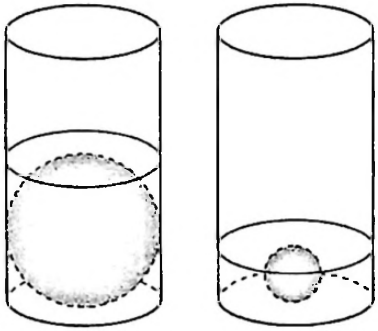
23) (UFU-11) Atualmente, ocorre um crescimento mundial no uso de gás natural. Segundo técnicos da área, entre os tanques utilizados para o armazenamento de gás, o de formato esférico é o mais recomendado (ver figura abaixo). Como qualquer tanque, esse também necessita ser inspecionado periodicamente para a prevenção de acidentes. Em geral, os tanques de armazenamento são pintados externamente com tinta primária que inibe a corrosão. Sabe-se que 1 litro de tinta rende 6 m^2. Se cada tanque de uma refinaria for considerado como uma esfera de raio 2 m (desprezando as hastes de suporte vistas na figura), é correto afirmar que a quantidade máxima de tanques que podem ser pintados completamente, utilizando-se 200 litros de tinta, está entre



a) 18 e 21 b) 13 e 17 c) 22 e 26 d) 27 e 30

Sugestão: Utilize a aproximação $\pi = 3{,}1$.

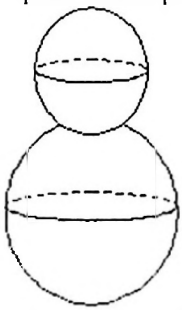
24) (UFAL-08) Um reservatório, na forma de um cilindro reto, está parcialmente preenchido com líquido. O volume de líquido é tal que, ao se colocar uma esfera sólida, de mesmo raio que o raio da base do cilindro, no interior do cilindro, a altura do líquido atinge a altura do diâmetro da esfera, como ilustrado a seguir, à esquerda. Existe uma outra esfera sólida, de raio menor que a anterior, que, quando repousa na base do cilindro contendo o mesmo volume de líquido de antes, a altura do líquido fica igual ao diâmetro da esfera, como ilustrado na figura abaixo, à direita.



Se o raio da esfera maior é 2, qual o raio da esfera menor?

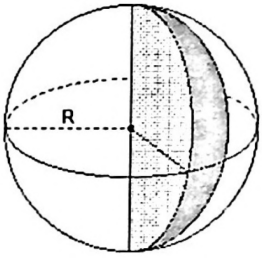
a) $\sqrt{3}-1$ b) $\sqrt{2}-1$ c) $\sqrt{5}/3$ d) 1,5 e) 0,8

25) (UFRJ-98) Ping Oin recolheu 4,5m^3 de neve para construir um grande boneco de 3m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul. O boneco será composto por uma cabeça e um corpo, ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura a seguir. Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou π por 3.



Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

26) (Unesp-03) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.

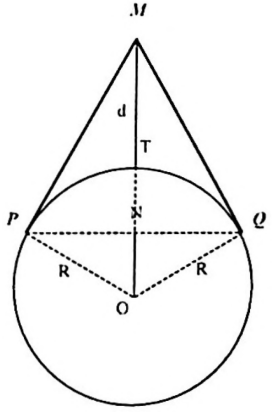


Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

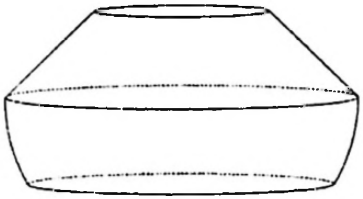
b) quantos cm^2 de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia

27) (UFPA-00) Qual a área da porção do globo terrestre vista por um astronauta situado a uma altura igual a um terço do raio R desse globo, acima do solo, conforme a figura a seguir?



28) (UFES-13) A) Considere um cone circular reto C e um tronco de cone circular reto T, com a mesma altura de C, cuja base maior coincide com a base de C. Calcule V_T/V_C em função de q, onde q = r/R , r e R são os raios da base menor e da base maior de T, respectivamente, e V_T e V_C são os volumes de T e C, respectivamente.

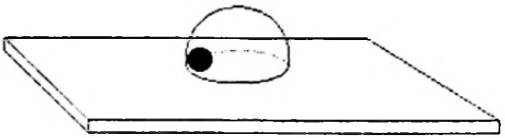
B) Um pote de creme cosmético tem forma geométrica limitada pelas quatro superfícies seguintes (veja esboço do pote):



· dois círculos horizontais, distantes 2 cm entre si: um inferior e outro superior, sendo o superior de raio 1 cm;
· a superfície lateral de um tronco de cone circular reto, de altura 1 cm, tendo como base menor o círculo superior descrito acima e base maior um círculo de raio 2 cm;
· uma região de uma esfera de raio 2 cm cujo centro coincide com o centro da base maior do tronco de cone. Essa região é limitada por um equador da esfera, que coincide com a circunferência da base maior do tronco de cone, e pela circunferência do círculo inferior mencionado acima. Calcule o volume desse pote.

29) (Insper-10) Num restaurante, os garçons colocam todas as rolhas dos vinhos que abrem e servem aos seus clientes numa taça de vidro, que eles costumam chamar de "aquário de rolhas". O aquário tem a forma de uma esfera de 60 cm de diâmetro, com um furo na parte de cima, por onde eles colocam as rolhas.
Como a taça estava cheia, o gerente queria saber quantas rolhas havia ali. Lembrando-se do banho de Arquimedes, ele fez o seguinte:
• Colocou água na taça até quase transbordar, preenchendo totalmente o volume da taça com água no espaço em que não havia rolha, sem também deixar nenhuma rolha subir pelo furo.
• Observou que cada rolha tinha formato cilíndrico, de diâmetro aproximadamente igual a 1,5cm e altura igual a 3 cm.
• Para colocar a água, ele usou uma panela cilíndrica, de diâmetro 30 cm e altura 20 cm, tendo sido necessárias exatamente cinco panelas completamente cheias de água para encher o aquário.
O número que mais se aproxima do total de rolhas na taça é
(Observação: admita que a água absorvida pelas rolhas é desprezível.)
a) 800 b) 1600 c) 8000 d) 16.000 e) 80.000.

30) (UERJ-05) Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:
a) a maior área, em cm^2, pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;
b) o volume, em cm^3, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

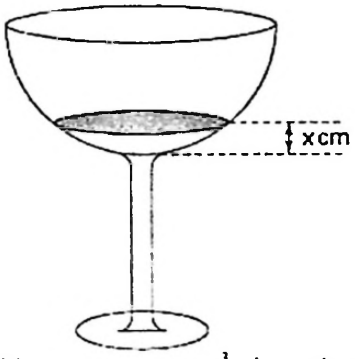
31) (Fuvest-09) Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semi-esfera de raio r; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio 2r e altura h; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio x e altura h. Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão x/h é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

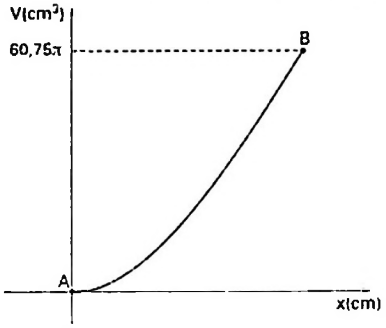
32) (Fuvest-11) A esfera ε, de centro O e raio $r > 0$, é tangente ao plano α. O plano β é paralelo a α e contém O. Nessas condições, o volume da pirâmide que tem como base um hexágono regular inscrito na intersecção de ε com β e, como vértice, um ponto em α, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}r^3}{4}$ b) $\frac{5\sqrt{3}r^3}{16}$ c) $\frac{3\sqrt{3}r^3}{8}$ d) $\frac{7\sqrt{3}r^3}{16}$ e) $\frac{\sqrt{3}r^3}{2}$

33) (Insper-12) A taça desenhada na figura tem a forma de semiesfera e contém líquido até uma altura de xcm.



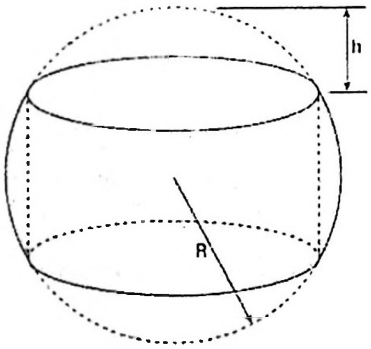
O volume de líquido contido na taça, em cm^3, depende da altura atingida por esse líquido, em cm. O gráfico a seguir mostra essa dependência, sendo que os pontos A e B correspondem à taça totalmente vazia e totalmente cheia, respectivamente.



De acordo com os dados do gráfico, a taça tem a forma de uma semiesfera cujo raio mede

a) 3cm. b) 3,5cm. c) 4cm. d) 4,5cm. e) 5cm.

34) (Unicamp-10) Uma peça esférica de madeira maciça foi escavada, adquirindo o formato de anel, como mostra a figura ao lado. Observe que, na escavação, retirou-se um cilindro de madeira com duas tampas em formato de calota esférica. Sabe-se que uma calota esférica tem volume $V_{cal} = \pi h^2(3R - h)/3$, em que h é a altura da calota e R é o raio da esfera. Além disso, a área da superfície da calota esférica (excluindo a porção plana da base) é dada por $A_{cal} = 2\pi Rh$.



Atenção: não use um valor aproximado para π.

a) Supondo que h = R/2, determine o volume do anel de madeira, em função de R.

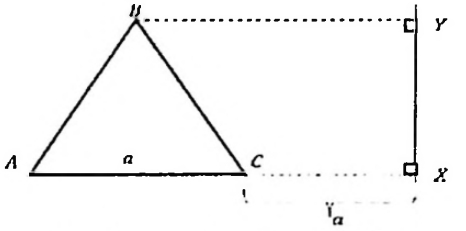
b) Depois de escavada, a peça de madeira receberá uma camada de verniz, tanto na parte externa, como na interna. Supondo, novamente, que h = R/2, determine a área sobre a qual o verniz será aplicado.

35) (EsPCEx-95) Um plano corta uma esfera de raio *R* de modo que a área da menor calota formada seja igual a *m* vezes a área lateral do cone cujo vértice é o centro da esfera e cuja base é o círculo que serve de base à calota. A distância d do centro da esfera ao plano é dada por:

a) $d = R\dfrac{4-m^2}{4+m^2}$ b) $d = R\left(\dfrac{4-m}{4+m}\right)^2$ c) $d = R\dfrac{4+m^2}{4-m^2}$

d) $d = R\left(\dfrac{4+m}{4-m}\right)^2$ e) $d = R\dfrac{m^2-4}{m^2+4}$

36) (Escola Naval-15) A área da superfície de revolução gerada pela rotação do triângulo equilátero ABC em torno do eixo XY na figura abaixo, em unidade de área é



a) $9\pi a^2$ b) $9\sqrt{2}\pi a^2$ c) $9\sqrt{3}\pi a^2$ d) $6\sqrt{3}\pi a^2$ e) $6\sqrt{2}\pi a^2$

37) (Ciaba-10) Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a 2 dm, foram colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode-se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale

a) 4/5 b) 1/2 c) 1/8 d) 1/5 e) 2/5

38) (Ciaba-12) Um recipiente na forma de um cilindro circular reto contém um líquido até um certo nível. Colocando-se nesse recipiente uma esfera, o nível do líquido aumenta 2 cm. Sabendo-se que o raio do cilindro mede $3\sqrt{2}$ cm, conclui-se que o raio da esfera, em cm, mede:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

39) (Escola Naval-03) Com centros nos vértices de um cubo, traçamos oito esferas congruentes cujos raios são iguais à metade da aresta desse cubo. Com centro no ponto de intersecção das diagonais do mesmo cubo, traçamos duas esferas com raios R e r (R > r) tangentes às oitos esferas anteriores. A razão $\frac{R}{r}$ é igual a

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $1+\sqrt{3}$ d) $2+\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

40) (ITA-75) Consideremos uma esfera de raio = 1 cm e um ponto P fora desta esfera. Sabemos que a distância deste ponto P à superfície da esfera mede 2 cm. Qual é a razão K entre a área da esfera e da calota visível do ponto P?

a) K = 1 b) K = 2 c) K = 3 d) K = 5/2 e) nda

41) (ITA-83) Ao girarmos o gráfico da função

$$f(x)=\begin{cases} x; & x\in[0,1] \\ \sqrt{2x-x^2}; & x\in(1,2] \end{cases}$$

em torno do eixo das abcissas (eixo dos x), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:

a) $\pi/3$ b) $\pi/2$ c) π d) 2π e) 3π

42) (ITA-90) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades $x - y \leq 1$, $x + y \geq 1$ e $(x-1)^2 + y^2 \leq 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:

a) $\frac{4}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$ d) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ e) n.d.a.

43) (ITA-91) Considere a região ao plano cartesiano xy definido pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta $y + x + 1 = 0$, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{9}$ e) n.d.a.

44) (ITA-05) Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

a) 4 b) 3 c) 6 d) 5 e) 7

45) (IME-66) Quatro esferas de raio R são tangentes entre si e três delas estão apoiadas num plano horizontal. A altura do centro da esfera mais alta referida a esse plano é 26,32 cm. Calcular o raio das esferas.

46) (IME-68) Considera-se três esferas tangentes a um plano P em três pontos A, B, C e tangentes duas a duas. Calcular os raios x, y, z das esferas em função das distâncias mútuas a, b, c, dos pontos A, B, C.

47) (IME-72) Um retângulo ABCD de lados $AB = 3\sqrt{2}$ m e $BC = \sqrt{6}$ m, gira em torno de um eixo, coplanar e externo ao retângulo, que passa por A e faz um ângulo de 30° com o lado AB. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação do retângulo.

48) (IME Militares-10) Um segmento circular de 45°, em um círculo de raio r, é submetido a uma revolução completa em torno do diâmetro que contém um dos extremos de sua corda. Calcule o volume do sólido gerado por esta revolução.

49) (ITA-89) Justapondo-se as bases de dois cones retos e idênticos de altura H, forma-se um sólido de volume v. Admitindo-se que a área da superfície deste sólido é igual a área da superfície de uma esfera de raio H e volume V, a razão v/V vale:

a) $\frac{\sqrt{11}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{19}-1}{4}$

50) (EsPCEx-15) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

a) $\frac{2}{3}R$ b) $\frac{3}{4}R$ c) $\frac{4}{9}R$ d) $\frac{1}{3}R$ e) $\frac{9}{16}R$

51) (IME-46) A que distância do centro se deve cortar uma esfera E, por um plano secante P, de modo que o volume da esfera seja igual a quatro vezes a soma dos volumes de dois cones, tais que:

(i) A base comum seja a interseção de P com E.
(ii) As geratrizes de um deles sejam tangentes à esfera.
(iii) O vértice do outro coincida com o centro da esfera.

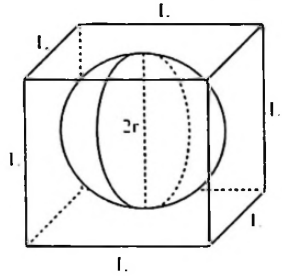
Exprimir a distância pedida em função do raio da esfera.

52) (IME-55) Um círculo máximo de uma esfera de raio R serve de base de um cone de revolução de altura H. A interseção das superfícies dos dois sólidos determina no cone uma seção paralela à base. Determinar H, em função de R, de modo que a razão do volume do cone destacado por essa seção para o volume do tronco de cone resultante seja igual a $\frac{64}{61}$.

Inscrição de Sólidos

Um sólido A está inscrito em um sólido B se A estiver totalmente no interior de B e se A possuir a maior quantidade possível de elementos (vértices, arestas ou faces) em comum ou tangenciando a superfície interna de B. Se o sólido A está inscrito no sólido B então afirmar-se que o sólido B está circunscrito ao sólido A. Os casos mais comuns de inscrição de sólidos estão analisados em detalhes nos itens seguintes.

Esfera Inscrita em um Cubo

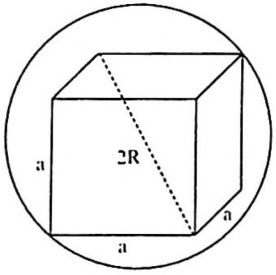


A superfície da esfera tangencia as 6 faces do cubo, em seus centros geométricos. O diâmetro da esfera coincide com a aresta do cubo:

$$L = 2r$$

onde L é a aresta do cubo e r é o raio da esfera

Cubo Inscrito em uma Esfera

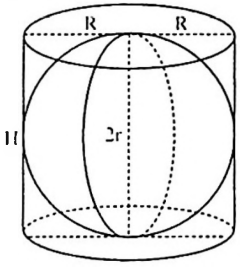


Os oito vértices do cubo pertencem à superfície da esfera. Pela simetria, a diagonal principal do cubo passa pelo centro da esfera, fazendo com que esta diagonal coincida com um diâmetro da esfera:

$$2R = \sqrt{3}a$$

onde R é o raio de esfera e a é a aresta do cubo

Esfera Inscrita em um Cilindro Reto

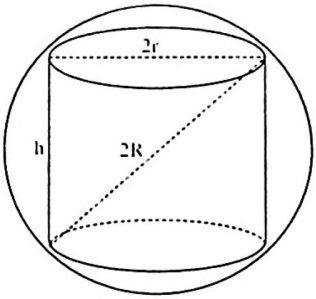


A esfera tangencia as bases do cilindro em seus centros. A tangência da esfera com a superfície lateral do cilindro gera uma circunferência paralela às bases do cilindro. Assim, tem-se as seguintes relações:

$$H = 2r \text{ e } R = r$$

onde H é a altura do cilindro, r é o raio da esfera e R é o raio da base do cilindro

Cilindro Reto Inscrito em uma Esfera

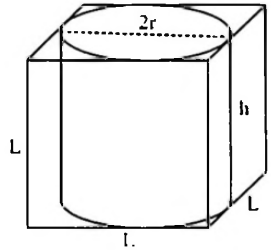


Todos os pontos das circunferências das bases do cilindro pertencem à superfície esférica. A altura do cilindro, um diâmetro de uma das bases e o segmento de reta que une dois pontos diametralmente opostos das bases formam um triângulo retângulo, conforme destacado na figura. Assim, segue por Pitágoras:

$$h^2 + 4r^2 = 4R^2$$

onde h é a altura do cilindro, R é o raio da esfera e r é o raio das bases do cilindro

Cilindro Reto Inscrito em um Cubo

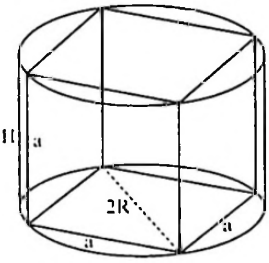


A superfície lateral do cilindro é tangente à quatro faces do cubo. As duas bases do cilindro pertencem às outras faces, que são opostas, do cubo. Neste caso, pode-se concluir que:

$$L = 2r = h$$

onde L é a aresta do cubo, r é o raio da base do cilindro e h é a altura do cilindro.

Cubo Inscrito em um Cilindro Reto

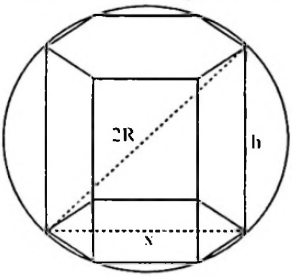


A superfície lateral do cilindro contém 4 arestas do cubo e duas faces opostas do cubo pertencem às bases do cilindro. Deste modo:

$$H = a \quad e \quad 2R = \sqrt{2}a$$

onde R é o raio da base do cilindro, a é a aresta do cubo e H é a altura do cilindro

Prisma Reto Regular Inscrito em uma Esfera

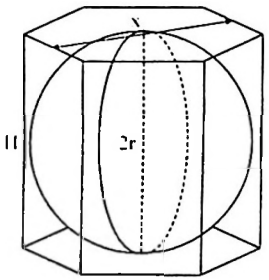


Todos os vértices do prisma pertencem à superfície esférica. Se o prisma for regular e o número de vértices do prisma for par, pode-se unir dois vértices de bases diferentes por um diâmetro da esfera. Esse segmento, a altura do prisma e um diâmetro maior da base do prisma formam um triângulo retângulo:

$$h^2 = x^2 + 4R^2$$

onde h é a altura do prisma, R é o diâmetro da esfera e x é a diagonal maior da base do prisma

Esfera Inscrita em um Prisma Reto Regular



A esfera é tangente às faces do prisma em seus centros de gravidade. Tem-se a relação:

$$H = 2r$$

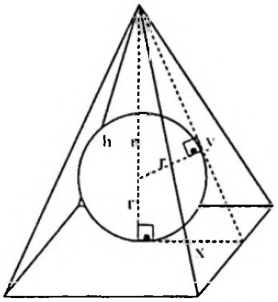
onde H é a altura do prisma e r é o raio da esfera.

Se o prisma for regular e o número de lados da base for par tem-se a relação

$$H = 2r = 2x$$

onde x é a distância entre lados paralelos da base

Esfera Inscrita em uma Pirâmide Reta

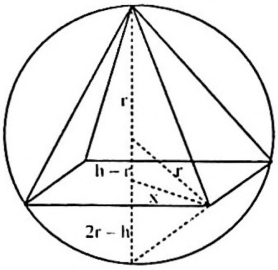


A esfera é tangente às faces em seus centros de gravidade. A reta que une o centro da esfera ao ponto de tangência de uma das faces é perpendicular à mesma. Por semelhança e por Pitágoras segue que

$$\frac{r}{h-r} = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad y^2 = x^2 + h^2$$

onde y é a altura da face lateral, x é o apótema da base da pirâmide, h é a altura da pirâmide e r é o raio da esfera.

Pirâmide Reta Inscrita em uma Esfera

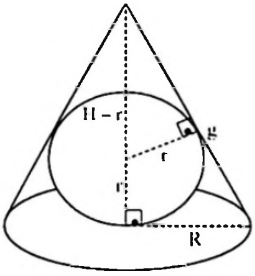


Os vértices da pirâmide pertencem à esfera. Se a pirâmide for regular, a altura (ou seu prolongamento) passa pelo centro da esfera. O segmento que une o centro da esfera a qualquer vértice da pirâmide possui comprimento igual ao raio da esfera. Por semelhança e por Pitágoras segue que

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{2r-h} \quad \text{e} \quad r^2 = x^2 + (h-r)^2$$

onde x é distância do centro da base à um dos vértices, r é o raio da esfera e h é a altura da pirâmide

Esfera Inscrita em um Cone Reto

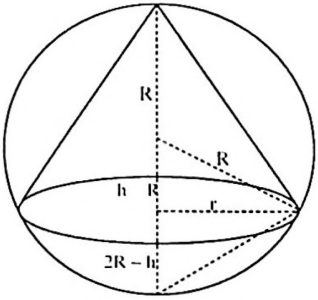


A esfera é tangente à base do cone em seu centro e à superfície lateral do cone. O segmento que liga o centro da esfera a qualquer ponto de tangência na superfície lateral é perpendicular à mesma. Aplicando Pitágoras e semelhança tem-se que:

$$g^2 = H^2 + R^2 \quad \text{e} \quad \frac{r}{R} = \frac{H-r}{g}$$

onde g é a geratriz do cone, R o raio da base do cone, r o raio da esfera e H a altura do cone

Cone Reto Inscrito em uma Esfera

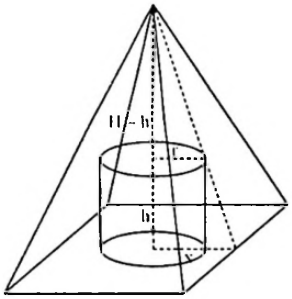


O vértice do cone e todos os pontos da circunferência da base do cone pertencem à esfera. A altura do cone (ou seu prolongamento) passa pelo centro da esfera. Aplicando Pitágoras e semelhança:

$$R^2 = r^2 + (h-r)^2 \quad \text{e} \quad \frac{2R-h}{r} = \frac{r}{h}$$

onde R é o raio da esfera, r é o raio da base do cone e h é a altura do cone

Cilindro Reto Inscrito em uma Pirâmide Reta

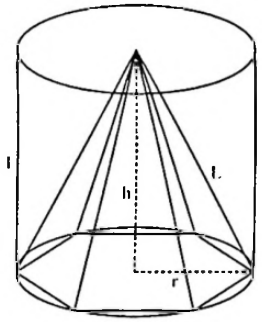


Uma base do cilindro pertence à base da pirâmide e a outra base do cilindro tangencia às faces laterais da pirâmide. A altura da pirâmide passa pelos centros das bases do cilindro. Aplicando semelhança tem-se:

$$\frac{r}{x} = \frac{H - h}{H}$$

onde r é o raio da base do cilindro, x é o apótema da base, H é a altura da pirâmide e h é a altura do cilindro

Pirâmide Reta Inscrita em um Cilindro Reto

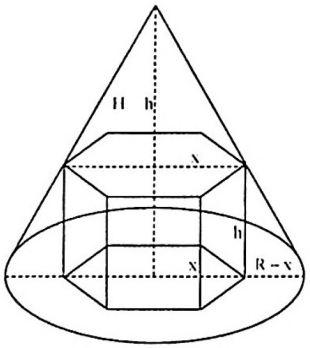


O vértice oposto à base da pirâmide é o centro de uma das bases do cilindro e os vértices da base da pirâmide pertencem a circunferência da outra base do cilindro. As alturas dos sólidos são congruentes. O raio da base do cilindro, uma aresta lateral e a altura formam um triângulo retângulo. Existem suas relações:

$$H = h \text{ e } L^2 = h^2 + r^2$$

onde H é a altura do cilindro, h é a altura da pirâmide, r é o raio da base do cilindro e L é a aresta lateral da pirâmide

Prisma Reto Inscrito em um Cone Reto

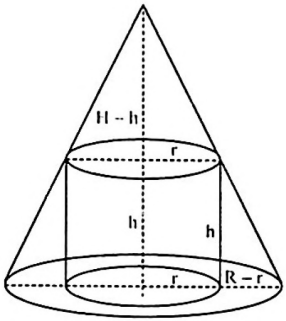


Uma das bases do prisma pertence à base do cone e os vértices da outra base do prisma pertencem à superfície lateral do cone. A altura do cone passa pelos centros das bases do prisma. Aplicando semelhança:

$$\frac{x}{R - x} = \frac{H - h}{h}$$

onde H é a altura do cone, h é a altura do prisma, R é o raio da base do cone e x é a distância do centro a um dos vértices da base do prisma

Cilindro Reto Inscrito em um Cone Reto

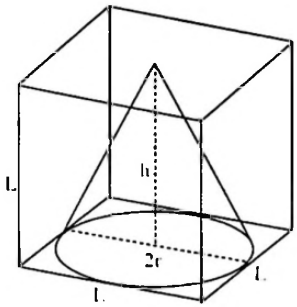


Uma das bases do cilindro pertence à base do cone e a circunferência da outra base do cilindro pertence à superfície lateral do cone. A altura do cone passa pelos centros das bases do cilindro. Por semelhança de triângulos segue que:

$$\frac{r}{R-r} = \frac{H-h}{h}$$

onde r é o raio da base do cilindro, R é o raio da base do cone, H é a altura do cone e h é a altura do cilindro

Cone Reto inscrito em um Cubo

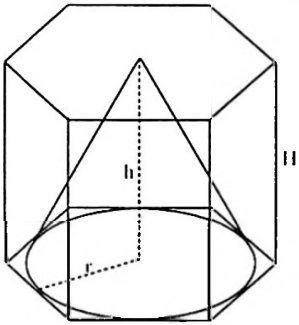


A base do cone pertence a uma das faces do cubo e o vértice do cone coincide com o centro da face oposta do cubo. Para este caso vale a relação:

$$L = h = 2r$$

onde L é a aresta do cubo, r é o raio da base do cone e h é a altura do cone.

Cone Reto inscrito em um Prisma Reto

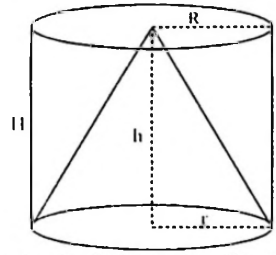


A base do cone pertence a uma das bases do prisma e o vértice do cone pertence a outra base do prisma. As relações são:

$$H = h \quad e \quad r = a$$

onde H é a altura do prisma, h é a altura do cone, r é o raio da base do cone e a é o apótema da base do prisma.

Cone Reto inscrito em um Cilindro Reto

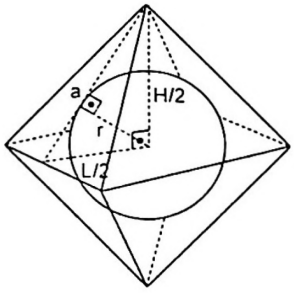


A base do cone coincide com uma das bases do cilindro e o vértice do cone coincide com o centro da outra base do cilindro. As relações que regem esta inscrição são

$$H = h \text{ e } R = r$$

onde H é a altura do cilindro, h é a altura do cone, R é o raio do da base do cilindro e r

Esfera inscrita em um Octaedro Regular

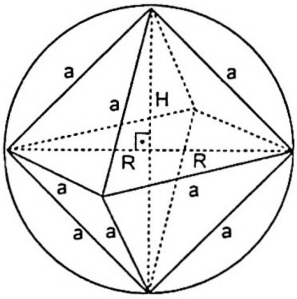


A esfera é tangente às 8 faces do octaedro. Se todas as faces do octaedro forem congruentes, tem-se a seguinte relação, por semelhança:

$$\frac{r}{H/2} = \frac{L/2}{a}$$

onde r é o raio da esfera, H é a altura do octaedro, L é a aresta lateral do octaedro e a é o apótema da face lateral do octaedro

Octaedro Regular inscrito em uma Esfera



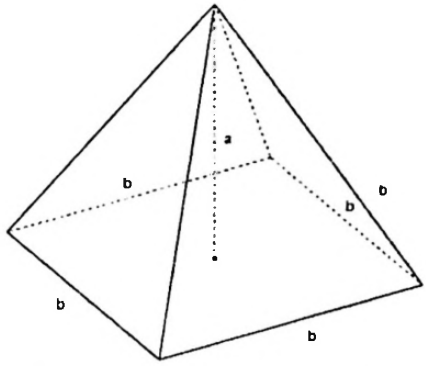
Todos os 6 vértices do octaedro pertencem à superfície esférica da esfera. A altura do octaedro passa pelo centro da esfera. Assim, tem-se as seguintes relações:

$$a = \sqrt{2}R \text{ e } H = 2R$$

onde a é a aresta do octaedro, H a altura do octaedro e R o raio da esfera.

Exercícios Resolvidos

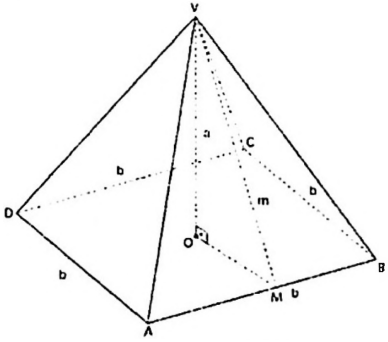
1) (Unicamp-14) Considere a pirâmide reta de base quadrada, ilustrada na figura abaixo, com lado da base b = 6 m e altura a.

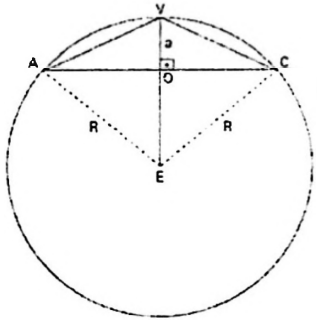


a) Encontre o valor de a de modo que a área de uma face triangular seja igual a 15 m^2.

b) Para a = 2 m, determine o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

Solução:





a) $S = 15 \Rightarrow (6.m)/2 = 15 \Rightarrow m = 5$

Teorema de Pitágoras em ΔVOM: $a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a = 4$

b) O plano que contém ΔAVC intersecta a pirâmide segundo a seção indicada na figura 2, onde:

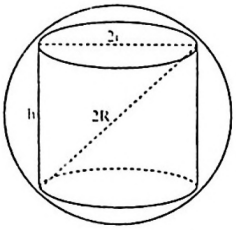
$VO = a = 2$; $EC = EV = EA = R$; $EO = R - 2$; $AC = 6\sqrt{2}$; $OC = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$

No ΔEOC: $R^2 = (R-2)^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 4R + 4 + 18 \Rightarrow R = 5{,}5$

2) (Unicamp-16) Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e) $\sqrt{2}$

Solução: Alternativa A



Pelo enunciado, tem-se que h = 2r. Assim, o triângulo formado por h, 2R e 2r é retângulo isósceles, implicando que $2R = \sqrt{2}h = 2\sqrt{2}r$

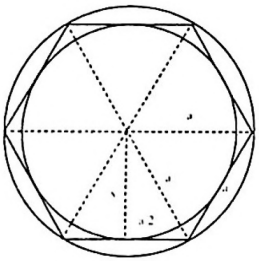
Logo, a razão entre os volumes é:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi r^2 h} = \frac{4R^3}{3r^2h} = \frac{4(\sqrt{2}r)^3}{3r^2(2r)} = \frac{4(2\sqrt{2}r^3)}{6r^3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

3) (Escola Naval-10) Sejam C_1 e C_2 dois cones circulares retos e P uma pirâmide hexagonal regular de aresta da base a. Sabe-se que C_1 é circunscrito à P, C_2 é inscrito em P e C_1, C_2 e P têm a mesma altura H. A razão da diferença dos volumes de C_1 e C_2 para o volume de pirâmide P é

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

Solução: Alternativa E



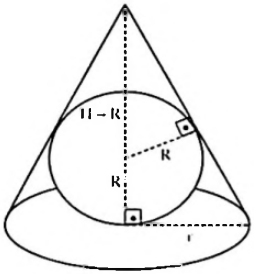
Como C_1, C_2 e P possuem a mesma altura então a razão de seus volumes será igual à razão entre suas bases. A figura ao lado representa a configuração das bases dos sólidos.Como a base da pirâmide é um hexágono regular de aresta a, o raio da base do cone C_1 também vale a. Deste modo, o raio x da base do cone C_2 vale:

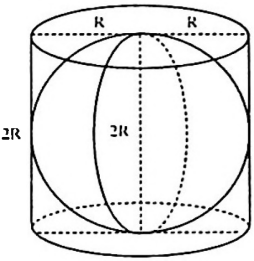
$$tg60° = \frac{x}{a/2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim: $\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{V_P} = \frac{S_{C_1} - S_{C_2}}{S_P} = \frac{\pi.a^2 - \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

4) (ITA-60) Sabendo-se que o volume de um cone equilátero circunscrito a uma esfera é $3\pi R^3$ (onde R é o raio da esfera), procure uma relação entre esse volume, o da esfera e o cilindro (reto) circunscrito à esfera.

Solução:





Como o cone é equilátero:

i) $H = \sqrt{3}r$;

ii) $\text{sen}30° = \dfrac{R}{H-R} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{R}{H-R} \Rightarrow H = 3R \Rightarrow$

$r = \sqrt{3}R$

$$V_{cone} = \frac{\pi r^2 H}{3} = \frac{\pi.3R^2.3R}{3} = 3\pi R^3 \text{ (confere!!!)}$$

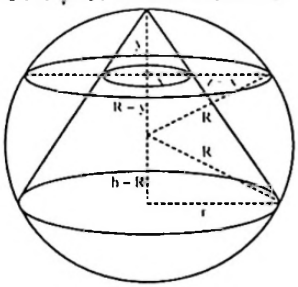
$$V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3} \qquad V_{cilindro} = \pi R^2(2R) = 2\pi R^3$$

Assim: $\dfrac{V_{cone}}{V_{esfera}} = \dfrac{9}{4}$ e $\dfrac{V_{cone}}{V_{cilindro}} = \dfrac{3}{2}$

5) (ITA-74) Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio **4 cm**. Cortam-se os sólidos (esfera e cone) por um plano paralelo à base do cone, de modo que a diferença entre as áreas das secções seja igual à área da base do cone. O raio da secção do cone é:

a) $2\sqrt{3}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm d) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm e) N.D.R.A.

Solução: Alternativa E



Sejam:

R = raio da esfera; r = raio da base do cone;

h = altura do cone; x = raio da seção do cone;

y = raio da seção da esfera; z = altura do cone definido pela seção.

Como o cone é equilátero segue que:

$$r = R.\cos 30° = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{tg}30° = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{h} \Rightarrow h = 6$$

$$\text{tg}30° = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$$

Coroa circular: $\pi z^2 - \pi x^2 = \pi r^2 \Rightarrow z^2 - x^2 = 12$

Por Pitágoras: $R^2 = (R-y)^2 + z^2 \Rightarrow 4^2 = (4-\sqrt{3}x)^2 + 12 + x^2 \Rightarrow$

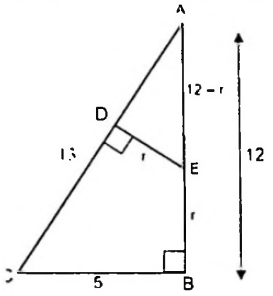
$16 = 16 - 8\sqrt{3}x + 3x^2 + 12 + x^2 \Rightarrow 4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \Rightarrow$

$(x-\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ cm

6) (ITA-11) Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{10}{3}$

Solução: Alternativa E



O apótema da base pode ser calculado da seguinte forma:

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \text{ cm}$$

Por Pitágoras segue que AC = 13 cm

$$\Delta ABC \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{r}{12-r} = \frac{5}{13} \Rightarrow 13r = 60 - 5r \Rightarrow$$

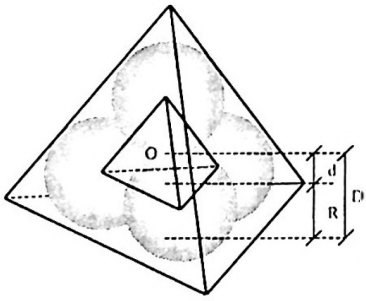
$$18r = 60 \Rightarrow r = \frac{10}{3} \text{ cm}$$

7) (ITA-03) Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes extremamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

Solução:

Note-se que o centro do tetraedro cujos vértices são os centros das esferas é o mesmo do tetraedro circunscrito às quatro esferas, o qual é regular. Além disso as faces de ambos os tetraedros são, duas a duas, paralelas.

Lembrando que a altura de um tetraedro regular de aresta a vale $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ e que a distância do centro do tetraedro às faces é igual a um quarto disso, ou seja, $\frac{a\sqrt{6}}{12}$, basta observar que a distância do centro comum aos tetraedros até uma face do maior, de aresta x, é igual à soma da distância entre aquele centro e a face paralela correspondente do tetraedro menor com o raio de uma das esferas.



O → centro comum

$d = \frac{h}{4} = \frac{2R\sqrt{6}}{12} = \frac{R\sqrt{6}}{6}$ → distância de O à face do tetraedro menor.

D → Distância de O à face do tetraedro maior.

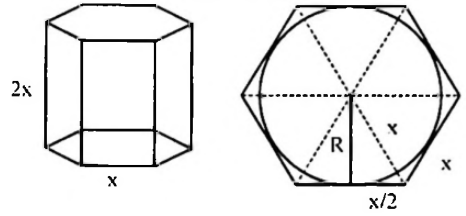
$$D = d + R \Rightarrow \frac{x\sqrt{6}}{12} = \frac{R\sqrt{6}}{6} + R \Rightarrow x = 2R + 2R\sqrt{6} = 2R(\sqrt{6}+1)$$

Portanto, o volume procurado é: $V = \frac{[2R(\sqrt{6}+1)]^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{6}+1)^3R^3$

8) (ITA-94) Um prisma regular tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:

a) $(6\sqrt{2})/\pi$ b) $(9\sqrt{2})/\pi$ c) $(3\sqrt{6})/\pi$ d) $(6\sqrt{3})/\pi$ e) $(9\sqrt{3})/\pi$

Solução: Alternativa D



Pelo esquema conclui-se que $R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Assim:

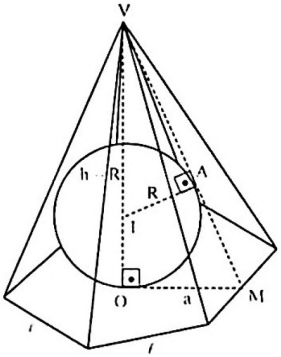
$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{S_p.H}{\frac{S_c.H}{3}} = \frac{6\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.2x}{\frac{\pi R^2.2x}{3}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}x^2}{2}}{\frac{\pi 3x^2}{4}} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

9) (IME-13) Considere uma pirâmide regular de base hexagonal e altura h. Uma esfera de raio R está inscrita nesta pirâmide. O volume desta pirâmide é

a) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$ b) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$ c) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h+2R}$

d) $\frac{h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-2R}$ e) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}\frac{R^2h}{h-R}$

Solução: Alternativa A



Sejam V o vértice da pirâmide, O o centro da base, I o centro da esfera inscrita e M um ponto médio de aresta da base. Além disso, considerem-se como A, a e ℓ as medidas do apótema da pirâmide, do apótema da base e da aresta da base, respectivamente.

Seja, também, T o ponto em que a esfera inscrita tangencia a face lateral que contém M.

No triângulo retângulo VOM, pelo Teorema de Pitágoras: $A^2 = a^2 + h^2$

Da semelhança entre os triângulos VOM e VIT:

$$\frac{A}{h-R} = \frac{a}{R} \Leftrightarrow \frac{A^2}{(h-R)^2} = \frac{a^2}{R^2} = \frac{A^2-a^2}{(h-R)^2-R^2} = \frac{h^2}{h^2-2hR} = \frac{h}{h-2R}$$

Assim: $a^2 = \dfrac{R^2 h}{h - 2R}$ (I)

Por outro lado, sabe-se que $a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ell = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

A área da base da pirâmide fica: $S = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \dfrac{\frac{4a^2}{3}\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$ (II)

Substituindo (I) em (II): $S = \dfrac{2R^2 h\sqrt{3}}{h - 2R}$.

Portanto, o volume da pirâmide fica: $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2R^2 h\sqrt{3}}{h - 2R} \cdot h = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{R^2 h}{h - 2R}$

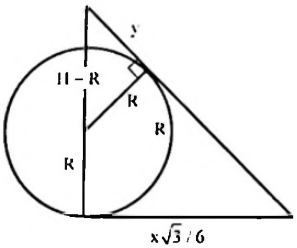
10) (ITA-96) Numa pirâmide regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão H/R é igual a:

a) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ b) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$ c) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$ d) $1+\sqrt{3\sqrt{3}-1}$ e) $\sqrt{3}+1$

Solução: Alternativa C

Seja x a aresta da base da pirâmide. Assim, a distância do baricentro da base à uma das arestas da base vale $\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.

I) $S_b = H^2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}x^2}{4} = H^2 \Rightarrow \dfrac{H^2}{x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$



II) A distância y do vértice oposto à base da pirâmide a um dos pontos de tangencia da esfera com as faces laterais vale:

$(H - R)^2 = R^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{H^2 - 2RH}$

Por semelhança: $\dfrac{H}{\frac{x\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{\sqrt{H^2 - 2RH}}{R} \Rightarrow$

$$\frac{12H^2}{x^2} = \frac{H^2 - 2RH}{R^2} \Rightarrow 3\sqrt{3} = \left(\frac{H}{R}\right)^2 - 2\frac{H}{R} \Rightarrow \left(\frac{H}{R}\right)^2 - 2\frac{H}{R} - 3\sqrt{3} = 0$$

Resolvendo esta equação de 3° grau: $\dfrac{H}{R} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12\sqrt{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{3\sqrt{3}+1}$

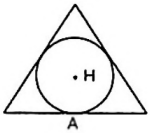
Se for adotado o sinal negativo a razão H/R será negativa. Assim, a única possibilidade é $\dfrac{H}{R} = 1 + \sqrt{3\sqrt{3}+1}$

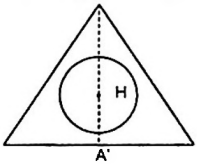
11) (ITA-10) Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ e) $\frac{\pi}{3}$

Solução: Alternativa D

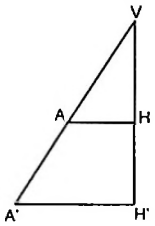
Sejam as figuras 1 e 2, seções planas que contêm as bases do cilindro:





$$A'H' = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos obter o triângulo retângulo abaixo, onde:



V: vértice do tetraedro; $\overline{AH}$: raio da base do cilindro; $\overline{HH'}$: altura do cilindro

$\overline{VH}$: altura do tetraedro $\Rightarrow \overline{VH'} = \frac{3\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{VH}{VH'} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = r \Rightarrow$$

$$V_{cilindro} = \pi.r^2.\ \overline{HH'} = \pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}$$

12) (IME-06) Considere um tetraedro regular de arestas de comprimento a e uma esfera de raio R tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de a, calcule:

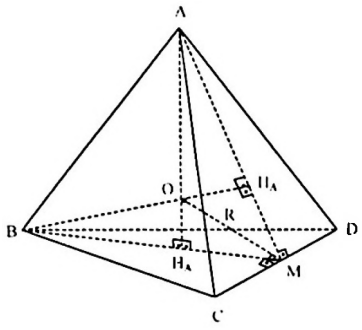
a) o volume total da esfera;

b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

Solução:

Sejam ABCD o Tetraedro regular de aresta a e M o ponto médio de $\overline{CD}$. Conforme é fácil verificar, o ortocentro do triângulo ABM, O, eqüidista das arestas do tetraedro.

De fato, já que O divide as alturas na razão 1:3, sendo H_A e H_B os centros das faces BCD e ACD, respectivamente:



$$MH_A = \frac{1}{3}.BM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

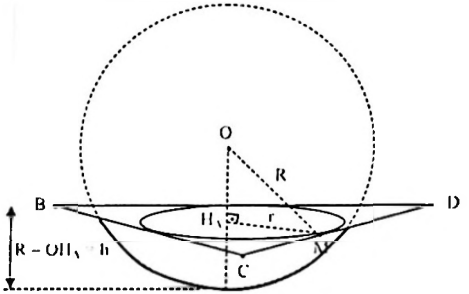
$$OH_A = \frac{1}{4}.AH_A = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

$$OM = \sqrt{OH_A^2 + MH_A^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = R,$$

Uma vez que $\overline{CD} \perp$ (A,B,M), (Plano do triângulo ABM) tem –se que $\overline{OM} \perp \overline{CD}$, pois $\overline{OM} \subset$ (A,B,M).

a) O volume da esfera de centro em O e de raio R= $\overline{OM}$, que tangencia todas as arestas, é: $v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 \rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}$

b) Cada face do tetraedro secciona a esfera do item anterior criando um <u>segmento esférico</u> na esfera, exterior ao tetraedro, como indica a figura a seguir, que ressalta um dos segmentos esféricos, de altura R – OH_A e de raio da base MH_A.



$$R - OH_A = h = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$r = MH_A = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Como se sabe, o volume de um segmento esférico de uma base, com altura h e raio da (Única) Base igual a r é:

$$V_1 = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right) \Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).\left\{3\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left[\frac{a\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]^2\right\} \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{432}$$

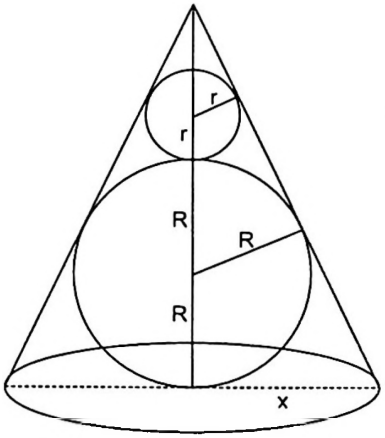
Portanto, o volume da parte da esfera no interior do tetraedro é, devido à simetria:

$$V = V - 4V_1 = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24} - \frac{\pi a^3\sqrt{2}\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{108} \Rightarrow V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}(8\sqrt{3} - 9)}{216}$$

13) (ITA-16) Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$. b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$. c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$. d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$. e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$.

Solução: Alternativa B



Por semelhança:

$$\frac{h-(2R+r)}{r} = \frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}$$

Igualando a 1ª e a 2ª razão:

I) $hR - 2R^2 - Rr = hr - Rr \Rightarrow h = \frac{2R^2}{R-r}$

Igualando a 2ª e a 3ª fração:

II) $\frac{h}{R} - 1 = \sqrt{\frac{h^2}{x^2}+1} \Rightarrow$

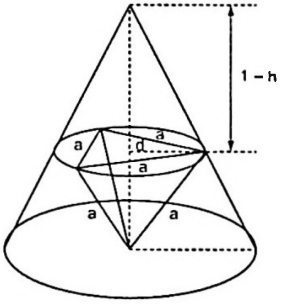
$$\frac{h^2}{R^2} - \frac{2h}{R} + 1 = \frac{h^2}{x^2} + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{R^3}{r}$$

Logo: $V = \frac{\pi x^2 h}{3} = \frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$

14) (ITA-16) Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

Solução:

Por semelhança segue que a distância 1 – h entre o plano que contém a base do tetraedro e o vértice do cone deve ser igual à distância d entre o centro desta base e dos vértices do tetraedro que pertençam a esta base:



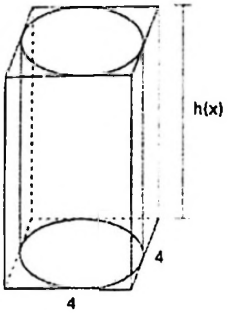
$$1 - h = d \Rightarrow 1 - \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Assim: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^3 \Rightarrow$

$$V = \frac{\sqrt{6}(5\sqrt{2}-7)}{4}$$

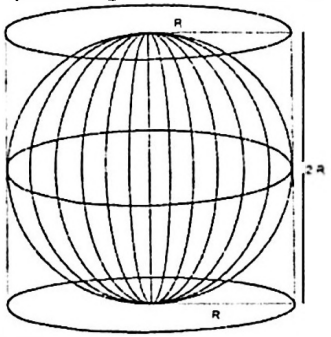
Exercícios de Vestibular

1) (UFScar-10) A figura mostra um prisma retangular reto de base quadrada com um cilindro circular reto inscrito no prisma. O lado da base do prisma mede 4dm e a altura é dada por $h(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ dm, com $x > 0$.



a) Calcule o volume do prisma para $x = 3$ dm.
b) Para $x = 1$dm o volume do cilindro inscrito é 16π dm^3. Encontre os outros valores de x para os quais isto acontece.

2) (UFRN-13) Por motivo de segurança, construiu-se um superaquário de vidro, em formato esférico, dentro de um cilindro também de vidro, conforme esquematizado na figura ao lado. A esfera está completamente cheia de água e, caso quebre, toda a água passará para o cilindro. Desconsidere a pequena diferença entre os raios da esfera e do cilindro e o volume de água deslocado pelos pedaços de vidro da esfera quando quebrada. Supondo que R é igual a 2 m, determine:



A) O volume de água da esfera.
B) A capacidade volumétrica do cilindro.
C) A altura do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre.

3) (UEM-13) Considere dois prismas retos de mesma altura, h = 6 cm, e com bases sendo hexágonos regulares, de modo que um seja inscrito no outro. Os vértices do prisma inscrito são os pontos médios das arestas das bases do outro prisma, e as arestas da base do prisma inscrito medem 2 cm. Com relação a esses prismas, assinale o que for correto.

01) As arestas das bases do prisma maior medem $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

02) A área lateral do prisma maior mede $48\sqrt{3}$ cm^2.

04) O volume do prisma menor é $\frac{36}{3}\sqrt{3}$ cm^3.

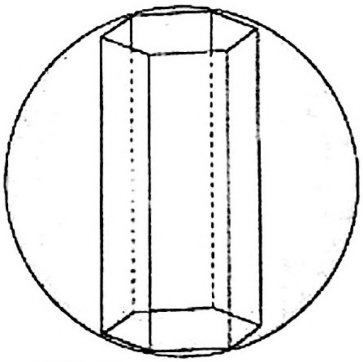
08) A diferença entre os volumes dos prismas é de $12\sqrt{3}$ cm^3.

16) O quociente entre os volumes do prisma maior e do menor é $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4) (UEFS-12) O volume da menor caixa cúbica que pode ser usada para guardar uma esfera de aço com 8cm^3 de volume, considerando-se $\pi \cong 3{,}14$ é de, aproximadamente,
A) 8cm^3 B) 12cm^3 C) 16cm^3 D) 20cm^3 E) 24cm^3

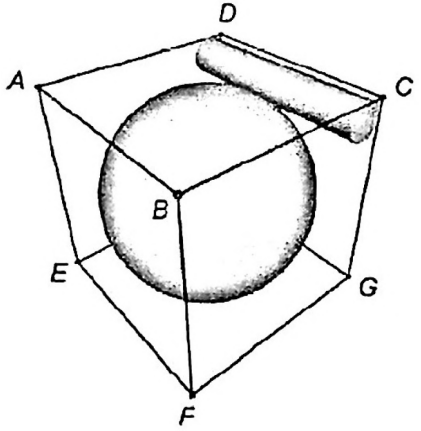
5) (UECE-11) Se uma esfera, cuja medida do volume é $256\pi/3$ m^3, está circunscrita a um paralelepípedo retângulo, então a medida, em metro, de uma diagonal deste paralelepípedo é
A) 10. B) 8. C) 6. D) 4.

6) (UESPI-08) Um prisma hexagonal regular, com lado da base medindo 3 cm e altura 8 cm, está inscrito em uma esfera, como ilustrado a seguir.



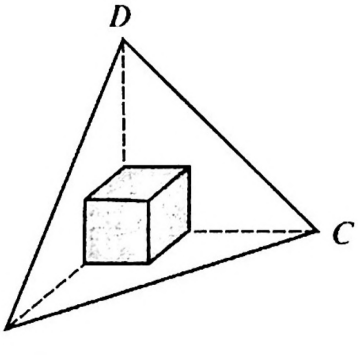
Qual a área, em cm^2, da superfície da esfera?
A) 92π B) 94π C) 96π D) 98π E) 100π

7) (UFF-12) Na figura abaixo, uma esfera encontra-se inscrita em um cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H. Um tronco de cilindro circular reto, por sua vez, tem uma base contida na face BFGC do cubo, outra base contida na face DHEA e superfície lateral tangente à esfera e às faces DABC e CGHD.



Se cada aresta do cubo mede 4 cm, determine a medida do raio da base do tronco de cilindro. Justifique sua resposta.

8) (UFRJ-10) A pirâmide ABCD é tal que as faces ABC, ABD e ACD são triângulos retângulos cujos catetos medem a. Considere o cubo de volume máximo contido em ABCD tal que um de seus vértices seja o ponto A, como ilustra a figura ao lado.



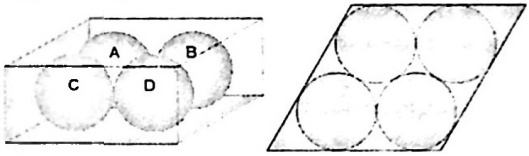
Determine a medida da aresta desse cubo em função de a.

9) (Unicamp-03) Considere um cubo cuja aresta mede **10 cm**. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos eqüiláteros congruentes.

a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.

b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

10) (UFPE-02) Na figura a seguir, quatro esferas (**A**, **B**, **C** e **D**) de raio 1 estão no interior de um paralelepípedo reto, tendo por base um losango, e cada uma das esferas é tangente a quatro faces do paralelepípedo (a outra figura é a interseção do paralelepípedo com o plano passando pelos centros das esferas). Além disso, as esferas **A** e **D** são tangentes às demais enquanto **B** e **C** são tangentes a **A** e **D**. Indique o volume do paralelepípedo.



11) (UECE-12) Um cilindro circular reto contém em seu interior um cone circular reto cuja medida do raio da base é a metade da medida do raio da base do cilindro. Se o cone e o cilindro têm a mesma altura então a razão entre o volume do cilindro e o volume do cone é

A) 18. B) 12. C) 6. D) 2.

12) (UECE-13) Um cone circular reto está inscrito em uma esfera, isto é, o vértice do cone e a circunferência que delimita sua base estão sobre a esfera. Se a medida do raio da esfera é 3 m e se a medida da altura do cone é igual a 2/3 da medida do diâmetro da esfera, então o volume do cone, em m^3, é

a) $32\pi/3$ b) $28\pi/3$ c) $26\pi/3$ d) $22\pi/3$

13) (UNB-02) Ligando-se os pontos médios das arestas de um tetraedro regular, obtém-se um octaedro, também regular. Nessa situação, sabendo que a aresta do tetraedro mede $12\sqrt{2}$ cm, calcule uma das seguintes quantidades, sem utilizar nenhum valor aproximado para $\sqrt{2}$ e desprezando, para a marcação na Folha de Respostas, a parte fracionária do resultado final obtido após efetuar todos os cálculos solicitados.

a) A razão entre a área total do tetraedro ABCD e a área do octaedro.

b) O comprimento, em centímetros, da diagonal OM do octaedro.

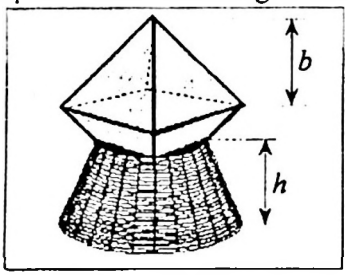
c) O volume do octaedro, em cm^3.

14) (UEM-12) Alguns tipos de embalagens de bolas de tênis têm a forma de um cilindro, onde as bolas são colocadas uma sobre a outra. Considere uma embalagem contendo 4 bolas de tênis, cada bola com diâmetro de 6,4 cm, e suponha que a embalagem fechada seja um cilindro circular reto com diâmetro da base igual ao das bolas e cuja altura seja a soma dos diâmetros das 4 bolas. Desprezando as espessuras das bolas e da embalagem, bem como quaisquer deformações nelas, e considerando $\pi = 3$, assinale o que for correto.

01) O volume da embalagem é menor do que 800 cm^3.

02) Cada bola ocupa um espaço com volume menor do que 130 cm^3.
04) A área de superfície de cada uma das bolas é menor do que 120 cm^2.
08) O volume do espaço livre, entre as bolas e a embalagem, é menor do que 280 cm^3.
16) A área lateral da embalagem é maior do que 520 cm^2.

15) (UNB-00) A figura ao lado representa um troféu formado por um tronco de cone maciço, de estanho, de altura h e raios das bases a e b, $a < b$, apoiando parte de um octaedro regular de cristal. A seção de contato do octaedro com o tronco de cone é um quadrado inscrito na base superior deste, e o vértice superior do octaedro está alinhado, na vertical, com os centros das duas bases do tronco de cone. A distância entre os vértices opostos do octaedro é igual a $2b$.



Com base nessas informações e sabendo que o volume de um tronco de cone de altura h e raios das bases iguais a R e r é dado por $\frac{\pi h(R^2 + Rr + r^2)}{3}$, julgue os itens abaixo.

(1) Se $h = \frac{3b}{\pi}$ então o volume da parte em estanho do troféu é igual a $b(b^2 + ab + a^2)$.

(2) O volume da parte de cristal que forma o troféu é igual a $\frac{2(b^3 - a^3)}{3}$.

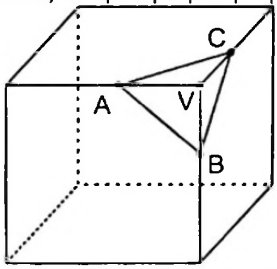
(3) Se $h = 2a$, então a altura total do troféu é igual a $2b$.

(4) Sabendo que, para $h = \frac{b}{\pi}$ e para todo número real k tal que $b = ka$, o volume total V do troféu é dado pela expressão $V = \frac{a^3(5k^3 + k^2 + k - 2)}{3}$, é correto concluir que todas as possíveis raízes reais do polinômio $p(x) = 5x^3 + x^2 + x - 2$ são maiores que 1.

16) (FGV-09) Considere uma pirâmide regular de altura $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cuja base é um quadrado de lado 3. Calcule:
A) o volume da pirâmide.

B) o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

17) (UFC-07) As arestas de um cubo medem 1 unidade de comprimento. Escolhido um vértice V do cubo, considera-se um tetraedro VABC de modo que as arestas VA, VB e VC do tetraedro estejam contidas nas arestas do cubo (como descrito na figura) e tenham a mesma medida, $x = |VA| = |VB| = |VC|$, com $0 < x \leq 1$.

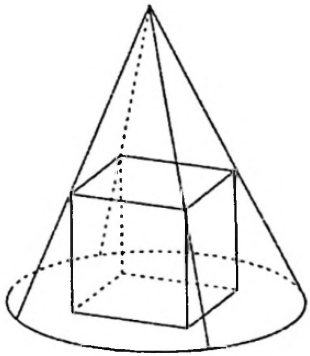


A) Calcule o volume do tetraedro VABC em função de x.
B) Considere a esfera inscrita nesse cubo. Determine o valor de x para que o plano determinado pelos pontos A, B e C seja tangente a essa esfera.

18) (UFC-06) Calcule o comprimento do raio $r > 0$ da esfera inscrita num cone circular reto cujo raio da base mede $a = 5$ cm e a geratriz mede $b = 7$ cm.

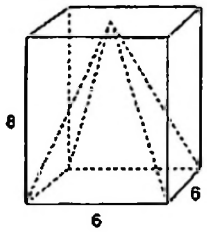
19) (UFC-09) Seja C um cubo com medida de aresta igual a 100 (uc).
A) Calcule o volume da esfera S inscrita no cubo C .
B) Secciona-se C em mil cubos congruentes, C_1, C_2, ..., C_{1000}, e inscreve-se uma esfera k S em cada cubo C_k, k = 1, ..., 1000. Calcule a soma dos volumes das esferas S_k, k = 1, ..., 1000.

20) (Uespi-11) Um cubo está inscrito em um cone reto com raio da base medindo 10 cm e altura $15\sqrt{2}$ cm. A face inferior do cubo está contida na base do cone, e os vértices da face superior do cone estão na superfície lateral do cone. Qual o volume do cubo?



a) $432\sqrt{2}$ cm^3 b) 216 cm^3 c) 125 cm^3 d) 64 cm^3 e) $8\sqrt{2}$ cm^3

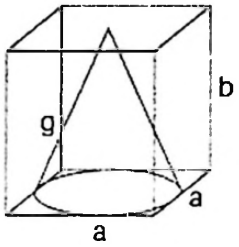
21) (Fuvest-99) Considere uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo reto de altura **8 m** e base quadrada de lado **6 m**. Apoiada na base, encontra-se uma pirâmide sólida reta de altura **8 m** e base quadrada com lado **6 m**. O espaço interior à caixa e exterior à pirâmide é preenchido com água, até uma altura **h**, a partir da base **(h ≤ 8)** . Determine o volume da água para um valor arbitrário de **h**, **0 ≤ h ≤ 8**.



22) (PUC/PR-12) Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito numa pirâmide reta triangular regular e tem sua base em uma das faces da pirâmide. Se as arestas lateral e da base da pirâmide medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

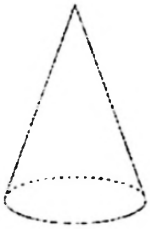
23) (Fuvest-06) Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é 3/2 e o volume do cone é π. Então, o comprimento g da geratriz do cone é



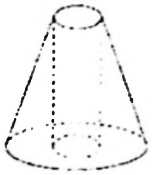
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{11}$

24) (Fuvest-06) Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15cm de altura e cuja base B tem raio 8cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la

completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é 2/3 da área de B, determine seu volume.



Antes
Figura 1

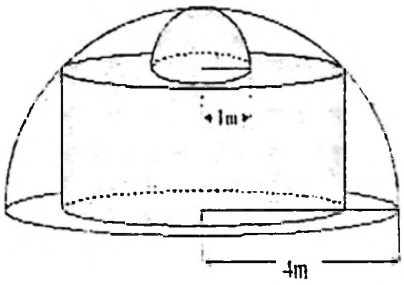


Depois
Figura 2

25) (Ciaba-11) Seja uma pirâmide quadrangular regular com arestas iguais a 2cm. No centro da base da pirâmide, está centrada uma semiesfera que tangencia as arestas da pirâmide. Existe uma esfera de maior raio, que está apoiada externamente em uma face lateral da pirâmide e tangencia internamente a superfície curva da semiesfera. Essa esfera possui volume, em cm^3, igual a

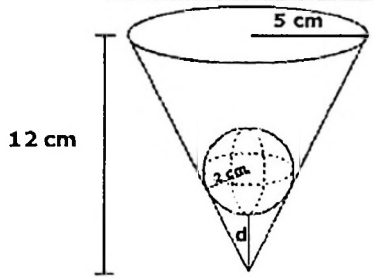
a) $\pi\dfrac{27-11\sqrt{6}}{54}$ b) $\pi\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ c) $\pi\dfrac{4\sqrt{3}}{24}$ d) $\pi\dfrac{108-44\sqrt{6}}{27}$ e) $\pi\dfrac{2}{3}$

26) (Ciaba-13) Constrói-se um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio 4m. O depósito é formado por uma semiesfera de raio 1m sobreposta a um cilindro circular, dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V, em m^2, é igual a:



a) $(20+14\sqrt{2})\pi$ b) $(17+4\sqrt{10})\pi$ c) $(8+4\sqrt{7})\pi$
d) $(21+7\sqrt{6})\pi$ e) $(15+6\sqrt{7})\pi$

27) (EsPCEx-08) Uma esfera de 2 cm de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir. O vaso tem 12 cm de altura e sua abertura é uma circunferência com 5 cm de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é



Desenho Fora de Escala

a) 3,0 cm b) 3,2 cm c) 3,4 cm d) 3,6 cm e) 3,8 cm

28) (AFA-98) A relação entre o raio da esfera inscrita, e o da esfera circunscrita a um tetraedro regular é

a) 1/3 b) 3/4 c) 1/4 d) 2/3

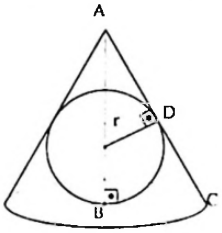
) (AFA-99) Qual o volume, em cm^3, da esfera inscrita em um cone reto, cuja tura e diâmetro da base são, respectivamente, 16 cm e 24 cm.?

.) 27π b) $500\pi/3$ c) 288π d) 686π

30) (AFA-00) A razão entre os volumes das esferas inscrita e circunscrita em um cone equilátero é

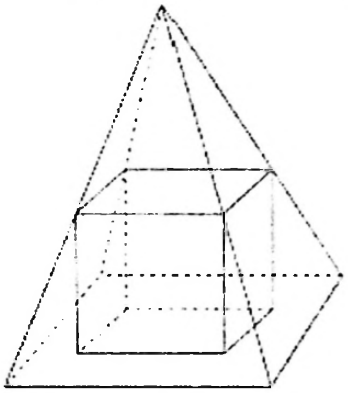
a) 1/16 b) 1/8 c) 1/4 d) 1/2

31) (AFA-03) Na figura seguinte, tem-se uma esfera de maior raio contida num cone reto e tangente ao plano da base do mesmo. Sabe-se que o raio da base e a altura desse cone são, respectivamente, iguais a 6 cm e 8 cm. A metade do volume da região do cone exterior à esfera é, em cm^3, igual a



a) 66π b) 48π c) 30π d) 18π

32) (AFA-07) Um cubo tem quatro vértices nos pontos médios das arestas laterais de uma pirâmide quadrangular regular, e os outros quatro na base da pirâmide, como mostra a figura abaixo.



A razão entre os volumes do cubo e da pirâmide é
a) 3/4 b) 1/2 c) 3/8 d) 1/8

33) (AFA-07) Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio R, tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede, em cm, $\frac{R}{m}$ ($m \geq 1$) m. Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, em cm^3, é dado por.

a) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m-1}{m}\right)^2$ b) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\frac{m+1}{m}\right)^2$

c) $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$ d) $\frac{2}{3}\pi R^3\left[1+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2\right]$

34) (Escola Naval-97) Um plano secciona uma esfera de raio 30cm, determinando um círculo que é base de um cilindro e também de um cone de revolução inscritos nessa esfera. O cilindro e o cone estão situados num mesmo semi-espaço em relação ao plano. Considerando que os volumes do cilindro e do cone são iguais, qual a distância do centro da esfera ao plano, em cm?
a) 18 b) 15 c) 12 d) 6 e) 4

35) (Escola Naval-98) Considere um cone circular reto de raio da base 5 cm e altura 12 cm. As dimensões do raio e da altura do cilindro circular reto, de maior volume, que pode ser inscrito neste cone, são respectivamente:
a) 10/3 e 4 b) 4 e 10 c) 3 e 14/3 d) 9/5 e 23/4 e) 5/2 e 5

36) (Escola Naval-99) A esfera S_1 está inscrita em um cilindro C, circular reto, cujo volume vale $18m^3$. A esfera S_2 está circunscrita a C. A diferença entre os volumes de S_2 e S_1 é, em cm^3:

a) $6(2\sqrt{2}-2)$ b) $6(2\sqrt{2}-1)$ c) $12(2\sqrt{2}-2)$

d) $12(2\sqrt{2}-1)$ e) $12(\sqrt{2}-1)$

37) (Escola Naval-01) Um cone circular reto está inscrito em uma esfera de raio igual a 6 cm. O ângulo CÂB da seção meridiana do cone é $\pi/4$ radianos. O volume do cone, em cm^3, é

a) $18\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$ b) 16π c) $\frac{8\pi}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$ d) $\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}$

38) (ITA-70) Constrói-se um cone cuja geratriz é tangente a uma esfera de raio r, e cujo eixo passa pelo centro dessa esfera, de modo que sua base esteja situada a uma distância r/2 do centro da esfera. O volume do cone é:

a) $3\pi r^3$ b) $\pi r^3/3$ c) $4\pi r^3/3$ d) $9\pi r^3/8$ e) nda

39) (ITA-73) Consideremos um cone de revolução de altura h, e um cilindro nele inscrito. Seja d a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura H de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume é dada por:

a) $H=(h-\sqrt{h-d})/3$ b) $H=(h\pm\sqrt{h^2-d^2})/3$

c) $H=(h-d+h\sqrt{h^2-d^2})/2$ d) $H=(h+d-\sqrt{(h-d)(h+3d)})/2$

e) n.d.a.

40) (ITA-73) Seja S uma semi-esfera de raio R dado. Sejam p e q dois planos paralelos e distantes entre si R/2 e tais que interceptam S paralelamente à sua base. Seja T o tronco de cone com bases b e c, onde B e c são as intersecções de p e q com S. Seja x o valor da menor das distâncias d e D, onde d é a distância entre p e a base de S, e D é a distância entre q e a base S.

Seja $k=[(R^2-x^2)(R^2-(x+\frac{R}{2})^2]^{1/2}$

Então o volume de T, como função de x, $0\le x\le R/2$, vale:

a) $\frac{\pi R}{6}(\frac{7}{4}R^2-2x^2-Rx+k)$ b) $\frac{\pi R}{12}(\frac{7}{4}R^2-2x^2-Rx+k)$

c) $\frac{\pi R}{12}(\frac{7}{4}R^2-2x^2-Rx-k)$ d) $\frac{\pi R}{6}(\frac{7}{4}R^2-2x^2-Rx-k)$

e) n.d.a.

41) (ITA-78) Se numa esfera de raio R, circunscrevermos um cone reto cuja geratriz é igual as diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera, é dado por:

a) $3 - R^3$ b) $3\sqrt{3}\pi / 2\ R^3$ c) $3\sqrt{3}\pi\ R^3$ d) $4\sqrt{3}\pi / 3\ R^3$ e) nda

42) (ITA-79) Considere o problema anterior, isto é, o tetraedro regular inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm, sendo HD sua altura. A diferença entre o volume do tetraedro e o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo DHM em torno de HD é dada por:

a) $(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi)$ cm^3 b) $(5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5\pi})$ cm^3 c) $(4\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{3\pi})$ cm^3

d) $(3\sqrt{3} - \frac{3}{5}\sqrt{3\pi})$ cm^3 e) $(7\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\pi)$ cm^3

43) (ITA-85) Um tronco de cone reto com bases paralelas está inscrito em uma esfera cujo raio mede 2 m. Se os raios das bases do tronco do cone medirem, respectivamente, r m e 2 m. Então o seu volume medirá:

a) $\frac{2}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{1-r^2})$ b) $\frac{3}{2}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + \sqrt{1-r^2})$

c) $\frac{7}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} - 2\sqrt{1-r^2})$ d) $\frac{7}{3}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2})$

e) $\frac{3}{2}\pi r^2(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2})$

44) (ITA-85) Uma esfera de raio $r = \sqrt{3}$ cm está inscrita num prisma hexagonal regular que, por sua vez, está inscrito numa esfera de raio R. Pode-se afirmar que a medida do raio R vale:

a) $\sqrt{7}$ cm b) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm e) $4\sqrt{3}$ cm

45) (ITA-87) Seja (T) um cubo com aresta de medida a. Considere (P) a pirâmide que tem vértice no centro de uma face de (T) e como base a face oposta de (T). Sendo x a área lateral de (P), temos:

a) $x = a^2.\sqrt{3}$ b) $x = a^2.\sqrt{5}$ c) $x = (a+1)^2.\sqrt{5}$

d) $x = (a+1)^2.\sqrt{3}$ e) $x = (\sqrt{3} + \sqrt{5})a^2$

46) (ITA-88) Considere um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio 2 cm. Sabendo-se que a área do círculo, limitado pela circunferência formada por pontos de tangência entre as duas superfícies, é de 2π cm^2, calcule a altura deste cone.

47) (ITA-89) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone será igual a
a) 6R/5 b) 3R/2 c) 4R/3 d) 2R/3 e) 7R/5

48) (ITA-89) Os lados congruentes de um triângulo isósceles formam um ângulo de 30 graus e o lado oposto a este ângulo mede x cm. Este triângulo é a base de um pirâmide de altura 11 cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume V, em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a:
a) $2\pi x^2 H$ b) $\pi x^2 H/3$ c) $2\pi x^2 H/3$ d) $3\pi x^2 H$ e) $\pi x^2 H$

49) (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio x cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em cm^3 é:
a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$ e) n.d.a.

50) (ITA-92) Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:
a) $\pi(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm². b) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm². c) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})R^2/4$ cm².
d) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2$ cm². e) n.d.a.

51) (ITA-95) Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:
a) 10/3 b) 4/4 c) 12/5 d) 3 e) 2

52) (ITA-00) Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm cm e raio da base de 2 *cm* está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a :
a) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ b) $\frac{9}{4}(\sqrt{2}-1)$ c) $\frac{9}{4}(\sqrt{6}-1)$
d) $\frac{27}{8}(\sqrt{3}-1)$ e) $\frac{27}{16}(\sqrt{3}-1)$

53) (ITA-08) Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi$ cm^3 que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a
a) $3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 2

54) (ITA-09) Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de 60° de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone delinem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a:

a) $\frac{416}{9}\pi$ b) $\frac{480}{9}\pi$ c) $\frac{500}{9}\pi$ d) $\frac{512}{9}\pi$ e) $\frac{542}{9}\pi$

55) (IME-64) Um cone circular reto, de raio de base igual a R e altura h, está circunscrito a uma esfera de raio r. Provar que $\frac{2}{rh} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$.

56) (IME-65) Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio R = 6. Deseja-se cortar os dois sólidos por um plano paralelo à base do cone, de tal forma que a diferença entre as áreas das seções obtidas seja igual a 2π. Qual a menor distância do vértice do cone a que deve passar este plano?

57) (IME-65) Em um trapézio isósceles de área $A_1 = 5$ está inscrito um círculo de área $A_2 = \pi$. Um sólido de revolução é gerado pela rotação do trapézio em torno de um eixo perpendicular às suas bases, contido no plano da figura, e afastado do vértice mais próximo de uma distância igual ao comprimento da base maior. Calcular a área total e o volume deste sólido de revolução.

58) (IME-66) O volume da cunha esférica é igual ao volume do cubo inscrito na mesma esfera. Calcular o ângulo da cunha.

59) (IME-66) Um cilindro é circunscrito a uma esfera de raio R. Um cone é circunscrito a esse cilindro de modo que sua altura seja 4R. Calcular a relação entre a área lateral do cone e a área da esfera.

60) (IME-66) Inscreve-se um cilindro circular reto numa esfera. Calcular o raio da esfera sabendo que a altura do cilindro é 4 m e que a relação entre o raio da base e o raio da esfera é $\sqrt{3}/2$.

61) (IME-66) Um cone de 27 cm de raio e 36 cm de altura tem o vértice no centro de uma esfera de 35 cm de raio. Calcular o volume da porção de espaço comum aos dois sólidos.

62) (IME-68) Calcular o raio das esferas circunscritas e inscrita a uma pirâmide regular que tem por altura *h* e por base um quadrado de lado *a*.

63) (IME-85) Dada uma pirâmide regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a *l* e altura *h*, determine em função de *l* e *h*, a posição do centro da esfera que é tangente às doze arestas da pirâmide.

64) (IME-86) Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a R e r, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas, calcule a área da superfície lateral do tronco de cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

65) (IME-87) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base $ABCDEF$, de lado da base igual a ℓ e altura h:
(A) Mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
(B) Calcule os raios dessas esferas.
(C) Mostre que o produto desses raios independe de h.

66) (IME-89) Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é a média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

7) (IME-97) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$.
Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.

68) (IME-95) Seis esferas idênticas de raio "R" encontram-se posicionadas no espaço de tal forma que cada uma delas seja tangente a quatro esferas. Desta forma, determine a aresta do cubo que tangencie todas as esferas.

69) (Escola Naval-86) Sejam A e B pontos diametralmente opostos em uma esfera de raio R. O volume comum aos cones de revolução inscritos na esfera, com vértices em A e em B e cujas alturas são iguais a 3R/2 é:
a) $\pi R^3/9$ b) $7\pi R^3/36$ c) $\pi R^3/12$ d) $2\pi R^3/9$ e) $5\pi R^3/12$

70) (Escola Naval-87) Uma esfera de raio 2R está inscrita em um cone de revolução. Uma segunda esfera de raio R tangencia exteriormente a 1° esfera e tangencia também todas as geratrizes do cone. Calcular o volume do cone.
a) $2/3\pi R^3$ b) $4/3\pi R^3$ c) $16/3\pi R^3$ d) $32/3\pi R^3$ e) $64/3\pi R^3$

71) (Escola Naval-05) Um octaedro regular está inscrito num cubo de aresta a. A razão entre o volume do cubo e o volume do octaedro é
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

72) (IME-75) Considere um cubo K de aresta a. Suponha que L é o ponto em que as diagonais do cubo K se interceptam em que M é o ponto médio de uma aresta do cubo K. Com centro em L e raio LM é construída uma esfera E. O plano tangente à esfera E e perpendicular a uma diagonal do cubo K destaca do cubo K uma pirâmide P. Calcule o volume da pirâmide P, em função de a.

73) (IME Militares-01) Um cilindro circular reto tem a sua superfície total equivalente à superfície lateral de um prisma oblíquo cuja seção reta é um pentágono regular de lado igual a 3 m, e cuja aresta lateral é igual a $4\pi/3$ metros. Sabe-se que o perímetro da seção meridiana do cilindro é 14 m. Calcule o raio da esfera circunscritível ao cilindro.

74) (IME Militares-13) Um cubo está inscrito em um cone reto. O raio da base do cone é igual a r e a sua área lateral é igual ao dobro da sua área da base. Determine a aresta do cubo em função de r.

75) (IME-48) Numa esfera de raio R, inscrever um prisma reto cujas bases sejam triângulos equiláteros, de modo que seu volume seja igual a R^3. Calcular a altura do prisma para uma esfera de raio igual a $2\sqrt{3}$ cm.

76) (IME-49) Demonstrar que no tetraedro regular o raio da esfera tangente às seis arestas é a média proporcional entre o raio da esfera inscrita e o da esfera circunscrita.

77) (IME-50) Calcular o volume V de um octaedro regular inscrito em um cilindro equilátero de raio r.

78) (IME-51) Um prisma, reto, hexagonal, regular, tem suas 18 arestas tangentes a uma esfera de raio r. Determinar:
a) A fração da área da esfera que se encontra na parte exterior às faces laterais do prisma.
b) A fração do volume da mesma esfera que se encontra na parte exterior às bases do prisma.
Obs: A esfera não é inscrita nem circunscrita ao prisma; as 8 faces do prisma seccionam a esfera.

79) (IME-15) Seja um tetraedro regular ABCD de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$ b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$ e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

80) (EsPCEx-14) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi$ b) $\frac{2}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}\pi$ d) $\frac{8}{3}\pi$ e) 3π

81) (IME-47) A altura de um cone circular reto é o dobro do raio R da base. Calcular o volume da esfera circunscrita, em função do raio R acima.

82) (IME-50) Dois cones retos circunscritos a uma mesma esfera de raio r têm volumes iguais.

a) Determinar a altura H de um dos cones quando se conhece a altura h do outro. Exprimir o resultado em função de r e h.

b) Para que valor de h a solução H = h é única? Determinar, nesse caso, a relação entre a superfície total do cone e a superfície da esfera.

83) (IME-53) Um tetraedro regular de aresta a e uma esfera de raio ρ interceptam-se de modo que a superfície esférica tangencia as seis arestas do poliedro em seus pontos médios. Pedem-se:

a) Calcular o raio ρ em função da aresta a.

b) Exprimir em função de ρ o produto do raio R da esfera circunscrita ao tetraedro pelo raio r da esfera inscrita: $R \times r = f(\rho)$.

c) Calcular em função de ρ a parte do volume da esfera que fica situada externamente ao tetraedro.

84) (OBM-82) Cinco esferas de raio R estão dentro de um cone circular reto, da seguinte maneira: quatro delas tangenciam a base do cone, a superfície lateral e cada uma destas quatro tangenciam duas outras; a quinta tangencia as quatro primeiras e a superfície lateral do cone. Calcule o volume do cone.

Gabaritos

Capítulo 1: Triângulo Retângulos

1) d 2) d 3) b 4) b 5) d
6) e 7) d 8) c 9) b 10) c
11) d 12) a 13) b 14) a
15) $H = \frac{x.tg\beta\ tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta} - h$ 16) a 17) b 18) c
19) d 20) c 21) c 22) c 23) c
24) d 25) c 26) d 27) c
28) a) $AC = x\sqrt{13}$ e $AB = 2x\sqrt{13}$: b) $\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$ 29) a) 7.56: b) – 16/65
30) c 31) a) 24/7: b) 98/625 32) c 33) c
34) 10 e 7 35) d 36) a) 100 cm: b) 30°
37) a) 1/2: b) 7/17 38) b 39) $tg\alpha = 3\sqrt{3}$ e $sen\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$
40) c 41) e 42) c 43) b 44) b
45) e 46) a 47) a
48) $sen\ A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos A = \frac{1}{2}$ e $tg\ A = \sqrt{3}$

Capítulo 2: Ciclo Trigonométrico e Identidades

1) d 2) a 3) e 4) c 5) c
6) e 7) b 8) e 9) d 10) d
11) a 12) e 13) b 14) e 15) e
16) e 17) e 18) a 19) b 20) e
21) e 22) e 23) d 24) d 25) d
26) a 27) a 28) d 29) a 30) e
31) b 32) d 33) b 34) b 35) b
36) e 37) a 38) e 39) b 40) a
41) e 42) e 43) e 44) a 45) d
46) b 47) d 48) e 49) e 50) a
51) b 52) a 53) a 54) d 55) d
56) a 57) d 62) A = 3. B = 6 e C = – 2 65) – 1
67) $\pm\sqrt{\sqrt{6}-2}$ 71) 2 72) 4/3 74) $-m^3/27$
75) cos a.cos b.cos c

77) a) $m = 2n + 1$; b) $\frac{1}{m^2n^2} - p^2 = 4$; c) $a(1 + b^2) = b^4$; d) $m^2n + 2n = 1$; e) $a^2b^4 + 1b = 2b^2a^2$;
f) $(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = 1$; g) $(bc^2 - b^2c)^2 + (ca^2 - c^2a)^2 = (ab^2 - a^2b)^2$; h) $b - a = d$;
i) $13(a^2 + b^2) = 24ab + 25$; j) $(4a - 3b)^2[49 - (a + b)^2] = 49(a - b)^2$;
k) $\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1$; l) $(a^2 + 2b^2 - 9)^2 = a^2(b^2 - 3)(a^2 + b^2 - 6)$; m) $(4a^2 + m^2)^2 = 16a^2(m^2 + n^2)$;

n) $a^{2/3} + b^{2/3} = c^{1/3}$; o) $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} = a + b$;

p) $(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - cd)^2 = a^2b^2[d^2 - 4(cd - a^2 - b^2)]$

78) $(a^2 + b^2 - 2)^2 + 4c^2 - 4$ **79)** $4t(2k - st) - s(k^2 - t^2)^2$ **80)** $x + a - 0$

81) $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ **82)** $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Capítulo 3: Transformações Trigonométricas

1) c **2)** c **3)** e **4)** d **5)** 45°

6) e **7)** VVVFF **8)** d **9)** d **10)** b

11) e **12)** a **13)** 1 e 1/4 **14)** 1 ou – 1 **15)** d

16) 1/29 **17)** e **18)** a **19)** d **20)** e

21) d **22)** $\text{sen}x = -1/5$ e $\cos x = -2\sqrt{6}/5$ **23)** a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

24) a) – 3/5; b) $\frac{120}{169}$ **25)** a **26)** e **27)** c

28) b **30)** c **31)** b **32)** c **33)** d

34) a **35)** b **36)** c **37)** e **38)** d

39) e **40)** e **41)** a **42)** d **43)** a

44) a **45)** d **46)** d **47)** d **48)** d

49) b **50)** d **51)** 4 **52)** e **53)** b

54) e **55)** e **56)** c **57)** d **58)** a

59) e **60)** e **64)** 1/6 **67)** c **68)** d

69) b **71)** $e = 2a^2 - 2b^2 - 1$ **73)** 1 **89)** $\sqrt{2}$

94) 3 **95)** 4 **96)** 29 **103)** $\frac{5\sqrt[3]{7}}{8}$

119) $m^2 + m.\cos\alpha - 2$ **125)** 9 **129)** 1/8 **130)** $\sqrt{13}$

131) 111/8 **132)** 20

133) a) $(e^2 - d^2)(a^2d - abc - 2b^2d) = 0$; b) $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3) = 2b$; c) $m^{2/3} + n^{2/3} = (2a)^{2/3}$; d) $ac + b^2 = e^2$; e) $cd^2(c + 2d) = (a + 3d)^2$; f) $b - a = d$; g) $(e^2 - d^2)(a^2d - abc - 2b^2d) = 0$; h) $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3) = 2b$; i) $13(a^2 + b^2) - 24ab + 25$; j) $ac + b^2 = e^2$

134) $(x^2 + y^2)(1 - z) = 2y(1 + z)$ **135)** $c^2 = a^2 + b^2 + 3abd$

136) $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 4) + c^2 + d^2 = 2c(a^2 - b^2) + 4abcd$ **137)** $\frac{1+p}{1-p}$ **138)** 0

139) 1/4 **140)** $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$

Capítulo 4: Equações Trigonométricas

1) d 2) $\{\pi/4, 3\pi/4\}$. b) $\{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$ 3) c
4) d 5) a 6) b 7) c
8) a) satisfaz; b) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ 9) e 10) e
11) e 12) D 13) c 14) a 15) b
16) e 17) $\pi/4, 3\pi/4, 7\pi/6, 5\pi/4, 7\pi/4$ e $11\pi/6$ 18) 80
19) a 20) b 21) D 22) d 23) d
24) b 25) a 26) c 27) b
28) $\pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8, \pi/3$ e $2\pi/3$ 29) $-5\pi/3, -\pi, -\pi/3, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ e $7\pi/3$
30) a 31) a 32) e 33) a 34) – 1
35) b 36) d 37) e 38) e 39) d
40) d 41) b 42) $x = \pi/3$ ou $x = \pi/6$
43) b) $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$ 44) a) $t = 4.5 + 12.k$, $k \in \mathbb{N}$; b) 4.5 h.
45) a) às 2 horas: 0.35°C; às 9 horas: – 0.7°C; b) 0 horas, 8 horas, 16 horas e 24 horas.
46) a) 1200km e 2000km; b) 90° ou 270°
47) a) $4(\sqrt{3}+1)$; b) $-5\pi/6, -\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$ 48) b) $\pm\sqrt{5}/5$ ou $\pm\sqrt{2}/2$
49) $x = -\pi/6$ e $y = \pi/6$ ou $x = -5\pi/6$ e $y = 5\pi/6$
50) a) $(1 - 4.\text{sen}^2\,\theta)\cos\theta$; b) $4(\cos^2\theta - 1)\text{sen}\,\theta$; c) $\pi/3$ 51) a) $2\pi/3$; b) 0.
52) a) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; b) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$ 53) e 54) e 55) d
56) d 57) c 58) a 59) a 60) a
61) c 62) d 63) c 64) d 65) c
66) b 67) b 68) e 69) b 70) b
72) a 73) c 74) c 75) d 76) b
77) b 78) c 79) b 80) a 81) A – mais próxima
82) b 83) c 84) a 85) b 86) e
87) b 88) e
90) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sempre é solução da equação $\forall m \in \mathbb{R}$. Se $0 \le m \le 2$ a equação ainda tem x como solução tal que $\cos^2 x = 1/2$. Se $m = 1$: $x = k\pi$ ou $x = \pi/4 + k\pi/2$
91) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$ ou $\frac{5\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$ 92) $M - N + P = k\pi$
93) $S = \left\{\left(\frac{\pi}{3} + k_1\pi, \frac{2\pi}{3} + k_2\pi\right), \left(\frac{2\pi}{3} + k_3\pi, \frac{\pi}{3} + k_4\pi\right)\right\}$ 94) $m = \sqrt{3}$, 30° e 60°
95) $\pi/6$
97) $S = \left\{\left(\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right), \left(\frac{7\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right), (\pi, \pi, \pi), \left(\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right), \left(\frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right), \left(\frac{5\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}\right)\right\}$
98) $m \ge -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 99) a) $x = k\pi$ ou $x = 2k\pi - 2A$, onde $\cos A = \frac{m}{\sqrt{2m^2 + 2m + 1}}$; b) $m = -1/2$
100) $0.1 \le x \le 10$

103) $S = \{(\pi/8,-3\pi/8);(\pi/8,3\pi/8),(3\pi/8,-\pi/8);(3\pi/8,\pi/8)\}$ **104)** $S = \{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$

105) $S = \{x \in \mathbb{R} | x = k\pi - \pi/4 \vee x = 2k\pi \pm \pi/3; k \in Z\}$

106) n é par $\rightarrow x = k\pi$, $k \in Z$; $n = 1 \rightarrow x = 2k\pi \vee x = 2k\pi - \pi/2$, $k \in Z$; $n \geq 3 \rightarrow$ não há solução.

107) c **108)** b **109)** a **110)** $\pi/4 + k\pi$

111) $\pi/4 + k\pi/2$ **112)** $x = 3\pi/4 + k\pi$ ou $x = \pm 2\pi/3 - 2k\pi$

113) $x = \pi/4 + k\pi$ ou $x = 2k\pi$

114) a) $n\pi$; b) $(2k + 1)\pi/4$ ou $\pm \pi/3 + k\pi$; c) $k\pi/3$; d) $\pm \pi/3 + k\pi$ ou $(2k + 1)\pi/3$; e) $\pi/4 + 2k\pi/3$; f) $k\pi$ ou $(4k - 1)\pi/8$; g) $k\pi/12$; h) $2k\pi$ ou $-\pi/2 + 2k\pi$

115) $\{(\pm \pi/3 + 2k_1\pi, \pm 2\pi/3 + 2k_2\pi, \pi/2 + k_3\pi), (\pm 2\pi/3 + 2k_4\pi, \pm \pi/3 + 2k_5\pi, \pi/2 + k_6\pi)\}$

116) $\pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$ **117)** $8k\pi$

118) $\pm \pi/24 + 2k\pi$ ou $x = \pm 7\pi/24 + 2k\pi$ **119)** $3\pi/2$

120) $0, \pi/4, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4, 2\pi$ **136)** $x^3 - 24x^2 - 80t - 64 = 0$

137) $32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1 = 0$

Capítulo 5: Funções Trigonométricas

1) b **2)** a **3)** d **4)** a **5)** d

6) b **7)** a **8)** VFVVF **9)** b **10)** $\pi/2$

1) a) $\Gamma - 1$ e $I - [0, 2]$; b) 1/4 e 3/4 **12)** b **13)** c **14)** FVFFV

15) $1 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$ **16)** e **17)** e **18)** b **19)** a

20) e **21)** E **22)** e **23)** c **24)** a

25) c **26)** b **27)** $\pi/6$ **28)** d **29)** a

30) VVVVF **31)** e **32)** a **33)** 30 **34)** c

35) b **36)** c **37)** a **38)** c **39)** e

40) e **41)** c **42)** C **43)** d **44)** e

45) a) 12 h e 48 min; b) 181 **46)** a) 12; b) máx: 12 e 24, mín: 0 e 18

47) d **48)** c **49)** c **50)** d **51)** a

52) d **53)** b) 18 h 01 min 45 s **54)** $2\pi/3$ ou $4\pi/3$

55) a **56)** c **57)** b **58)** a **59)** a

60) b **61)** c **62)** a **63)** b **64)** d

65) a **66)** c **67)** a **68)** d **69)** c

70) d **71)** a **72)** c **73)** c **74)** D

75) d **76)** b **77)** b

79) $f(x) = \sqrt{1 + x}$ e $f(tg^2 x) = \sec x$ **80)** π **81)** $[-4, 10]$ **83)** π

84) 0 **85)** π/a **86)** $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ **87)** 2π

88) 2π **89)** 2π **90)** 12π **91)** $\pi/2$ **92)** 2

93) 24π **94)** 1/2 **95)** $9\pi/4$ **96)** $14\pi/5$

97) a) não; b) não, c) não; d) não

Capítulo 6: Funções Trigonométricas Inversas

1) c 2) e 3) b 4) a) $\frac{\pi}{5}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) d 6) a 7) e 9) c 10) a
11) b 12) c 13) a 14) c 15) d
16) d 17) e 18) e 19) d 20) b
21) a 22) e 23) d 24) d 25) c
26) b 27) 1/2 28) 15° 29) $\pi/4$

31) 0, 1/2 ou – 1/2 32) $\pm \pi/2, \pm 3\pi/10, \pm 5\pi/6$ 33) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

34) a) $\tan 3\alpha = \frac{3x - x^3}{1-3x^2}$; b) $x = \tan\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{3}\text{arc tan } m\right)$; k = 0, 1, 2, ...

35) $S = \{\text{arc cos}\sqrt{5}/5,\ \pi - \text{arc cos}\sqrt{5}/5,\ \pi + \text{arc cos}\sqrt{5}/5,\ 2\pi - \text{arc cos}\sqrt{5}/5\}$

36) NULA 37) d 38) c 43) 1/3 44) 7

54) a) $\frac{7\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{27}$; b) 12/13; c) – 23/27; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\pi/4$; f) – 9/7; g) $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$; h) $3\pi/11$; i) π; j) π; k) $5\pi/4$; l)19/15; m) π

57) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 58) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 59) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 60) $-2-\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$

61) 0 62) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 63) $\pm\frac{\sqrt{26}}{26}$ 64) $\frac{1}{84}$

65) a) 1/6; b) $\{0, \pm 1/2\}$; c) $\{3, -2/3\}$; d) – 461/9

66) D(f) = [– 1, 1) e Im(f) = $[-1/2; +\infty)$ 67) D(f) = [- 1, 1] e Im(f) = [0, 1]

68) D(f) = $(-\infty, -\sqrt{2}+1] \cup [\sqrt{2}+1, +\infty)$ e Im(f) = $(0, \pi/8] \cup \{-\pi/8\}$ 69) $[0, \pi/2]$

70) IR 71) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 72) $f(x) = 2x^2 - \sqrt{1-5x^2+4x^4}$

73) $\frac{n\pi}{4} - \text{arc tg}\frac{n}{n+2}$ 74) $\text{arc tg}\frac{n}{n+2}$

Capítulo 7: Inequações Trigonométricas

1) e 2) $[0, \pi/3] \cup [\pi, 5\pi/3] \cup \{2\pi\}$ 3) d
4) $\pi/6 < x < \pi/2$ 5) e 6) $0 \le x \le \pi/3 \cup 5\pi/3 \le x < 2\pi$
7) c 8) c 9) b 10) c 11) b
12) b) das 12h31 às 14h37 ou às 16h43 13) $x \in [30°, 150°]$
14) a) $0 \le \alpha < \pi/6$ ou $5\pi/6 < \alpha \le \pi$ 15) $[3\pi/2, 11\pi/6]$ 16) e
17) d 18) b 19) c 20) c 21) e
22) $\pi/6 \le x \le 5\pi/6$ 23) c 24) d 25) c
26) e 27) e 28) a 29) d 30) d

31) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ 32) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 33) $0 \le x \le \pi/4$ ou $3\pi/4 \le x \le \pi$ ou $\pi/2 \le x \le 2\pi/3$

34) a) $(\pi/6, \pi/2) \cup (5\pi/6, 3\pi/2)$; b) $\left(\text{arcsen}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \pi - \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$:
c) $[0, \pi/12] \cup [5\pi/12, 13\pi/12] \cup [17\pi/12, 2\pi]$; d) $[\pi/6, 5\pi/6]$; e) $(\pi/3, 5\pi/3)$

35) a) $(13\pi/36 + 2k\pi/3, 19\pi/36 + 2k\pi/3)$; b) $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$.
c) $(-\pi/2 + 2k\pi, -\pi/3 + 2k\pi) \cup (\pi/3 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$;
d) $(-\pi/3 + k\pi, \pi/4 + 2k\pi) \cup (\pi/3 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$; e) $(-\pi/12 + k\pi/3, \pi/12 + k\pi/3)$;
f) $(\text{arc tg}(1/2) + k\pi, \text{arc tg}(-5/12) + k\pi$; g) $(k\pi/2, \pi/8 + k\pi/2)$;
h) $(\pi/6 + k\pi/2, \pi/3 + k\pi/2)$;
i) $(-\pi/8 + k\pi, k\pi) \cup (\pi/2 + k\pi, 5\pi/8 + k\pi) \cup (\pi/8 + k\pi, 3\pi/8 + k\pi)$;
j) $[-7\pi/12 + k\pi, -\pi/2 + k\pi) \cup (-\pi/2 + k\pi, \pi/12 + k\pi]$; k) $(-7\pi/18 + 2k\pi/3, \pi/18 + 2k\pi/3)$;
l) $(-\pi/3 + 2k\pi, \pi/3 + 2k\pi)$

Capítulo 9: Geometria de Posição e Poliedros

1) c	2) b	3) c	4) e	5) b
6) 20	7) ECCEC	8) d	9) e	10) 32
11) 15	12) c	13) CEECE	14) 26	15) b
6) c	17) b	18) a	19) 36	20) e
1) b	22) e	23) c	24) d	25) b
6) e	27) c	28) e	29) c	30) d
1) c	32) 9	33) e	34) d	35) d
36) a	37) c	38) c	39) e	40) e
41) a	42) a	43) d	44) b	45) $n \geq 6$ e $n \neq 7$
46) $F_3 = 3$, $F_4 = 2$, $F_5 = 1$		47) c	48) e	49) c
50) b	51) A: 5; B: 3; C: 4			

Capítulo 10: Prismas

1) a	2) b	3) a	4) b	5) d
6) b	7) VVVVF	8) a) 15000 L; b) $15x^2/4$ m^3.		9) b
10) e	11) b	12) d	13) a	14) e
15) a) 20 cm^3; b) 30 cm^2		16) d	17) d	18) e
19) CECCC	20) ECECC	21) b	22) a	23) e
24) d	25) b	26) e		
27) a) $8\sqrt{89}$ cm^2; b) $8\sqrt{65}$ cm^2; c) 8/3 cm			28) d	29) $60 + 12\sqrt{3}$ m^2
30) e	31) b	32) a	33) a) $\sqrt{6}/3$; b) 7/9; c) BAD	
34) 21 cm	35) a) $0 < h < 25$ cm; b) $h(60 - 2h)(50 - 2h)$			36) $\sqrt{152}$
37) e	38) e	39) a	40) 64 cm^3	41) a
42) b	43) a) $\dfrac{5\sqrt{57}}{2}$ cm^2; b) $\dfrac{20\sqrt{57}}{57}$ cm		44) e	45) e
46) a) $x = 28,4$ cm e $y = 27$ cm; b) $V = \dfrac{x^2y}{16} - \dfrac{x^3}{64}$, com $y > x/4$				47) d
48) d	49) d	50) e	51) e	52) e
53) d	54) d	55) d	56) e	57) d

58) e 59) c 60) $2(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})$ cm 61) 480 m²

62) $\ell = \sqrt{3}/2$ cm; h = $4\sqrt{3}/3$ cm 63) $V = 7a^3/24$

64) 1) $x = 2a/3$, $y = 2b/3$; 2) 1/5; 3) $\sqrt{3}\,b = \sqrt{2}\,a$ 65) $12\sqrt{2}\,a$; $(3-\sqrt{3})a^2$; $5a^3/6$

66) $(2p) = 2\left(\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$ 67) e 68) b) $\dfrac{\sqrt{3}(a^2-2b^2+2ab)}{2}$

69) $S_L.R/2$ 70) 8 71) b 73) $\sqrt{13}$

Capítulo 11: Pirâmide

1) a 2) a 3) 45 4) a 5) d

6) e 7) e 8) 1 9) 81 10) d

11) c 12) $13L^2/4$ 13) c 14) a) $3\sqrt{6}$ cm; c) $9-\sqrt{6}$ cm

15) a) $\sqrt{5}$ cm²; b) 5/6 cm³ 16) $64+32\sqrt{13}$ cm²

17) a) 4/3 cm³; b) $\sqrt{2}$ cm 18) 36 19) 83 20) d

21) $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\left(\pi-\text{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 22) $\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$ m 23) CCEEC 24) b

25) a) $4+2\sqrt{2}$ m; b) $9+3\sqrt{2}$ m³ 26) $\dfrac{5\sqrt{21}L^3}{12}$ 27) c 28) b

29) 24 30) a) π cm; b) $216\sqrt{2}$ cm³ 31) a

32) a) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$; b) $\dfrac{9}{16}$; c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$ 33) d 34) e 35) c

36) b 37) b 38) b 39) a 40) d

41) a 42) a 43) e 44) b 45) c

46) a = $L\sqrt{3}/8$, $\ell = L/4$; h = $3L/4$, S = $(45/16 + 51\sqrt{3}/32)L^2$ 47) a

48) e 49) b 50) a 51) a 52) d

53) b 54) b 55) e 56) d 57) a

58) c 59) c 60) a) 1350 cm³; b) 200/3 cm². 61) 5

62) V = 14,142 m³ 63) $V = 2a^3/9$

64) a) $\left(3+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)a^2/2$; b) $a^3/3$; d) o centro da esfera é o centro do retângulo BB'C'C, e o raio é $\sqrt{3}\,a/2$.

65) a) $B\hat{A}O = B\hat{A}C = A\hat{C}O = B\hat{C}O - 90^0$; b) AO = AB = a, OC = a cos α, AC = a sen α, OB = $a\sqrt{2}$, BC = $a\sqrt{1+\text{sen}^2\alpha}$; c) $V = \dfrac{1}{12}a^3\text{sen}2\alpha$; d) $\alpha = 30^0$ ou $\alpha = 60^0$; e) $V_{OABF} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

66) $10^3\sqrt{\sqrt{3}-1}$ dm³ 67) $\theta = \text{arc cos}\,\dfrac{3}{13}$

68) a) $\dfrac{2b\sqrt{39}}{13}$; b) $\dfrac{b^3\sqrt{3}}{52}$ 69) 5/4 70) $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}(\sqrt{109}+1)$

71) $\dfrac{b[a^2+b^2+ab]}{3}$ 72) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ 73) $7a^3/24$

74) AB = CD = 4cm, BD = 5cm e AC = $\frac{\sqrt{337}}{5}$ cm 75) $\sqrt{\ell^2 - 25}$ 76) ℓ

77) A 79) 20/3 80) $28\sqrt{L^2 - \frac{2048}{64}}$ 82) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Capítulo 12: Cilindro

1) a	2) d	3) e	4) d	5) d
6) b	7) c	8) c	9) b	10) e
11) a	12) d	13) e	14) Ficará submerso	
15) d	16) 1. 6750π cm^3; 2. 2700π cm^3; 3. 450π cm^3.			17) b
18) a	19) c	20) a	21) d	
22) a) 90.746 m^3; b) 30 m^2		23) a	24) a	25) b
26) d	27) d	28) c	29) e	30) d
31) e	32) b	33) e	34) c	35) a
36) 13	37) c	38) c	39) $(64 + 12\pi)/3$	40) 50
41) d	42) $200\sqrt{17}$ m	43) c	44) e	45) 81/88
46) 517.5 cm^3	47) $\sqrt{14}$	48) B	49) d/2	
50) a) 600π cm^3; b) 300 m^3		51) c	52) c	53) c
54) a	55) b	56) b	57) e	58) b
59) d	60) d	61) d	62) b	63) a

Capítulo 13: Cone

1) d	2) e	3) a) 16π cm^3; b) $\pi x^3/108$ cm^3.		4) c
5) y/h = 1/2	6) a) $\pi R^2 x^2/h^2$	7) 1) 10 cm; 2) 218°		
8) a) $45/\pi$ cm; b) $(135 - \pi)/3$ ml.		9) $\frac{\pi R^3(9\sqrt{3}+2)}{27}$		10) I
11) d	12) d	13) c	14) a	
15) e	16) a) 20π m^3; b) 9/16 m; c) $H = (6 - 2\sqrt[3]{15})$ m; d) $\frac{(6-H)^3}{48}$			
17) 1. $\frac{124\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; 2. $\frac{136\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3; 3. $\frac{8\sqrt{3}\pi}{15}$ s				18) 1) $2\sqrt{3}$; 2. 120°; 3. $3\sqrt{3} - \pi$
19) a	20) b	21) a) $V_a = \pi b^2c^2/3a$, $V_b = \pi b^2c/3$, $V_c = \pi c^2b/3$		
22) b	23) VFVF	24) b	25) c	
26) 5 cones com altura h/2 e raio r.		27) CCEEC	28) CEECC	29) CEEEC
30) 189000π m^3	31) b	32) d	33) 5R/7	34) c
35) a) 8 cm; b) 84π cm^2		36) $26\pi R^3/27$	37) a) 0.04 cm^3; b) 3.8π mm^3	
38) b	39) b	40) d	41) a	42) b
43) b	44) d	45) b	46) d	47) d
48) a	49) b	50) c	51) c	52) a
53) $V = 5\sqrt{2}\pi\ell^3/12$ e $A_T = \ell^2\pi(\sqrt{2}+1)$			54) c	55) e

56) b 57) c 58) e 59) b 60) 72 cm²

61) a) 41 m²; b) 5π/41 62) a) $BC = (2r\sqrt{x^2 - r^2}) / x$; b) $x = \frac{\sqrt{2}.r.h}{\sqrt{h^2 - r^2}}$. $h > r$.

63) a) 60°; b) 0°; c) 0°. 64) a) $V = \pi x^2(2r - x)/3$; b) $A = \pi\sqrt{2}\sqrt{2x^2r^2 - x^3r}$

65) $\frac{(k+1) \pm \sqrt{10k - 3k^2 - 3}}{2(k-1)}$ 66) a) $h = 2r\sqrt{2}$; b) $V = \frac{2r^3\sqrt{2}}{3}(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$

67) a) $2rx(r^2 - x^2)/3$; b) $r\pi(r^2 - x^2)(r - x)/3x$

68) a) a soma é igual a $2\pi k\, tg\frac{\theta}{2}$; b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{2m-1}}{2}h$ e $1/2 \le m \le 1$ 69) 448π cm³

70) $\frac{2Rr}{R + r}$

Capítulo 14: Esfera

1) $2\sqrt{3}$ 2) $6\pi^2$ 3) c 4) e 5) b

6) a) $4\pi/3$; b) 12 bolinhas. 7) d 8) c 9) ECEEC

10) b 11) a 12) d 13) c 14) a

15) d 16) VFFVV 17) d 18) 288π 19) a

20) 1/2 21) b 22) c 23) c 24) a

25) $R_1 = 0,5$ e $R_2 = 1$ 26) a) $\pi R^2/3$ cm²; b) $4\pi R^2/3$ cm² 27) $\pi R^2/2$

28) a) $q^2 + q = 1$; b) 6π 29) c 30) a) 8π cm²; $32\pi/3$ cm²

31) e 32) e 33) d 34) a) $\pi R^3/6$; b) $(2+\sqrt{3})\pi R^3$

35) a 36) a 37) a 38) b 39) d

40) c 41) c 42) b 43) d 44) c

45) 10 cm 46) $x = bc/2a$ $y = ac/2b$ $z = ab/2c$ 47) $S = 12\pi(\sqrt{3} + 3)$ m²

48) $\frac{(2-\sqrt{3})\pi R^3}{3}$ 49) d 50) b 51) $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$ 52) $11 = 3R$

Capítulo 15: Inscrição de Sólidos

1) a) 96 dm³; b) 2 2) a) 2 m; 16π m³; c) 8/3 m. 3) CCECE

4) c 5) b 6) e 7) $6 - 4\sqrt{2}$ cm 8) a/3

9) a) $5\sqrt{2}$; b) $\frac{500}{3}$ cm³ 10) $16 + (28/\sqrt{3})$ 11) b 12) a

13) a) 2; b) 12; c) 288. 14) CEECE 15) VFFF

16) a) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$; b) $\sqrt{6}$ 17) a) $x^3/6$; b) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 18) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ cm

19) a) $\frac{4}{3}\pi 50^3$; b) $\frac{4}{3}\pi 50^3$ 20) a 21) $3(8 - h)^3/18 + 36k - 96$

22) e 23) d 24) $\frac{640\pi\sqrt{3}}{9}$ cm³ 25) a 26) e

27) b 28) a 29) c 30) b 31) c
32) c 33) d 34) d 35) a 36) d
37) a 38) e 39) d 40) a 41) a
42) a 43) d 44) a 45) b 36) $2+2\sqrt{2}$
47) a 48) e 49) c 50) b 51) a
52) d 53) e 54) a 56) $(9-5\sqrt{3})/2$

57) $A = 120\pi$; $V = 60\pi$ 58) $4\sqrt{3}/3$ rad 59) $\sqrt{5}$ 60) 4 m

61) $2.5^2.7^3.\pi/3$ cm^3 62) $R = (2h^2 + a^2)/4h$; $r = ah/(a + \sqrt{4h^2 + a^2})$

63) $4\pi Rr$ 64) $A = 2\pi\sqrt{R.r}(R + r)$

65) b) $r = \dfrac{((\sqrt{9\ell^2 + 12h^2} \pm 3\ell)}{4h}$ e $R = \dfrac{hr}{h-2r}$; c) $Rr = 3\ell^2/4$ 67) 4/3

68) $2(\sqrt{2}-1)R$ 69) b 70) e 71) e

72) $\dfrac{a^3(27-11\sqrt{6})}{16}$ 73) 5/2 74) $\dfrac{(3-\sqrt{3})r}{2}$ 75) 4 cm 77) $4r^3/3$

78) a) $\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}$; b) 1/2 79) c 80) d 81) $\dfrac{125\pi R^3}{48}$

82) a) $H = h$ ou $H = \dfrac{2rh}{h-2r}$; b) $h = 4r$ e 1.5 83) a) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; b) ρ^2: $8\pi\rho^2\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

84) $\dfrac{\pi R^3(2\sqrt{2}+1)^3}{3}$

Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM, cidade que seus pais trabalhavam na época. Sua família é originária de Belém-PA, cidade onde passou a maior parte de sua vida. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica-Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Desde então trabalha diretamente na preparação para concursos militares e olimpíadas de matemática em Belém, tanto como professor quanto coordenador. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou do Tribunal de Coordenação (banca corretora) da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza-CE. Apesar de ter sua atuação mais conhecida na área de matemática, professor Rufino (como é mais conhecido) também ministra aulas de física para concursos militares e olimpíadas. Também é autor da coleção Técnicas em Olimpíadas de Matemática e do livro A Física no Vestibular do IME, onde são resolvidas as provas discursivas de física do IME desde 1980.

Entre suas maiores paixões estão a família e o motociclismo. Adora viajar com a família, sobretudo para praias, cachoeiras e hotéis fazenda. Em seus momentos de lazer longe da família, troca qualquer coisa pela companhia de seus amigos do Pará Moto Clube, tendo percorrido alguns milhares de quilômetros montado em motocicletas de alta cilindrada. Em sua época no ITA, foi goleiro titular da equipe de futsal da faculdade por três anos. Também foi o treinador da equipe feminina de futsal do ITA, quando foram conquistadas as primeiras medalhas do ITA nesta modalidade em competições universitárias.

ISBN 978-856983526-4

9 788569 835264